

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»

На правах рукописи



Кондратьева Наталья Сергеевна

**РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ
ТРЕХМЕРНОГО ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ С УЧЕТОМ ВИХРЕВЫХ
ТОКОВ В ТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВАХ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
Рояк Михаил Эммануилович
доктор технических наук, профессор

Новосибирск – 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1 КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНАЯ ПОСТАНОВКА С СОВМЕСТНЫМ ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕКТОРНОГО И СКАЛЯРНОГО МАГНИТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ВИХРЕВЫХ ТОКОВ	
1.1 Математическая модель	13
1.1.1 Проводящая подобласть	14
1.1.2 Непроводящая подобласть	14
1.1.3 Условия сопряжения	15
1.2 Вариационная постановка	16
1.2.1 Проводящая подобласть	16
1.2.2 Непроводящая подобласть	17
1.2.3 Условия сопряжения	17
1.2.4 Система вариационных уравнений	18
1.3 Дискретизация	20
1.4 Применение	21
Выводы	25
2 ПОСТАНОВКА С СОВМЕСТНЫМ ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	
2.1 Математическая модель	26
2.2 Дискретизация	28
2.3 Применение	29
Выводы	31

3	УЧЕТ ГИСТЕРЕЗИСА ПРИ РАСЧЕТЕ ПОЛЯ В ЭЛЕМЕНТАХ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ УСКОРИТЕЛЕЙ	32
3.1	Модель гистерезиса Н.А. Винокурова	33
3.2	Применение новой модели остаточной намагниченности железа для расчета поворотного магнита ускорителя	39
3.2.1	Математическая модель и вариационная постановка	39
3.2.2	Конечноэлементная дискретизация	42
3.2.3	Использование макромодели гистерезиса в дискретной конечноэлементной модели	43
3.2.4	Применение	44
3.3	Учет эффектов гистерезиса при расчете вихревых токов	50
3.3.1	Математическая модель и вариационная постановка	50
3.3.2	Применение	53
	Выводы	55
4	ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС QUASAR	57
4.1	Интерфейс	57
4.2	Архитектура	59
4.3	Разработанные части и модули	62
4.3.1	Библиотека Quasar.Core	62
4.3.2	Библиотека Quasar.BaseUI	63
4.3.3	Библиотека Quasar.UI	64
4.3.4	Библиотека Quasar.UnitTests	64
	Выводы	64
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	65
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	67
	ПРИЛОЖЕНИЕ А ДОКУМЕНТ О ВНЕДРЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ	80

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Численное моделирование электромагнитных полей необходимо при современном подходе к проектированию сложных технических устройств, таких как ускорители заряженных частиц. Для достижения оптимального результата проектирования необходима возможность проводить моделирование трехмерной конструкции с учетом нелинейности, нестационарных полей и эффектов гистерезиса. При этом требуется, чтобы моделирование можно было проводить с достаточной скоростью и точностью на персональном компьютере проектировщика, что приводит к необходимости применения наиболее эффективных методов и алгоритмов. Широко используемые в настоящее время при проектировании программные комплексы зачастую позволяют решать только двумерные задачи, что делает невозможным качественное проектирование сложных конструкций. Комплексы, позволяющие решать трехмерные электромагнитные задачи, обычно основаны на методе конечных элементов [1–3], что приводит к необходимости использования трехмерной расчетной сетки, качественное построение которой может быть весьма трудной задачей, что усложняет работу проектировщика, а использование некачественной сетки приводит либо к недостаточной точности расчетов, либо к большим вычислительным затратам.

Для моделирования электромагнитных полей также может использоваться метод граничных элементов, описанный в работе О. Steinbach [4]. Перспективные подходы, связанные с совместным использованием конечных и граничных элементов, достаточно активно разрабатываются зарубежными учёными, см., например, работы R. Hiptmair [5], U. Langer [6], O. Steinbach [7] и др. [8–10] Однако в их работах рассматривается использование либо только векторных

элементов для решения нестационарных задач, либо только скалярных элементов для задач магнитостатики.

В мире существует достаточно много коммерческих программных комплексов, позволяющих решать трехмерные задачи электромагнетизма. Наиболее распространенные из них, ANSYS [11], NX Nastran [12], Altair Flux [13] и Cobham Opera [14] не используют метод граничных элементов. В разработанном CERN программном комплексе ROXIE [15, 16] применяется совместный метод конечных и граничных элементов, однако используется постановка с векторным магнитным потенциалом, менее эффективная по сравнению с постановкой, предложенной в диссертационной работе. Кроме того, все эти комплексы не позволяют учитывать эффекты гистерезиса. Существуют пакеты программ, такие как Nmag [17] и OOMMF [18], позволяющие моделировать эффекты гистерезиса через решение задачи микромагнетизма, однако такой подход не позволит проводить расчеты для макроконструкций, таких как ускорители заряженных частиц. В настоящее время единственным программным комплексом, позволяющим учитывать гистерезис при моделировании электромагнитного поля, является COMSOL Multiphysics [19].

Несмотря на то, что явление гистерезиса в ферромагнитных материалах достаточно хорошо изучено, задача прецизионного трехмерного математического моделирования с его учетом по-прежнему практически не решена. Одной из причин этого является то, что наиболее адекватные из математических моделей ферромагнитного гистерезиса основываются на уравнениях микромагнетизма, и применение их для расчета реальных технических устройств является малореальным, поскольку требует дискретизации на микроуровне. Единой же и универсальной модели гистерезиса на макроуровне нет, основные современные публикации в российских и зарубежных источниках отдают предпочтение модели Preisach [20–23] и модели Jiles–Atherton [24–27]. Также в последнее время развиваются модели гистерезиса, основанные на минимизации энергии, например, модификации модели сухого трения, предложенной Bergqvist [28–30].

Заметим, что в России, за исключением НГТУ, моделированию трёхмерных электромагнитных полей в сложных областях уделяется явно недостаточное внимание. Большинство современных работ в области численного моделирования электромагнитных полей выполнено в НГТУ (например, работы Рояка М.Э. [31–36], Соловейчика Ю.Г. [3, 37, 38], Персовой М.Г. [39–43], Шуриной Э.П. [44–48] и др.). Работы других российских авторов в основном направлены на решение либо одно- и двумерных задач, либо достаточно простых трёхмерных задач [49–52].

В диссертационной работе предлагаются новые подходы для численного моделирования трёхмерных нестационарных электромагнитных процессов, позволяющие учесть вихревые токи и эффекты гистерезиса. Моделирование проводится на основе совместного использования векторного потенциала в проводящих частях конструкций и скалярного магнитного потенциала в непроводящих частях конструкции. При этом для аппроксимации векторного потенциала используется метод конечных элементов с векторными базисными функциями, а для аппроксимации скалярного магнитного потенциала используются два подхода: метод конечных элементов со скалярными базисными функциями и метод граничных элементов. Второй подход позволяет избавиться от необходимости строить конечноэлементную сетку в непроводящих подобластях, сохранив возможности метода векторных конечных элементов по достаточно точному учёту вихревых токов в проводящих подобластях.

Также в данной работе разработана вычислительная схема, совмещающая вышеописанные подходы с возможностью учета зависимости намагниченности от предыстории в подобластях с векторным магнитным потенциалом. В рамках диссертационных исследований, разработанные методы были апробированы при трёхмерном моделировании реального дипольного магнита.

Цели и задачи исследования

Основной целью исследования является разработка эффективных вычислительных схем и алгоритмов численного моделирования нестационарных электромагнитных полей с использованием неполного скалярного магнитного потенциала, аппроксимируемого конечными или граничными элементами, и полного векторного магнитного потенциала, аппроксимируемого векторными конечными элементами, позволяющих учитывать зависимость намагниченности от поля и предыстории, и реализация их в виде комплекса программ.

Для достижения этой цели были решены следующие задачи.

1. Разработка математических моделей для решения задачи моделирования нестационарных электромагнитных процессов с использованием неполного скалярного магнитного потенциала в непроводящей среде и полного векторного магнитного потенциала в проводящей среде, позволяющих учитывать вихревые токи и предысторию намагниченности в ферромагнитных объектах.
2. Разработка эффективных вычислительных схем на основе совместного использования методов конечных и граничных элементов для разработанных математических моделей.
3. Разработка вычислительных схем и алгоритмов для учета предыстории намагниченности в ферромагнитных объектах и их интеграция в схемы решения нестационарных нелинейных задач электромагнетизма.
4. Программная реализация разработанных схем и методов в виде программного комплекса.
5. Оценка адекватности разработанных математических моделей путем сравнения результатов численного моделирования с экспериментальными данными.

Научная новизна

В используемых в настоящее время программных комплексах используется либо только метод конечных элементов, либо вычислительные схемы на основе только векторного магнитного потенциала. Предлагаемые вычислительные схемы и алгоритмы на основе совместного использования конечных и граничных элементов являются более эффективными за счет использования скалярного магнитного потенциала в непроводящих областях и векторного в проводящих областях. Доступных программных комплексов, позволяющих учитывать предысторию намагничивания материалов при моделировании ускорительных магнитов, в настоящее время в мире не существует.

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая значимость работы состоит в том, что были разработаны эффективные вычислительные схемы и алгоритмы численного моделирования нестационарных электромагнитных полей с использованием методов конечных и граничных элементов, позволяющие учитывать зависимость намагниченности от поля и предыстории.

Практическая значимость работы состоит в том, что одной из областей приложения разработанных вычислительных схем является численное моделирование магнитных систем ускорителей заряженных частиц. Поскольку гистерезисные явления и вихревые токи неизбежны при изменениях основного поля, например, при включении электромагнитов, и значительно усложняют процедуру настройки ускорителей заряженных частиц, реализованные схемы особенно важны для проектирования фрагментов ускорителей с высокими требованиями к качеству поля. Учет явлений гистерезиса и вихревых токов при численном моделировании поможет существенно повысить эффективность проектирования ускорителей.

Программный комплекс Quasar, в котором автором были реализованы все описанные в работе вычислительные схемы и алгоритмы, успешно применялся для расчета вихревых токов, возникающих при включении магнитов, а также для моделирования явлений гистерезиса в ФГБУН Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук, что подтверждается соответствующими документами о внедрении (Приложение А).

Методология и методы исследования

Методы исследования основаны на использовании метода конечных и граничных элементов для решения трехмерных нестационарных нелинейных задач моделирования электромагнитного поля.

На защиту выносятся:

1. Математическая модель для решения задачи моделирования нестационарных электромагнитных процессов с использованием неполного скалярного магнитного потенциала в непроводящей среде и полного векторного магнитного потенциала в проводящей среде, позволяющих учитывать вихревые токи и предысторию намагниченности в ферромагнитных объектах.
2. Вычислительные схемы на основе совместного использования методов конечных и граничных элементов для разработанной математической модели.
3. Вычислительные схемы и алгоритмы для учета предыстории намагниченности в ферромагнитных объектах при решении нестационарных задач электромагнетизма.
4. Части и модули объектно-ориентированного программного комплекса Quasar, реализующие все описанные в работе вычислительные схемы и алгоритмы.

Степень достоверности и апробация результатов

Основные результаты работы были представлены и докладывались на конференциях

- XII международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы электронного приборостроения» (АПЭП-2014, НГТУ, 2-4 октября 2014 г.),
- Всероссийская научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Наука. Технологии. Инновации» (НТИ-2014, НГТУ, 2-6 декабря 2014 г.),
- The 11th International Forum on Strategic Technology 2016 (IFOST-2016, Novosibirsk State Technical University, Russia, June 1-3, 2016)
- XIII международная научно-техническая конференция «Актуальные проблемы электронного приборостроения» (АПЭП-2016, НГТУ, 3-6 октября 2016 г.),
- The 13th International Forum on Strategic Technology 2018 (IFOST-2018, Harbin University of Science and Technology, China, May 30-June 1, 2018),
- Российская научно-техническая конференция «Обработка информации и математическое моделирование» (ОИиММ-2019, СибГУТИ, Новосибирск, 25–26 апреля 2019 г.),
- 42nd International Conference on Boundary Elements and other Mesh Reduction Methods (BEM/MRM 42, Coimbra, Portugal, July 2-4, 2019),
- 21st EAGE conference on oil and gas geological exploration and development (Geomodel 2019, Gelendzhik, September 9-13, 2019).

По материалам диссертационных исследований лично и в соавторстве опубликовано 18 научных работ [32, 33, 35, 36, 53–66], в том числе 4 научные

публикации, опубликованные в журналах, входящих в перечень ВАК [33, 35, 53, 54], 5 научных публикаций, индексируемых в международных информационно-аналитических системах научного цитирования Web of Science [34, 55–57, 67], 6 научных публикаций, индексируемых в международной информационно-аналитической системе научного цитирования Scopus [34, 55–58, 67], а также 10 работ, опубликованных в других изданиях и в сборниках трудов конференций [32, 36, 59–66].

Работа проводилась в рамках научных исследований, выполняемых при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований

- Проект РФФИ 15-02-07776 А “Учёт гистерезиса при численном моделировании полей в магнитных системах ускорителей заряженных частиц”, 2015-2016;
- Проект РФФИ 17-41-543174 р_мол_а “Численное моделирование электромагнитных процессов с существенным влиянием вихревых токов и зависимостью намагниченности от предыстории”, 2017-2018;

а также при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации

- Проект 5.978.2017/4.6 (проектная часть государственного задания);
- Проект RFMEFI57417X0156 (соглашение №14.574.21.0156).

Структура работы

Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы (93 наименования), приложения. Общий объем диссертации – 80 страниц, в том числе 18 рисунков.

1 КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНАЯ ПОСТАНОВКА С СОВМЕСТНЫМ ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЕКТОРНОГО И СКАЛЯРНОГО МАГНИТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ВИХРЕВЫХ ТОКОВ

Учет вихревых токов в технических устройствах необходим при решении большого количества электромагнитных задач. Большинство существующих программных комплексов для решения таких задач основано, как правило, на сеточных методах. Наиболее популярными из них являются метод конечных элементов (МКЭ) и метод граничных элементов (МГЭ) [1, 2, 8, 68, 69]. Оба метода основаны на так называемой вариационной формулировке, полученной из системы уравнений Максвелла. Одна из проблем вариационной формулировки заключается в обеспечении единственности решения в непроводящих областях. Существует множество способов избежать этой проблемы, модификация уравнений в непроводящей области [3, 70] является одним из самых популярных из них.

В рамках диссертационной работы реализовано программное обеспечение, основанное на совместном использовании полного векторного магнитного потенциала и неполного скалярного магнитного потенциала [1]. Преимуществом этого подхода является не только единственность решения в непроводящей под-области, но также возможность исключить токовые обмотки из МКЭ сетки, что упрощает ее построение.

1.1 Математическая модель

Задачи моделирования электромагнитного поля описываются системой уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}} + \sigma \vec{\mathbf{E}} + \frac{\partial (\varepsilon \vec{\mathbf{E}})}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} = 0, \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \varepsilon \vec{\mathbf{E}} = \rho, \quad (1.4)$$

где $\vec{\mathbf{H}}$ – напряженность магнитного поля, $\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}}$ – магнитная индукция, μ – магнитная проницаемость, $\vec{\mathbf{E}}$ – напряженность электрического поля, $\vec{\mathbf{J}}$ – плотность внешнего тока, σ – электропроводность, ε – диэлектрическая проницаемость, ρ – плотность электрического заряда.

Будем решать задачу нахождения вихревых токов. Считаем, что токами смещения можно пренебречь, т.е. $\frac{\partial(\varepsilon \vec{\mathbf{E}})}{\partial t} = 0$.

Рассмотрим расчетную область Ω . Рассматривается случай, когда на границе заданы граничные условия только двух типов, т.е. граница $\partial\Omega$ может быть разделена на две части $\partial\Omega = \Gamma_H \cup \Gamma_B$ такие, что $\vec{\mathbf{H}} \times \vec{\mathbf{n}} = 0$ на Γ_H , $\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0$ на Γ_B .

Для простоты будем считать расчетную область Ω состоящей из двух подобластей: непроводящей Ω_0 , где $\sigma = 0$ и $\mu = \mu_0$, и проводящей Ω_c , где $\sigma > 0$ и $\mu = \mu_c$. Заметим, что разделение на подобласти не связано с разбиением границы, упомянутым выше.

Мы будем рассматривать ситуацию, когда внешние токи $\vec{\mathbf{J}}$ отличны от нуля только в непроводящей области.

1.1.1 Проводящая подобласть

В проводящей подобласти Ω_c электромагнитное поле может быть описано с помощью магнитного векторного потенциала $\vec{\mathbf{A}}$, который определяется следующими уравнениями:

$$\vec{\mathbf{B}} = \text{rot } \vec{\mathbf{A}}, \quad \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t}. \quad (1.5)$$

Подставляя определение (1.5) в уравнения Максвелла (1.1)-(1.4) и учитывая, что $\vec{\mathbf{J}} = 0$ в Ω_c , получим

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu_c} \text{rot } \vec{\mathbf{A}} \right) + \sigma \frac{\partial \vec{\mathbf{A}}}{\partial t} = 0. \quad (1.6)$$

Применяя метод конечных разностей во временной области, преобразуем (1.6) к виду

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu_c} \text{rot } \vec{\mathbf{A}} \right) + \gamma \vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{F}}, \quad (1.7)$$

где γ и $\vec{\mathbf{F}}$ определяются схемой по времени.

Таким образом, в Ω_c получаем задачу (1.7) с граничными условиями

$$\left(\frac{1}{\mu_c} \text{rot } \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{n}} \right) \Big|_{\partial\Omega_c \cap \Gamma_H} = 0, \quad (1.8)$$

$$\left(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{n}} \right) \Big|_{\partial\Omega_c \cap \Gamma_B} = 0. \quad (1.9)$$

1.1.2 Непроводящая подобласть

Пусть $\vec{\mathbf{H}}_{ext}$ – внешнее магнитное поле, создаваемое внешними токами $\vec{\mathbf{J}}$ в вакууме, т.е. $\vec{\mathbf{H}}_{ext}$ удовлетворяют уравнениям Максвелла (1.1)-(1.4) в следующем виде

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{\mathbf{H}}_{ext} &= \vec{\mathbf{J}}, \\ \text{div } \mu_0 \vec{\mathbf{H}}_{ext} &= 0, \end{aligned}$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} \left(\vec{\mathbf{H}}_{ext} \times \vec{\mathbf{n}} \right) \Big|_{\partial\Omega_0 \cap \Gamma_H} &= 0, \\ \left(\mu_0 \vec{\mathbf{H}}_{ext} \cdot \vec{\mathbf{n}} \right) \Big|_{\partial\Omega_0 \cap \Gamma_B} &= 0. \end{aligned}$$

$\vec{\mathbf{H}}_{ext}$ может быть вычислен с помощью закона Био-Савара:

$$\vec{\mathbf{H}}_{ext}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{\mathbf{J}}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}'.$$

В области Ω_0 магнитное поле $\vec{\mathbf{H}}$ может быть представлено в виде

$$\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{H}}_{ext} - \text{grad } u, \quad (1.10)$$

где u называется неполным скалярным магнитным потенциалом, который удовлетворяет эллиптическому уравнению

$$-\text{div } \mu_0 \text{grad } u = 0 \quad (1.11)$$

с граничными условиями

$$u \Big|_{\partial\Omega_0 \cap \Gamma_H} = 0, \quad (1.12)$$

$$\left(\mu_0 \frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}} \right) \Big|_{\partial\Omega_0 \cap \Gamma_B} = 0. \quad (1.13)$$

1.1.3 Условия сопряжения

Поскольку уравнения Максвелла должны быть справедливы во всей области Ω , уравнения (1.7) и (1.11) необходимо дополнить условиями сопряжения на границе раздела между двумя подобластями. Выполнение этих условий гарантирует непрерывность тангенциальной части $\vec{\mathbf{H}}$ и нормальной части $\vec{\mathbf{B}}$ на границе $\Gamma_I = \partial\Omega_c \cap \partial\Omega_0$.

Применяя представления (1.5) и (1.10) к условиям непрерывности для $\vec{\mathbf{H}}$ и $\vec{\mathbf{B}}$ получаем

$$\left(\frac{1}{\mu_c} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{n}}_c \right) \Big|_{\Gamma_I} = \left(\vec{\mathbf{H}}_{ext} \times \vec{\mathbf{n}}_c - \operatorname{grad} u \times \vec{\mathbf{n}}_c \right) \Big|_{\Gamma_I}, \quad (1.14)$$

$$\left(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_c \right) \Big|_{\Gamma_I} = \left(\mu_0 \vec{\mathbf{H}}_{ext} \cdot \vec{\mathbf{n}}_c - \mu_0 \frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}_c} \right) \Big|_{\Gamma_I}. \quad (1.15)$$

При этом $\vec{\mathbf{n}}_c$ – внешняя нормаль по отношению к Ω_c .

Отметим, что для того, чтобы рассматриваемая формулировка была корректной, необходимо, чтобы любая связная подобласть Ω_c была односвязной. В противном случае будет нарушен закон циркуляции Ампера, т.к. будет существовать замкнутый контур вокруг электрического тока, лежащий в области скалярного потенциала.

1.2 Вариационная постановка

Выведем вариационную постановку для описанной выше задачи.

1.2.1 Проводящая подобласть

В области Ω_c введем гильбертовы пространства $H^{\operatorname{rot}}(\Omega_c)$ и $H_0^{\operatorname{rot}}(\Omega_c)$ такие, что

$$\begin{aligned} H^{\operatorname{rot}}(\Omega_c) &= \left\{ \vec{\mathbf{V}} \mid \vec{\mathbf{V}} \in L^2(\Omega_c), \operatorname{rot} \vec{\mathbf{V}} \in L^2(\Omega_c) \right\}, \\ H_0^{\operatorname{rot}}(\Omega_c) &= \left\{ \vec{\mathbf{V}} \mid \vec{\mathbf{V}} \in H^{\operatorname{rot}}(\Omega_c), \left(\vec{\mathbf{V}} \times \vec{\mathbf{n}} \right) \Big|_{\Gamma_B} = 0 \right\}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Получим слабую форму уравнения (1.7). Потребуем $\forall \vec{\mathbf{\Psi}} \in H_0^{\operatorname{rot}}(\Omega_c)$

$$\left(\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu_c} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}} \right), \vec{\mathbf{\Psi}} \right)_{\Omega_c} + \left(\gamma \vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{\Psi}} \right)_{\Omega_c} = \left(\vec{\mathbf{F}}, \vec{\mathbf{\Psi}} \right)_{\Omega_c}. \quad (1.17)$$

где $\vec{\mathbf{A}} \in H_0^{\operatorname{rot}}(\Omega_c)$.

После применения формулы Грина получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\mu_c} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}}, \operatorname{rot} \vec{\Psi} \right)_{\Omega_c} + \left(\gamma \vec{\mathbf{A}}, \vec{\Psi} \right)_{\Omega_c} = \\ & = \left(\vec{\mathbf{F}}, \vec{\Psi} \right)_{\Omega_c} + \left(\frac{1}{\mu_c} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{n}}, \vec{\Psi} \right)_{\partial\Omega_c}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Заметим, что вследствие граничного условия (1.8) и выбора гильбертова пространства (1.16) интеграл в последнем члене будет равен нулю на $\partial\Omega_c \setminus \Gamma_I$, поэтому он может быть взят только по Γ_I :

$$\left(\frac{1}{\mu_c} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{n}}, \vec{\Psi} \right)_{\partial\Omega_c} = \left(\frac{1}{\mu_c} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{n}}, \vec{\Psi} \right)_{\Gamma_I}.$$

1.2.2 Непроводящая подобласть

Аналогично Ω_c , введем гильбертовы пространства $H^1(\Omega_0)$ and $H_0^1(\Omega_0)$ на Ω_0 :

$$\begin{aligned} H^1(\Omega_0) &= \{v \mid v \in L^2(\Omega_0), \operatorname{grad} v \in L^2(\Omega_0)\}, \\ H_0^1(\Omega_0) &= \{v \mid v \in H^1(\Omega_0), v|_{\Gamma_H} = 0\}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Слабая форма уравнения (1.11) выглядит следующим образом

$$(-\operatorname{div} \mu_0 \operatorname{grad} u, v)_{\Omega_0} = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_0),$$

где $u \in H_0^1(\Omega_0)$. Применяя формулы Грина, мы получаем

$$(\mu_0 \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)_{\Omega_0} = \left(\mu_0 \frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}}, v \right)_{\partial\Omega_0}. \quad (1.20)$$

Напомним, что вследствие граничного условия (1.13) и выбора гильбертова пространства (1.19) правую часть (1.20) можно интегрировать по Γ_I вместо $\partial\Omega_0$.

1.2.3 Условия сопряжения

Получим слабую форму уравнений связи (1.14)-(1.15). Для этого потребуем $\forall \vec{\Psi} \in H_0^{\operatorname{rot}}(\Omega_c), \forall v \in H_0^1(\Omega_0)$

$$\left(\frac{1}{\mu_c} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{n}}_c, \vec{\Psi} \right)_{\Gamma_I} + \left(\operatorname{grad} u \times \vec{\mathbf{n}}_c, \vec{\Psi} \right)_{\Gamma_I} = \left(\vec{\mathbf{H}}_{ext} \times \vec{\mathbf{n}}_c, \vec{\Psi} \right)_{\Gamma_I}, \quad (1.21)$$

$$\left(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_c, v \right)_{\Gamma_I} + \left(\mu_0 \frac{\partial u}{\partial \vec{\mathbf{n}}_c}, v \right)_{\Gamma_I} = \left(\mu_0 \vec{\mathbf{H}}_{ext} \cdot \vec{\mathbf{n}}_c, v \right)_{\Gamma_I}. \quad (1.22)$$

1.2.4 Система вариационных уравнений

Заменим слагаемые, содержащие векторный потенциал $\vec{\mathbf{A}}$ в (1.21), на представление, полученное из (1.18) и слагаемые, содержащие скалярный потенциал u в (1.22), на представление, полученное из (1.20). Получим следующую систему вариационных уравнений $\forall \vec{\Psi} \in H_0^{\operatorname{rot}}(\Omega_c)$, $\forall v \in H_0^1(\Omega_0)$

$$\left(\frac{1}{\mu_c} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}}, \operatorname{rot} \vec{\Psi} \right)_{\Omega_c} + \left(\gamma \vec{\mathbf{A}}, \vec{\Psi} \right)_{\Omega_c} + \left(\operatorname{grad} u \times \vec{\mathbf{n}}_c, \vec{\Psi} \right)_{\Gamma_I} = \left(\vec{\mathbf{F}}, \vec{\Psi} \right)_{\Omega_c} + \left(\vec{\mathbf{H}}_{ext} \times \vec{\mathbf{n}}_c, \vec{\Psi} \right)_{\Gamma_I}, \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} & - \left(\operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_c, v \right)_{\Gamma_I} + (\mu_0 \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)_{\Omega_0} = \\ & = - \left(\mu_0 \vec{\mathbf{H}}_{ext} \cdot \vec{\mathbf{n}}_c, v \right)_{\Gamma_I}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Покажем, что билинейная форма системы (1.23)-(1.24) эллиптическая. Для этого докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть S – липшицева поверхность в трехмерном евклидовом пространстве, $\vec{\mathbf{n}}_S$ – нормаль к поверхности S и граница S разделена на две части,

$$\partial S = L_K \cup L_m, \quad (1.25)$$

такие, что

$$\left(\vec{\mathbf{K}} \times \vec{\mathbf{n}}_S \right) \Big|_{L_K} = 0, \quad (1.26)$$

$$m \Big|_{L_m} = 0, \quad (1.27)$$

где $\vec{\mathbf{K}} \in H^{\text{rot}}(S)$ и $m \in H^1(S)$.

Тогда $\forall \vec{\mathbf{K}} \forall m$

$$\left(\text{rot } \vec{\mathbf{K}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_S, m \right)_S = \left(\vec{\mathbf{K}}, \text{grad } m \times \vec{\mathbf{n}}_S \right)_S.$$

Доказательство. Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int_S \text{rot}(\vec{\mathbf{K}}m) \cdot \vec{\mathbf{n}}_S dS.$$

С одной стороны, в соответствии с теоремой Стокса,

$$\int_S \text{rot}(\vec{\mathbf{K}}m) \cdot \vec{\mathbf{n}}_S dS = \int_{\partial S} (\vec{\mathbf{K}}m) \cdot \vec{dl}.$$

Из (1.25) получим

$$\int_{\partial S} (\vec{\mathbf{K}}m) \cdot \vec{dl} = \int_{L_m} (\vec{\mathbf{K}}m) \cdot \vec{dl} + \int_{L_P} (\vec{\mathbf{K}}m) \cdot \vec{dl}.$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю в связи с (1.27). Т.к. тангенциальная компонента $\vec{\mathbf{K}}$ обращается в ноль на L_K (1.26), второе слагаемое также равно нулю. Следовательно, мы получаем

$$\int_S \text{rot}(\vec{\mathbf{K}}m) \cdot \vec{\mathbf{n}}_S dS = 0. \quad (1.28)$$

С другой стороны, по свойствам оператора rot и смешанного произведения векторов,

$$\begin{aligned} & \int_S \text{rot}(\vec{\mathbf{K}}m) \cdot \vec{\mathbf{n}}_S dS = \\ &= \int_S (m \text{rot } \vec{\mathbf{K}}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_S dS + \int_S (\text{grad } m \times \vec{\mathbf{K}}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_S dS = \\ &= \int_S (\text{rot } \vec{\mathbf{K}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_S) m dS - \int_S \vec{\mathbf{K}} \cdot (\text{grad } m \times \vec{\mathbf{n}}_S) dS. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Таким образом, из (1.28) и (1.29) мы получаем

$$\left(\text{rot } \vec{\mathbf{K}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_S, m \right)_S - \left(\vec{\mathbf{K}}, \text{grad } m \times \vec{\mathbf{n}}_S \right)_S = 0.$$

□

Лемму 1 можно применить к первому слагаемому (1.24) для получения итоговой системы

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\mu_c} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{A}}, \operatorname{rot} \vec{\Psi} \right)_{\Omega_c} + \left(\gamma \vec{\mathbf{A}}, \vec{\Psi} \right)_{\Omega_c} + \\ & + \left(\operatorname{grad} u \times \vec{\mathbf{n}}_c, \vec{\Psi} \right)_{\Gamma_I} = \left(\vec{\mathbf{F}}, \vec{\Psi} \right)_{\Omega_c} + \left(\vec{\mathbf{H}}_{ext} \times \vec{\mathbf{n}}_c, \vec{\Psi} \right)_{\Gamma_I}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} & - \left(\vec{\mathbf{A}}, \operatorname{grad} v \times \vec{\mathbf{n}}_c \right)_{\Gamma_I} + (\mu_0 \operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)_{\Omega_0} = \\ & = - \left(\mu_0 \vec{\mathbf{H}}_{ext} \cdot \vec{\mathbf{n}}_c, v \right)_{\Gamma_I}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Относящаяся к Ω_c часть билинейной формы системы (1.30)-(1.31),

$$\left(\frac{1}{\mu_c} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{K}}, \operatorname{rot} \vec{\mathbf{M}} \right)_{\Omega_c} + \left(\gamma \vec{\mathbf{K}}, \vec{\mathbf{M}} \right)_{\Omega_c},$$

будет эллиптической при условии $\gamma > 0$, т.е. $\sigma > 0$, что выполняется по определению Ω_c . Часть, относящаяся к Ω_0 ,

$$(\mu_0 \operatorname{grad} k, \operatorname{grad} m)_{\Omega_0},$$

эллиптична, если часть границы $\partial\Omega_0 \cap \Gamma_B \neq \emptyset$, т.е. заданы краевые условия Дирихле. Поскольку две оставшиеся части кососимметричны, их сумма равна нулю. Следовательно, билинейная форма системы (1.30)-(1.31) эллиптична.

1.3 Дискретизация

Кратко рассмотрим конечноэлементную дискретизацию. Будем искать решение в виде:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{A}}_h &= \sum_j q_j \vec{\psi}_j, \\ u_h &= \sum_j p_j \varphi_j, \end{aligned} \quad (1.32)$$

где $\vec{\psi}_j$ – базисные функции $H_0^{\operatorname{rot},h}(\Omega_c)$, конечномерного подпространства $H_0^{\operatorname{rot}}(\Omega_c)$, φ_j – базисные функции $H_0^{1,h}(\Omega_0)$, конечномерного подпространства $H_0^1(\Omega_0)$.

Из системы вариационных уравнений (1.30)-(1.31) получается блочно-кососимметричная система линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} A^v & C^T \\ -C & A^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^v \\ f^s \end{bmatrix}, \quad (1.33)$$

где

$$\begin{aligned} A_{ij}^v &= \left(\frac{1}{\mu_c} \text{rot } \vec{\psi}_i, \text{rot } \vec{\psi}_j \right)_{\Omega_c} + \left(\gamma \vec{\psi}_i, \vec{\psi}_j \right)_{\Omega_c}, \\ A_{ij}^s &= \left(\mu_0 \text{grad } \varphi_i, \text{grad } \varphi_j \right)_{\Omega_0}, \\ C_{ij} &= \left(\text{grad } \varphi_i \times \vec{\mathbf{n}}_c, \vec{\psi}_j \right)_{\Gamma_I}, \\ f_i^v &= \left(\vec{\mathbf{F}}, \vec{\psi}_i \right)_{\Omega_c} + \left(\vec{\mathbf{H}}_{ext} \times \vec{\mathbf{n}}_c, \vec{\psi}_i \right)_{\Gamma_I}, \\ f_i^s &= - \left(\mu_0 \vec{\mathbf{H}}_{ext} \cdot \vec{\mathbf{n}}_c, \varphi_i \right)_{\Gamma_I}. \end{aligned}$$

Вид матрицы в (1.33) позволяет использовать специальные предобусловливатели, такие как Bramble-Pasciak [71, 72].

1.4 Применение

Описанная выше формулировка была реализована в программном комплексе Quasar. Продемонстрируем возможности постановки, решая следующую задачу, являющуюся частью комплексной проблемы проектирования магнита. Рассмотрим дипольный магнит, изображенный на рисунке 1.1.

Необходимо определить задержку магнитного поля между полюсами, вызванную вихревыми токами при включении магнита, если после включения ток в обмотках линейно возрастает в течение 100 секунд.

Задачу можно решать в 1/8 части магнита, поскольку магнит имеет три плоскости симметрии. Построим грубую тетраэдральную конечноэлементную сетку. Она состоит из 26260 скалярных и 24348 векторных элементов, что дает 5889 скалярных и 32737 векторных DOF (количеством DOF – degrees of freedom,

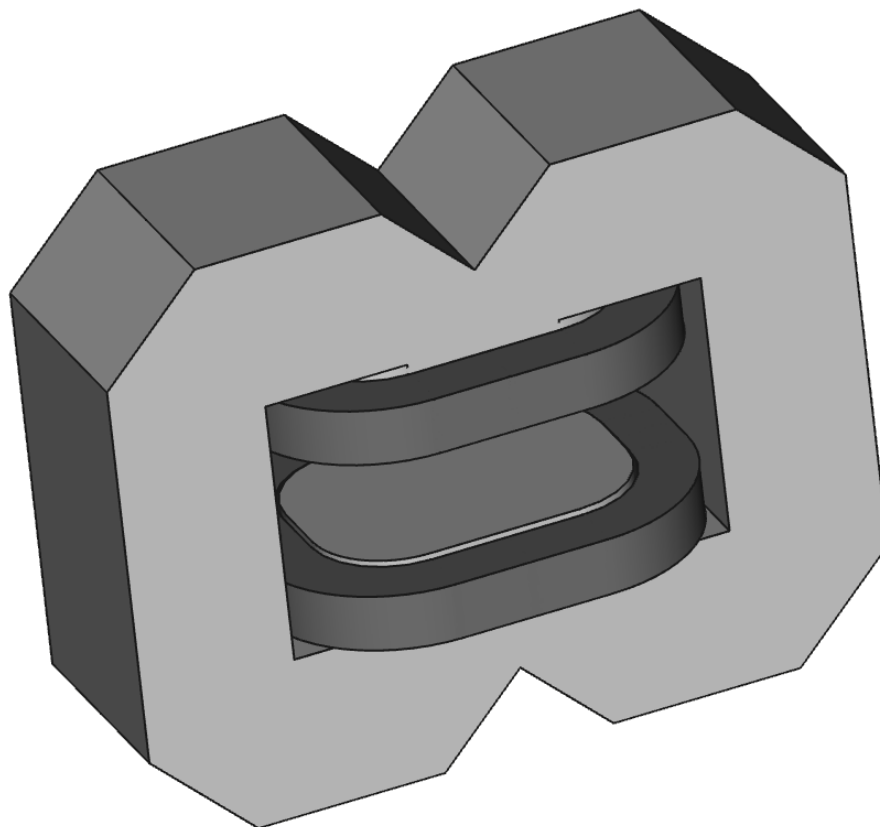


Рисунок 1.1 – Дипольный магнит с обмоткой

степеней свободы – называется количество неизвестных). Грубая сетка на поверхности стали показана на рисунке 1.2.

Распределение вихревых токов в полюсе через 60 секунд после включения тока показано на рисунке 1.3.

Для решения задачи с магнитом, разделенным на две части (один разрез в центре полюса), использовалась та же грубая сетка. В разрезе использовались скалярные векторные элементы, следовательно, количество DOF другое: 30931 скалярных и 19677 векторных элементов (7230 скалярных и 27115 векторных DOF). Распределение вихревых токов в той же части полюса для разрезанного магнита в то же время показано на рисунке 1.4.

На рисунке 1.5 показано значение магнитного поля в центре магнита между полюсами.

Результаты получены при увеличении тока в обмотках до 1А в течение 100 секунд (задача была решена как линейная задача с постоянной магнитной

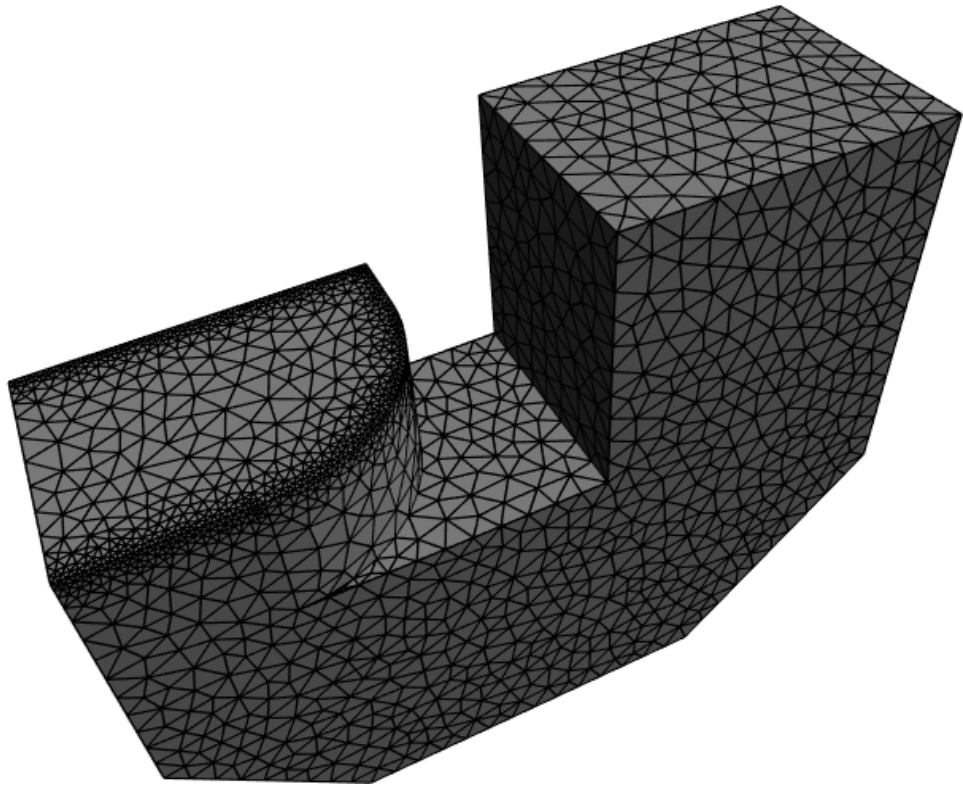


Рисунок 1.2 – Грубая МКЭ сетка

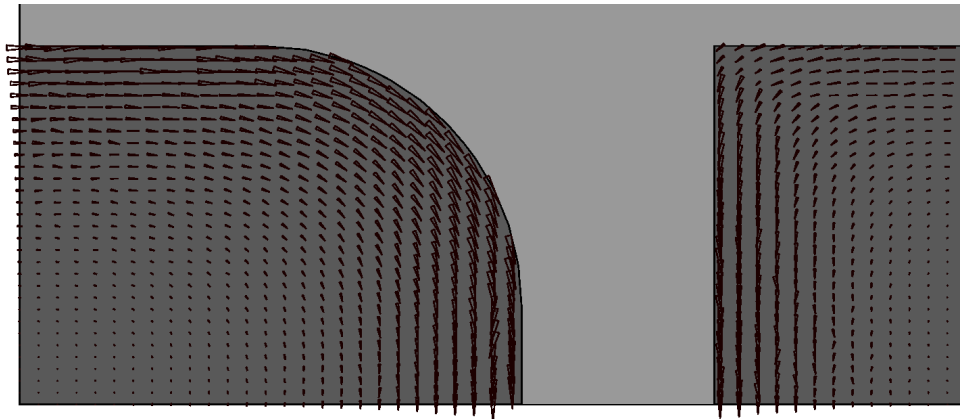


Рисунок 1.3 – Распределение вихревых токов в сечении для цельного магнита

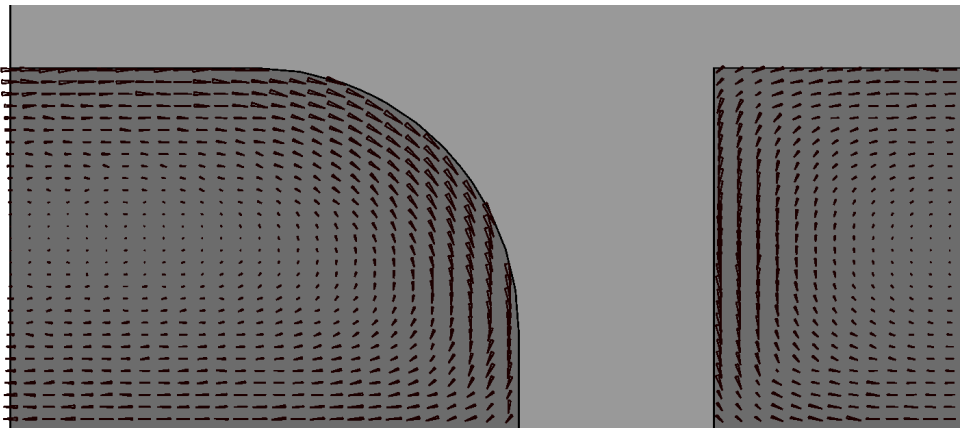


Рисунок 1.4 – Распределение вихревых токов в сечении для разрезанного магнита

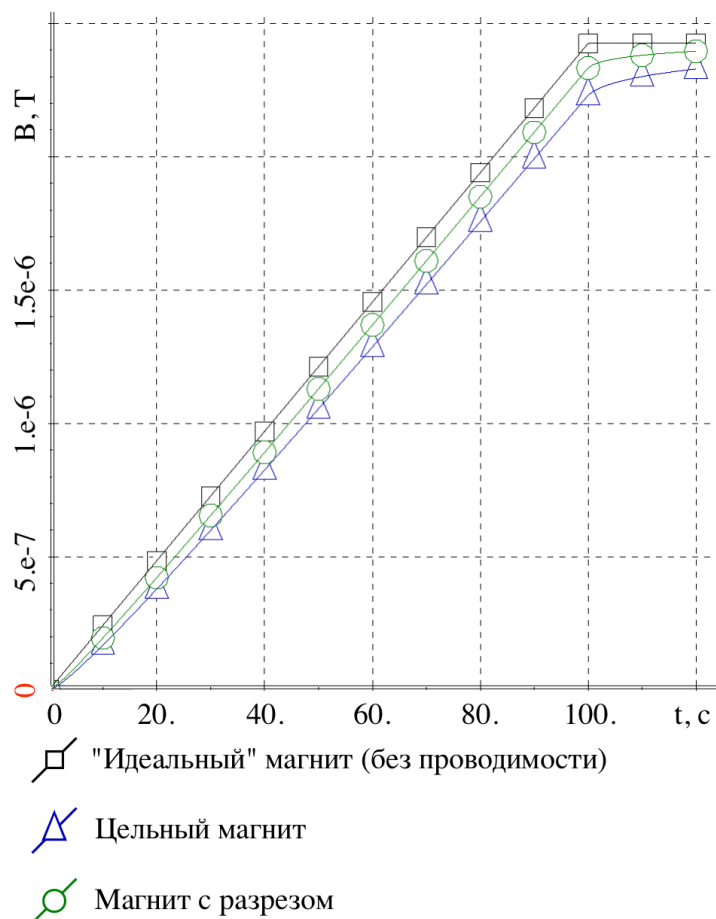


Рисунок 1.5 – Значение магнитного поля в центре между полюсами для различных магнитов

проницаемостью $\mu = 100\mu_0$ и проводимостью $\sigma = 10^7$). Также на рисунок 1.5 добавлена кривая для «идеального» магнита (т.е. магнита без проводимости). Это было сделано для того, чтобы наглядно показать задержку магнитного поля, вызванную вихревыми токами. Кривая для «идеального» магнита получена решением скалярной электромагнитной задачи на той же сетке [73].

Для оценки погрешности численного решения, эта же задача была решена на вложенной (удвоенной) сетке. Эта сетка содержит 210080 скалярных и 194784 векторных элементов (41326 скалярных и 244835 векторных DOF) для цельного магнита. Разность магнитных полей не превышала 1%, что является достаточным для решения данной задачи. Задача решалась на ПК с процессором Intel Core i7-3770K 3.5 ГГц и объемом оперативной памяти 32 Гб. Общее

время решения задачи на грубой сетке составляет 88 секунд, а на подробной сетке – 706 секунд.

Выводы

Реализован подход с совместным использованием полного векторного магнитного потенциала и неполного скалярного магнитного потенциала. Этот подход имеет ряд преимуществ. Во-первых, использование скалярных элементов в непроводящей подобласти (воздухе) позволяет уменьшить число DOF по сравнению с векторными конечными элементами. Во-вторых, токовые обмотки могут быть исключены из сетки, что упрощает ее построение. Подход может быть эффективно использован для оценки влияния вихревых токов в технических устройствах.

2 ПОСТАНОВКА С СОВМЕСТНЫМ ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

2.1 Математическая модель

Воспользуемся математической моделью с векторным и скалярным потенциалами, описанной в главе 1, а именно уравнением для векторного потенциала в области Ω_c (1.7), уравнением для скалярного потенциала в области Ω_0 (1.11) и условиями сопряжения (1.14)-(1.15).

Поскольку скалярный потенциал u в области Ω_0 удовлетворяет (1.11), а значит удовлетворяет уравнению Лапласа, решение в этой области можно аппроксимировать при помощи метода граничных элементов. МГЭ основан на том, что функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа в некоторой области, может быть представлена в виде интеграла по границе этой области [4]. Будем рассматривать трехмерный случай. Тогда потенциал $u(\mathbf{r})$ в области Ω_0 выражается следующим образом:

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Omega_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(\mathbf{r}') - u(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{r}', \quad (2.1)$$

здесь предполагается, что точка $\mathbf{r} \in \Omega_0$.

В работе [4] показано получение системы граничных интегральных уравнений из (2.1). Для простоты запишем ее в операторной форме

$$u = V \frac{\partial u}{\partial n} + (I - K)u, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = K' \frac{\partial u}{\partial n} + Du, \quad (2.3)$$

где V – оператор простого слоя, K – оператор двойного слоя, K' – сопряженный оператор двойного слоя, а D – гиперсингулярный граничный интегральный оператор.

Выражая потоки $\frac{\partial u}{\partial n}$ из уравнения (2.2) и подставляя в уравнение (2.3), получим уравнение, связывающее потоки и значения на границе через симметричный оператор

$$\frac{\partial u}{\partial n} = (D + K'V^{-1}K)u. \quad (2.4)$$

Оператор $D + K'V^{-1}K$ называется оператором Стеклова-Пуанкаре. Используем постановку на его основе. Дадим определения двух пространств следов, необходимых для МГЭ:

$$H^{-1/2}(\partial\Omega_0) = \left\{ w \mid \exists \tilde{w} \in H^1(\Omega_0), \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_0} = w \right\}$$

$$H_0^{1/2}(\partial\Omega_0) = \{ v \mid \exists \tilde{v} \in H_0^1(\Omega_0), \tilde{v}|_{\partial\Omega_0} = v \}$$

Получим вариационный аналог уравнения (2.4). Через t обозначим потоки, выраженные из уравнения (2.2),

$$t = \frac{\partial u}{\partial n},$$

т.е. для t должно выполняться следующее вариационное уравнение

$$(Vt, w)_{\partial\Omega_0} - (Ku, w)_{\partial\Omega_0} = 0, \forall w \in H^{-1/2}(\partial\Omega_0). \quad (2.5)$$

Подставим t в уравнение (2.3) и умножим полученное уравнение на пробную функцию $v \in H_0^{1/2}(\partial\Omega_0)$. Получим

$$(Du, v)_{\partial\Omega_0} + (K't, v)_{\partial\Omega_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}, v \right)_{\partial\Omega_0}. \quad (2.6)$$

В отличие от описанного в главе 1 варианта с аппроксимацией скалярного потенциала конечными элементами, подставим в уравнение (1.22) потоки t из уравнения (2.6). Получим

$$\begin{aligned}
& - \left(\vec{\mathbf{A}}, \operatorname{grad} v \times \vec{\mathbf{n}}_c \right)_{\Gamma_I} + \mu_0 (Du, v)_{\partial\Omega_0} + \mu_0 (K't, v)_{\partial\Omega_0} = \\
& = - \left(\mu_0 \vec{\mathbf{H}}_{ext} \cdot \vec{\mathbf{n}}_c, v \right)_{\Gamma_I}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Дополняя (2.7) уравнениями (1.30) и (2.5), получаем итоговую систему вариационных уравнений. Можно показать, что при выполнении условий, необходимых для эллиптичности системы в случае МКЭ, система с граничными элементами тоже будет эллиптической.

2.2 Дискретизация

Конечноэлементная дискретизация уже была описана в главе 1 в разделе 1.3. Здесь коснемся вопроса граничноэлементной дискретизации. Векторный потенциал будем искать в виде (1.32), так же, как в разделе 1.3. Скалярный же потенциал будем искать в виде

$$\begin{aligned}
u_h &= \sum_j p_j \varphi_j, \\
t_h &= \sum_j r_j \phi_j,
\end{aligned}$$

где φ_j – базисные функции $H_0^{1/2,h}(\partial\Omega_0)$, конечномерного подпространства $H_0^{1/2}(\partial\Omega_0)$, ϕ_j – базисные функции $H^{-1/2,h}(\partial\Omega_0)$, конечномерного подпространства $H^{-1/2}(\partial\Omega_0)$. Из системы вариационных уравнений (1.30), (2.5) и (2.7), получается блочно-кососимметричная система линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} V & -K & 0 \\ K^T & D & -C \\ 0 & C^T & A^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f^s \\ f^v \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

где

$$\begin{aligned} V_{ij} &= \mu_0 (V\phi_j, \phi_i)_{\partial\Omega_0}, \\ K_{ij} &= \mu_0 (K\varphi_j, \phi_i)_{\partial\Omega_0}, \\ D_{ij} &= \mu_0 (D\varphi_j, \varphi_i)_{\partial\Omega_0}, \end{aligned}$$

а остальные обозначения введены в (1.33). С учетом того, что граничноэлементные матрицы являются плотными, систему (1.33) выгодно преобразовать к виду

$$\begin{bmatrix} A^b & -C \\ C^T & A^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^s \\ f^v \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

где $A^b = D + K^T V^{-1} K$ – матрица, аппроксимирующая оператор Стеклова-Пуанкаре.

2.3 Применение

Описанная выше формулировка была реализована в программном комплексе Quasar. Для демонстрации возможности граничноэлементной аппроксимации скалярного потенциала, решим ту же задачу, что и в главе 1, и сравним с решением с использованием только метода конечных элементов. Сетка на поверхности железа была приведена на рисунке 1.2.

При решении этой задачи с совместной аппроксимацией МКЭ+МГЭ на той же самой сетке число граничных элементов 577, скалярных потоковых неизвестных (размерность матрицы V в (2.8)) 577, скалярных базисных функций φ_j (размерность матрицы D в (2.8)) 320. Задача решалась на ПК с процессором Intel Core i7-3770К 3.5 ГГц и объемом оперативной памяти 32 Гб. Общее время решения задачи с аппроксимацией МКЭ на этой сетке составляет 9 секунд, а с совместной аппроксимацией МКЭ+МГЭ – 37 секунд, из них 18 составляет сборка граничноэлементных матриц. На рисунке 2.1 показано распределение вихревых токов в полюсе через 60 секунд после включения тока.

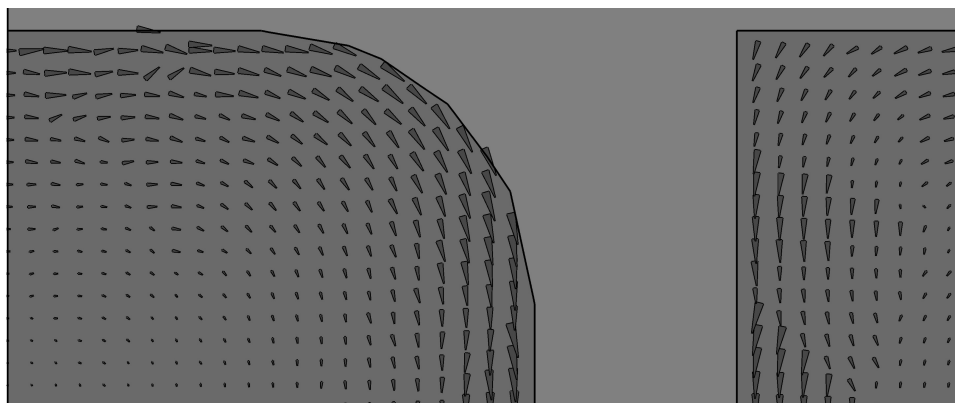


Рисунок 2.1 – Распределение вихревых токов в сечении магнита, полученное на грубой сетке

Построим две вложенные сетки для использованной грубой сетки. Заметим, что для вложенной сетки количество КЭ увеличивается в 8 раз, а ГЭ - в 4. На первой вложенной сетке (будем называть ее средней) для постановки только с МКЭ время решения составило 88 секунд, для совместной постановки МКЭ+МГЭ - 341 секунду (из них сборка матриц составила 198 секунд). На следующей вложенной (будем называть ее подробной) сетке время решения составило 706 секунд для МКЭ и 3725 секунд для МКЭ+МГЭ.

Сравним точность решений, полученных для различных аппроксимаций. Погрешность вычисления поля вдоль кривой, проходящей через центр магнита, на времени 60с, представлена на рисунке 2.2. Здесь за точное решение было принято решение с использованием совместной постановки МКЭ+МГЭ на подробной сетке.

Из графиков, представленных на рисунке 2.2, видно, что решение с совместной постановкой МКЭ+МГЭ заметно точнее, чем решение только МКЭ на одной и той же сетке. Более того, оно практически не уступает по точности решению МКЭ на следующей вложенной сетке. Таким образом, на получение решения с соответствующей точностью при граничноэлементной аппроксимации затрачивается заметно меньшее время, при этом само решение является более гладким.

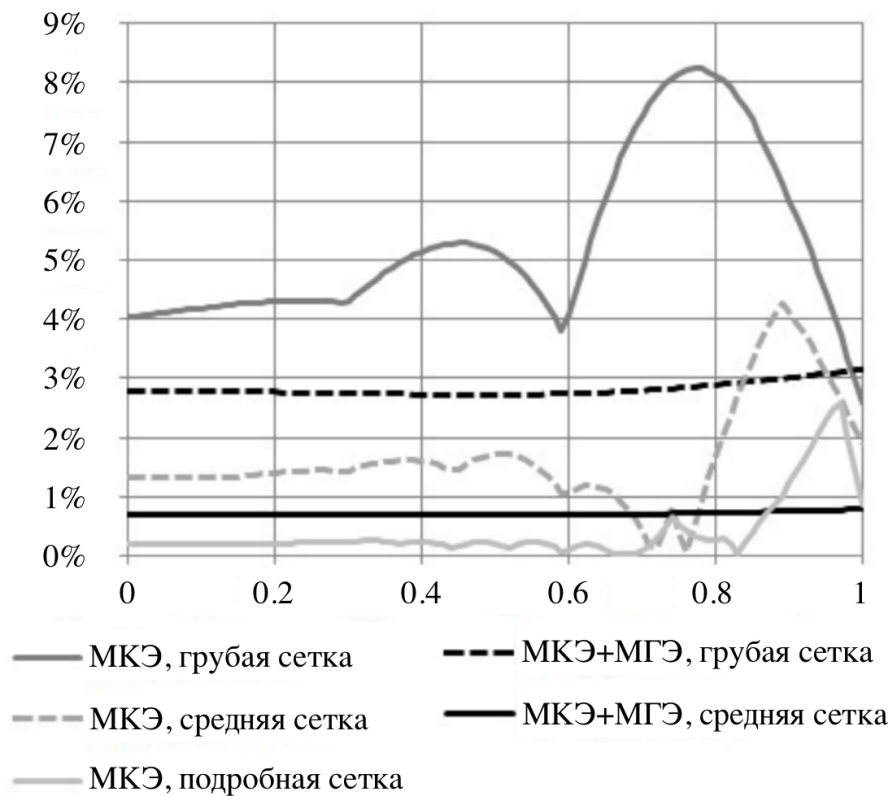


Рисунок 2.2 – Относительная разница решений на вложенных сетках

Выводы

Реализован подход с совместным использованием скалярного магнитного потенциала, аппроксимируемого граничными элементами, и векторного магнитного потенциала, аппроксимируемого векторными конечными элементами. Этот подход имеет следующие преимущества. Во-первых, использование граничных элементов в непроводящей подобласти (воздухе) позволяет уменьшить число неизвестных по сравнению с векторными конечными элементами. Во-вторых, воздушная среда и токовые обмотки могут быть исключены из сетки. Этот подход может быть эффективно использован для оценки влияния вихревых токов в технических устройствах.

3 УЧЕТ ГИСТЕРЕЗИСА ПРИ РАСЧЕТЕ ПОЛЯ В ЭЛЕМЕНТАХ МАГНИТНЫХ СИСТЕМ УСКОРИТЕЛЕЙ

Одной из важнейших нерешенных проблем высокоточных расчетов магнитных полей при трехмерном моделировании фрагментов ускорителей заряженных частиц является проблема учета остаточной намагниченности при изменении возбуждающих магнитное поле токов. Применяемый в большинстве существующих программных комплексов подход, основанный на использовании зависимости магнитной проницаемости среды от поля (рассчитанной по главной кривой намагничивания), никак не учитывает гистерезис, что часто приводит к расхождению рассчитанных характеристик магнита с экспериментальными. Данная глава посвящена разработке эффективных методов численного моделирования магнитных полей в магнитах с ферромагнитным магнитопроводом, позволяющих учитывать остаточную намагниченность ферромагнетиков при изменении возбуждающих поле токов. Эта задача особенно важна для магнитов циклических ускорителей заряженных частиц (например, синхротронов, где частицы низкой энергии инжектируются в магнитную систему с малым полем, а затем при ускорении поле растет в несколько раз) с жесткими допусками на пространственную зависимость поля. Следует отметить, что, так как в интересующих нас случаях вклад гистерезиса в величину поля в рабочей области электромагнитов относительно мал, точность аппроксимации реальных зависимостей индукции поля от его напряженности может быть невелика.

3.1 Модель гистерезиса Н.А. Винокурова

Как известно (см., например, [74, 75]), изменение намагниченности \mathbf{M} магнитомягкого ферромагнетика (например, железа) связано с движением доменных границ, а гистерезис — с эффективным трением покоя в уравнениях движения границ. В простейшем случае 180-градусных доменных границ и напряженности \mathbf{H} , наклоненной под углом $\pi/2 - \theta$ к нормали границы, эти уравнения можно записать в виде

$$d\mathbf{M} = \chi(\mathbf{M}) \vartheta [|\mathbf{H} \cos \theta - \mathbf{H}_{eff}(\mathbf{M})| - \mathbf{H}_c] \cos \theta d\mathbf{H}, \quad (3.1)$$

где $\chi = (d\mathbf{H}_{eff}/d\mathbf{M})^{-1}$ — дифференциальная магнитная восприимчивость домена, функция $\mathbf{H}_{eff}(\mathbf{M})$ характеризует упругость, \mathbf{H}_c — трение, а ϑ — ступенчатая функция Хевисайда.

В простейшем случае, когда $\chi = \chi_0 \vartheta (\mathbf{M}_{max} - |\mathbf{M}|)$, решения дифференциального уравнения (3.1) изображаются отрезками прямых с наклонами χ_0 и 0 на плоскости $(\mathbf{H} \cos \theta, \mathbf{M})$. Например, на рисунке 3.1 показаны предельный цикл гистерезиса и главная кривая намагничивания.

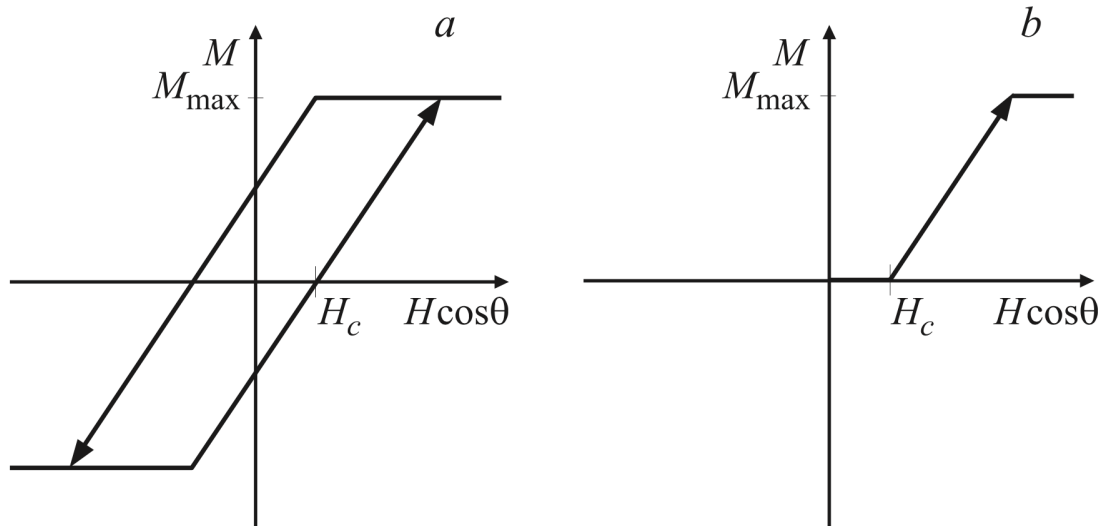


Рисунок 3.1 – Предельный цикл (а) и главная кривая намагничивания (б) в простейшей модели гистерезиса

В более общем случае, когда зависимость $\chi(\mathbf{M})$ имеет колоколообразный вид, выбор в качестве переменной величины $\mathbf{H}_{eff}(\mathbf{M})$ также "линеаризует" дифференциальное уравнение (3.1)

$$d\mathbf{H}_{eff} = \vartheta [|\mathbf{H} \cos \theta - \mathbf{H}_{eff}| - \mathbf{H}_c] \cos \theta d\mathbf{H}. \quad (3.2)$$

Решения дифференциального уравнения (3.2) изображаются отрезками прямых с наклонами 1 и 0 на плоскости $(\mathbf{H} \cos \theta, \mathbf{H}_{eff})$. Легко проверить, что решения уравнений (3.1) и (3.2) удовлетворяют правилам Маделунга [76].

Для однородного и анизотропного (в среднем) материала следует усреднить намагниченность по различным параметрам доменов, учитывая, что каждому набору параметров соответствует свое значение намагниченности. В частности, усреднение по углам θ дает

$$\langle \mathbf{M} \rangle = \int_0^{\pi/2} \mathbf{M}(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta. \quad (3.3)$$

Для численных расчетов можно аппроксимировать интеграл (3.3) методом трапеций. Например, при разбиении интервала интегрирования на три полум

$$\langle \mathbf{M} \rangle \approx \frac{\pi}{8\sqrt{3}} \left[\mathbf{M}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathbf{M}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]. \quad (3.4)$$

Для проверки точности аппроксимаций петель гистерезиса сотрудниками ИЯФ им. Будкера были проведены стандартные магнитные измерения при помощи трансформатора с кольцевым сердечником из исследуемой стали [77]. Чтобы усилить гистерезисные явления, сердечник был изготовлен из конструкционной стали 3 с относительно высоким содержанием углерода. На первичную обмотку подавался ток с пилообразной временной зависимостью и периодом 40с. Напряжение на вторичной обмотке измерялось цифровым вольтметром. Из измеренных зависимостей тока и напряжения находилась зависимость ин-

дукции \mathbf{B} от напряженности \mathbf{H} . На рисунке 3.2 показана зависимость $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ при симметричном изменении напряженности. В исходном состоянии кольцо было размагничено.

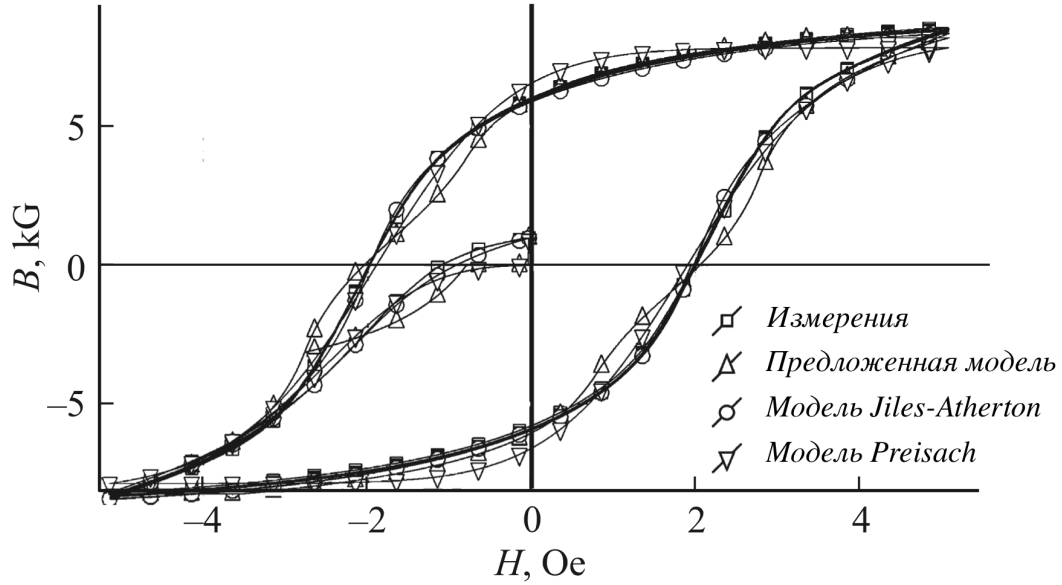


Рисунок 3.2 – Зависимость индукции \mathbf{B} от напряженности \mathbf{H} при симметричном изменении напряженности от размагниченного состояния

Для аппроксимации измеренных зависимостей использовалась модель с двумя намагниченностями (3.4)

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}, \\ \mathbf{M} &= \frac{1}{2}\mathbf{M}_1(\mathbf{H}_{eff1}) + \frac{1}{2}\mathbf{M}_2(\mathbf{H}_{eff2}), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где \mathbf{H}_{eff1} и \mathbf{H}_{eff2} находились из уравнения (3.2) с $\theta_1 = \pi/6$, $\theta_2 = \pi/3$, $\mathbf{H}_{c1} = 2.4\text{Oe}$, $\mathbf{H}_{c2} = 0.4\text{Oe}$. Для простоты функции \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 были взяты одинаковыми

$$\mathbf{M}(\mathbf{H}_{eff}) = \mathbf{M}_{max} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\chi_0 |\mathbf{H}_{eff}| / \mathbf{M}_{max}}} \right) \text{sgn}(\mathbf{H}_{eff}),$$

где $\mathbf{M}_{max} = 1120\text{G}$ и $\chi_0 = 1280$. При этом параметры модели (\mathbf{H}_{c1} , \mathbf{H}_{c2} , \mathbf{M}_{max} и χ_0) были подобраны по кривой с симметричным изменением напряженности, показанной на рисунке 3.2.

Сравним аппроксимацию предлагаемой модели с аппроксимацией по другим моделям. В достаточно известной модели Jiles-Atherton [24] намагниченность \mathbf{M} определяется уравнением

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}_{eff}} = c \frac{d\mathbf{M}_{an}}{d\mathbf{H}_{eff}} + \frac{\mathbf{M}_{an} - \mathbf{M}}{k\delta},$$

где безгистерезисная намагниченность \mathbf{M}_{an} и эффективное поле \mathbf{H}_{eff} определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{an} &= \mathbf{M}_{max} \left(\coth \left(\frac{\mathbf{H}_{eff}}{a} \right) - \frac{a}{\mathbf{H}_{eff}} \right), \\ \mathbf{H}_{eff} &= \mathbf{H} + \alpha \mathbf{M}, \\ \delta &= \begin{cases} 1, & d\mathbf{H} > 0, \\ -1, & d\mathbf{H} < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Параметры модели Jiles-Atherton $\mathbf{M}_{max} = 1948$, $\alpha = 0.0377$, $a = 25.3$, $k = 7.12$ и $c = 0.715$ были подобраны также по кривой с симметричным изменением напряженности.

Также широко известно семейство моделей Preisach в различных модификациях. В этих моделях индукция определяется не уравнением (3.5), а уравнением

$$\mathbf{B}(t) = \iint_T \mu(h_1, h_2) \gamma(h_1, h_2, \mathbf{H}(t)) dh_1 dh_2,$$

где $\mu(h_1, h_2)$ — некоторая функция распределения (способом определения которой отличаются модификации модели),

$$\gamma(h_1, h_2, \mathbf{H}(t_k)) = \begin{cases} -1, & \text{если } \mathbf{H}(t_k) \leq h_1, \\ +1, & \text{если } \mathbf{H}(t_k) \geq h_2, \\ \gamma(h_1, h_2, \mathbf{H}(t_{k-1})), & \text{если } h_1 \leq \mathbf{H}(t_k) \leq h_2, \end{cases}$$

а область интегрирования T — так называемый треугольник Preisach с вершинами $(-\mathbf{H}_s, -\mathbf{H}_s)$, $(\mathbf{H}_s, \mathbf{H}_s)$ и $(-\mathbf{H}_s, \mathbf{H}_s)$. Заметим, что для моделирования магнитных полей с использованием сеточных методов эта модель менее удобна, чем обе рассмотренные ранее модели, поскольку требует хранения более длинной предыстории намагничивания для вычисления $\gamma(h_1, h_2, \mathbf{H}(t_k))$. Кроме того, процедура определения параметров функции $\mu(h_1, h_2)$ для различных модификаций модели может быть достаточно трудоемкой. Для сравнения с предлагаемой моделью была выбрана модификация, предложенная в [78], с небольшим числом подбираемых параметров: $\mu(h_1, h_2) = \varphi(-h_1)\varphi(h_2)$, где $\varphi(x) = ae^{-bx} / (1 + ce^{-bx})^2$. Параметры модели $a = 101.4$, $b = 0.0144$, $c = 8.467$ были подобраны также по кривой с симметричным изменением напряженности.

На рисунке 3.2 приводится сравнение экспериментальной кривой $\mathbf{V}(\mathbf{H})$, полученной при симметричном изменении напряженности от размагниченного состояния, с результатами аппроксимации этой кривой по трем моделям. Параметры моделей подбирались именно под эту экспериментальную кривую, поэтому все аппроксимации достаточно точны.

Рассмотрим теперь поведение аппроксимирующих моделей с уже подобранными по первой петле параметрами на других петлях. Большой практический интерес представляют несимметричные петли (рисунке 3.3), получаемые при однополярном питании электромагнита.

Следует отметить, что в большинстве электромагнитов с железным ярмом отношение длины силовой линии магнитного поля в ярме к рабочему зазору много меньше магнитной проницаемости ярма (т.н. размагничивающий фактор много больше единицы). В этом случае при нулевом токе в обмотке возбуждения в нуль (приблизенно) обращается индукция \mathbf{V} , а не напряженность \mathbf{H} , как это происходит в кольце (где размагничивающий фактор равен нулю). Поэтому для электромагнитов с однополярным питанием типичной является гистерезисная петля, показанная на рисунке 3.3b. Эта зависимость получена на том же стальном кольце при изменении тока от небольшого отрицательного значения,

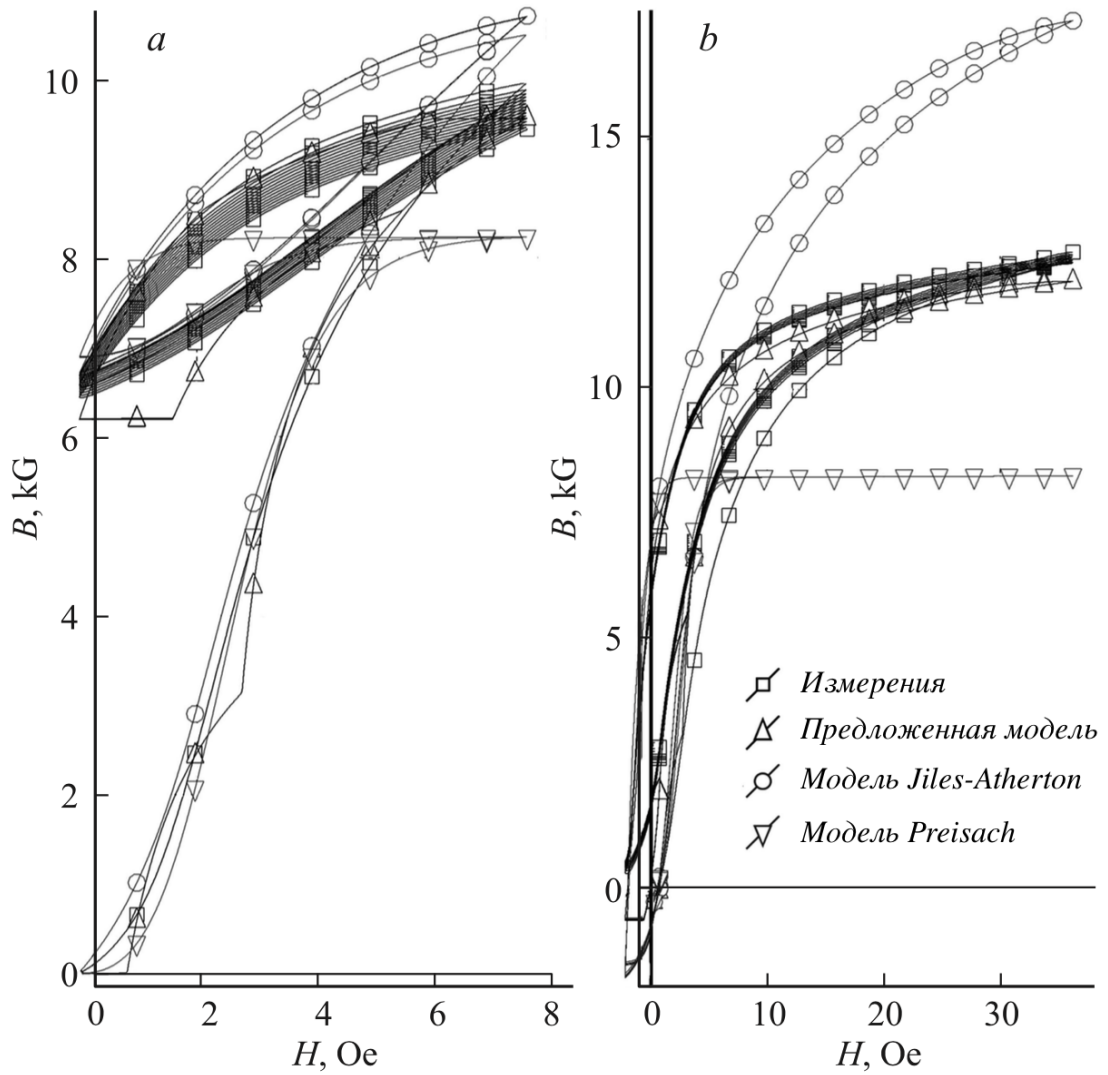


Рисунок 3.3 – Зависимости индукции \mathbf{B} от напряженности \mathbf{H} для несимметричных петель с $\mathbf{H}_{min} = 0$ (a) и $\mathbf{B}_{min} \approx 0$ (b).

при котором индукция приблизительно равна нулю, до некоторой положительной величины.

Полученные результаты показывают, что, несмотря на простоту, предложенная модель с параметрами, подобранными по симметричной петле гистерезиса, удовлетворительно аппроксимирует другие петли. Этим она выгодно отличается например, от модели Jiles-Atherton, что позволяет предположить эффективность использования предлагаемой модели для численных расчетов поля в рабочих зазорах электромагнитов. Однако это предположение нуждается в дальнейшей проверке.

3.2 Применение новой модели остаточной намагниченности железа для расчета поворотного магнита ускорителя

В большинстве существующих программных комплексов для расчетов магнитных полей фрагментов ускорителей используется подход, основанный на использовании зависимости магнитной проницаемости среды от поля (рассчитанной по главной кривой намагничивания). Математическая модель в этом случае базируется на уравнениях Максвелла (1.1)-(1.4), которые для стационарного случая принимают вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (3.7)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{B} = \mu(H)\mathbf{H}. \quad (3.9)$$

Этот подход никак не учитывает гистерезис, что часто приводит к расхождению рассчитанных характеристик магнита с экспериментальными. Поэтому вместо уравнения (3.9) мы будем использовать более общее уравнение

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (3.10)$$

где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума, \mathbf{M} – намагниченность среды, которая может зависеть от напряженности поля, времени и предыстории намагниченности. Заметим, что математическая модель в виде системы уравнений (3.7), (3.8) и (3.10) может быть использована при изменяющихся во времени сторонних токах в (3.7) только в том случае, когда токи смещения и токи проводимости пренебрежимо малы, что обычно справедливо для ускорительных магнитов, поскольку изменения тока в них производятся относительно медленно.

3.2.1 Математическая модель и вариационная постановка

Будем считать, что вся область моделирования состоит из двух подобластей: подобласти Ω_H , в которой отсутствуют сторонние токи и содержатся все

магнитные материалы, и подобласти Ω_A , в которой нет магнитных материалов и есть сторонние токи. Используем математическую модель на основе полного и неполного скалярного потенциала [79].

Подобласть с магнитными материалами

Представим напряженность поля \mathbf{H} в подобласти Ω_H в виде градиента полного потенциала:

$$\mathbf{H} = -\text{grad } u. \quad (3.11)$$

Поскольку в этой подобласти отсутствуют сторонние токи, представление (3.11) обеспечивает выполнение уравнения (3.7), а уравнение (3.10) принимает вид

$$\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} = -\text{grad } u + \mathbf{M}.$$

Тогда из уравнения (3.8) получаем единственное уравнение для нахождения полного скалярного потенциала u в подобласти Ω_H

$$-\text{div grad } u = -\text{div } \mathbf{M}. \quad (3.12)$$

Построим для модели (3.12) вариационную постановку. Для этого домножим обе части уравнения на пробную функцию v из пространства \mathcal{H}^1

$$-\int_{\Omega_H} \text{div grad } u v \, d\Omega = -\int_{\Omega_H} \text{div } \mathbf{M} v \, d\Omega \quad \forall v \in \mathcal{H}^1,$$

откуда, интегрируя по частям, получим

$$\int_{\Omega_H} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, d\Omega = \int_{\Omega_H} \mathbf{M} \cdot \text{grad } v \, d\Omega - \oint_{\partial\Omega_H} (-\text{grad } u + \mathbf{M}) v \cdot \vec{n} \, d\Gamma, \quad (3.13)$$

или, учитывая представление (3.10),

$$-\frac{1}{\mu_0} \oint_{\partial\Omega_H} \mathbf{B} \cdot \vec{n} v \, d\Gamma = \int_{\Omega_H} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, d\Omega - \int_{\Omega_H} \mathbf{M} \cdot \text{grad } v \, d\Omega. \quad (3.14)$$

Подобласть без магнитных материалов

Будем искать \mathbf{H} в подобласти Ω_A в виде $-\text{grad } u + \mathbf{H}_{ext}$, где u – неполный потенциал и \mathbf{H}_{ext} – поле токов в однородном пространстве, т.е. удовлетворяющее уравнениям (3.7) и $\text{grad} \cdot \mathbf{H}_{ext} = 0$. Тогда из представления индукции магнитного поля $\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} = -\text{grad } u + \mathbf{H}_{ext}$ получаем единственное уравнение для нахождения неполного потенциала u в подобласти Ω_A :

$$-\text{div grad } u = 0. \quad (3.15)$$

Построим вариационную постановку для модели (3.15). Для этого домножим обе части уравнения на пробную функцию v из пространства \mathcal{H}^1 :

$$-\int_{\Omega_A} \text{div grad } u v \, d\Omega = 0 \quad \forall v \in \mathcal{H}^1,$$

откуда, интегрируя по частям, получим

$$\int_{\Omega_A} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, d\Omega = \oint_{\partial\Omega_A} \text{grad } u v \cdot \vec{n} \, d\Gamma, \quad (3.16)$$

или, учитывая представление индукции,

$$-\frac{1}{\mu_0} \oint_{\partial\Omega_A} \mathbf{B} \cdot \vec{n} v \, d\Gamma = \int_{\Omega_A} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, d\Omega - \oint_{\partial\Omega_A} \mathbf{H}_{ext} \cdot \vec{n} v \, d\Gamma. \quad (3.17)$$

Вариационная постановка с полным и неполным скалярным потенциалом

Для того, чтобы потенциал u описывал магнитное поле во всем пространстве, на границе между подобластями необходимо потребовать непрерывности нормальной компоненты вектора \mathbf{B} и касательной компоненты вектора \mathbf{H} . Первое условие обеспечивается, если сложить уравнения (3.14) и (3.17) и учесть, что подынтегральные выражения их левых частей отличаются на границе подобластей только знаком нормали:

$$\int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, d\Omega = \int_{\Omega_H} \mathbf{M} \cdot \text{grad } v \, d\Omega + \oint_{\partial\Omega_A} \mathbf{H}_{ext} \cdot \vec{n} v \, d\Gamma. \quad (3.18)$$

Для выполнения второго условия потенциал u должен быть полным в подобласти Ω_H и неполным в подобласти Ω_A , то есть функция u должна иметь разрыв на границе между подобластями, и касательная компонента градиента этого разрыва должна быть равна касательной компоненте вектора \mathbf{H}_{ext} . Это можно обеспечить специальным выбором базисных функций для представления u .

3.2.2 Конечноэлементная дискретизация

Для построения конечноэлементной дискретизации представим потенциал u в виде разложения по базису $u = \sum_j q_j \varphi_j$, и выберем пробные функции из того же конечномерного пространства. Тогда для пробной функции φ_i уравнение (3.18) примет вид

$$\sum_j q_j \int_{\Omega} \text{grad } \varphi_i \cdot \text{grad } \varphi_j \, d\Omega = \int_{\Omega_H} \mathbf{M} \cdot \text{grad } \varphi_i \, d\Omega + \oint_{\partial\Omega_A} \mathbf{H}_{ext} \cdot \vec{n} \varphi_i \, d\Gamma. \quad (3.19)$$

Будем считать, что на каждом конечном элементе Ω_k намагниченность \mathbf{M}^{Ω_k} постоянна и зависит от среднего на элементе значения напряженности. Введем обозначения

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \text{grad } \varphi_i \cdot \text{grad } \varphi_j \, d\Omega, \quad \vec{B}_i^k = \int_{\Omega_k} \text{grad } \varphi_i \, d\Omega, \quad f_i = \oint_{\partial\Omega_A} \mathbf{H}_{ext} \cdot \vec{n} \varphi_i \, d\Gamma,$$

тогда

$$\int_{\Omega_H} \mathbf{M} \cdot \text{grad } \varphi_i \, d\Omega \approx \sum_k \mathbf{M}^{\Omega_k} (\mathbf{H}^k) \cdot \vec{B}_i^k, \quad (3.20)$$

где

$$\mathbf{H}^k = -\frac{1}{|\Omega_k|} \sum_i q_i \vec{B}_i^k, \quad (3.21)$$

а систему уравнений (3.19) можно записать в матричном виде

$$\mathbf{A} \mathbf{q} = \mathbf{f} + \sum_k \mathbf{F}^{\Omega_k}(\mathbf{q}), \quad (3.22)$$

где матрица \mathbf{A} состоит из компонент A_{ij} , вектор \mathbf{q} из компонент q_i , вектор \mathbf{f} из компонент f_i , а вектор \mathbf{F}^{Ω_k} из компонент

$$F_i^{\Omega_k}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}^{\Omega_k}(\mathbf{H}) \cdot \vec{B}_i^k. \quad (3.23)$$

Обратим внимание, что система уравнений (3.22) является нелинейной. Поскольку её решение методом простой итерации, как показали вычислительные эксперименты, оказывается чрезвычайно неэффективным, построим итерационный процесс с линеаризацией этой системы в окрестности некоторого начального решения \mathbf{q}^0 :

$$F_i^{\Omega_k}(\mathbf{q}) = F_i^{\Omega_k}(\mathbf{q}^0) + \sum_j \frac{\partial F_i^{\Omega_k}}{\partial q_j} (q_j - q_j^0),$$

где, учитывая (3.23),

$$\frac{\partial F_i^{\Omega_k}}{\partial q_j} = \sum_{l=1}^3 B_{il}^k \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \mathbf{M}_l^{\Omega_k}}{\partial \mathbf{H}_m} \frac{\partial \mathbf{H}_m}{\partial q_j} = -\frac{1}{|\Omega_k|} \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \mathbf{M}_l^{\Omega_k}}{\partial \mathbf{H}_m} B_{il}^k B_{jm}^k. \quad (3.24)$$

Выражение (3.24) фактически определяет вклады в матрицу и правую часть от конечного элемента для метода Ньютона (см. [79]).

3.2.3 Использование макромоделли гистерезиса в дискретной конечноэлементной модели

Используем для описания зависимости $\mathbf{M}^{\Omega_k}(\mathbf{H})$ на конечном элементе одну из скалярных макромоделей вида $M(H)$, рассмотренных в [33]. Для перехода от скалярной модели к изотропной векторной можно использовать усреднение по направлениям [21], т.е.

$$\mathbf{M}(\mathbf{H}) = \frac{3}{4\pi} \int_S \vec{r} M(\mathbf{H} \cdot \vec{r}) ds, \quad (3.25)$$

где S – сфера единичного радиуса. Вычислим интеграл в (3.25) численно. Обозначим через N число точек используемой квадратуры, через \vec{r}_n сами точки, а через w_n – соответствующие им веса, с учетом коэффициента нормировки. Тогда векторная макро модель будет иметь вид

$$\mathbf{M}(\mathbf{H}) \approx \sum_{n=1}^N w_n \vec{r}_n M(\mathbf{H} \cdot \vec{r}_n), \quad (3.26)$$

и вместо (3.23) получим

$$F_i^{\Omega_k}(q) = \sum_{n=1}^N w_n M(\mathbf{H} \cdot \vec{r}_n) \left(\vec{B}_i^k \cdot \vec{r}_n \right). \quad (3.27)$$

Обозначим через $\vec{r}_{n,l}$ компоненту l вектора \vec{r}_n . Тогда производную компоненты вектора намагниченности по компоненте вектора напряженности можно вычислить по формуле

$$\frac{\partial \mathbf{M}_l}{\partial \mathbf{H}_m} = \sum_{n=1}^N w_n \vec{r}_{n,l} \vec{r}_{n,m} M'(\mathbf{H} \cdot \vec{r}_n).$$

Подставив полученное выражение в (3.24), получим

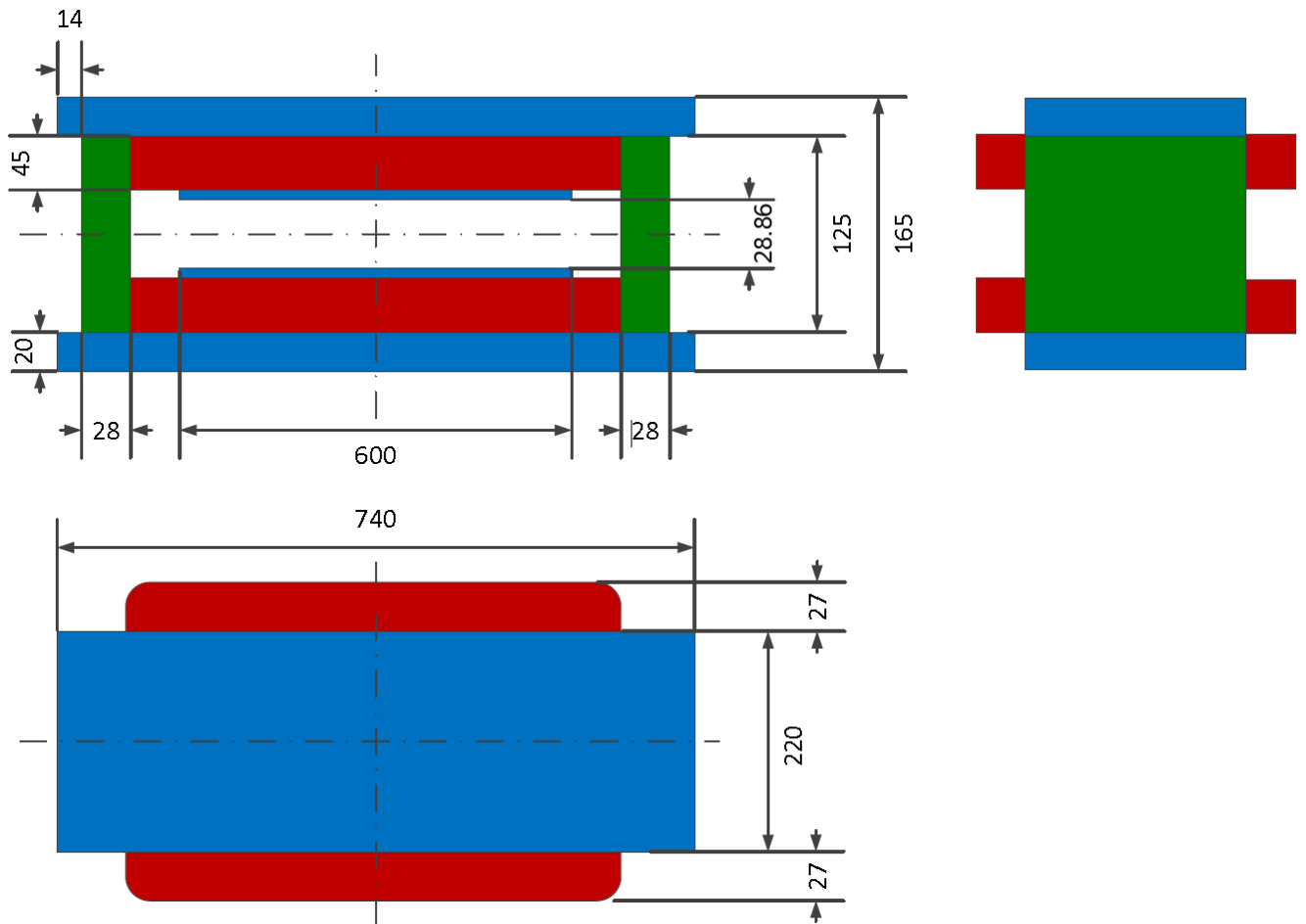
$$\frac{\partial F_i^{\Omega_k}}{\partial q_j} = -\frac{1}{|\Omega_k|} \sum_{n=1}^N w_n M'(\mathbf{H} \cdot \vec{r}_n) \left(\vec{B}_i^k \cdot \vec{r}_n \right) \left(\vec{B}_j^k \cdot \vec{r}_n \right). \quad (3.28)$$

Таким образом, реализация учета гистерезиса требует хранения на каждом конечном элементе N комплектов параметров истории макромодели гистерезиса, т.е., например, для модели Н.А.Винокурова, описанной в разделе 3.1, – $2N$ вещественных чисел.

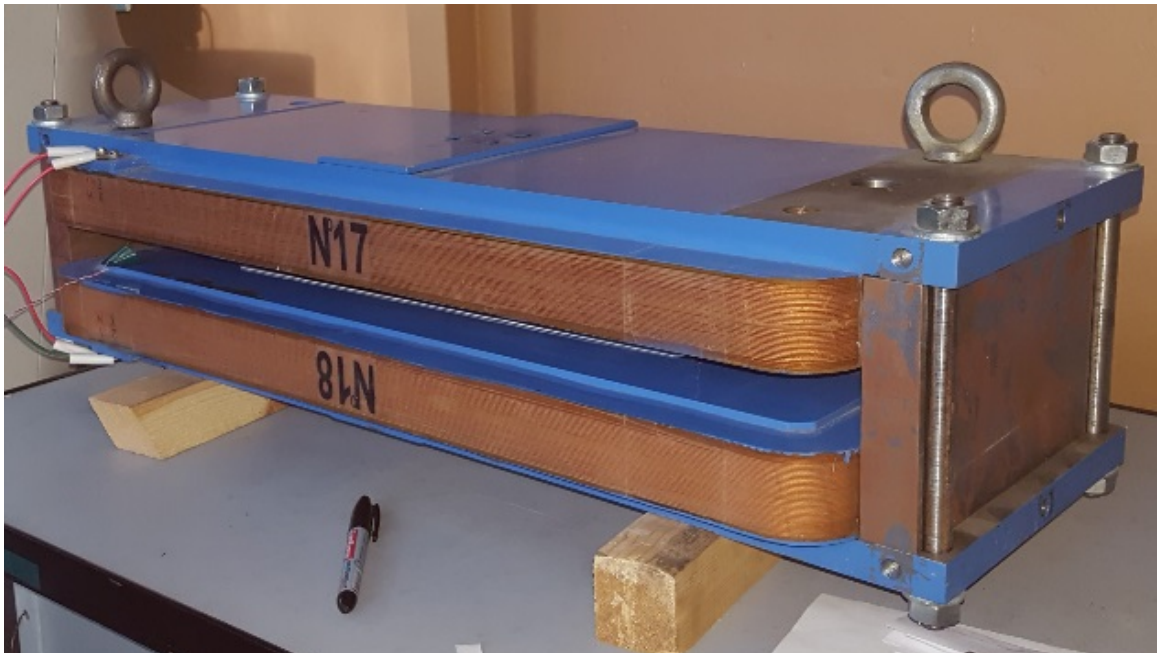
3.2.4 Применение

Для проверки точности нового алгоритма, учитывающего остаточную намагниченность, сотрудниками ИЯФ были проведены магнитные измерения поля в зазоре типичного поворотного магнита (см. рисунок 3.4) при циклическом изменении тока в обмотке. Чтобы усилить гистерезисные явления, боковые стенки О-образного магнитопровода были изготовлены из конструкционной стали 3 с относительно высоким содержанием углерода. Именно для этой стали изучались модели гистерезиса в работе [33].

На обмотку подавался ток с пилообразной временной зависимостью. Все измерения проводились из предварительно размагниченого состояния при симметричном (биполярном) и несимметричном (униполярном) изменении то-



а. Схема магнита



б. Фотография магнита

Рисунок 3.4 – Поворотный магнит

ка I в обмотке. Измерения датчиком Холла проводились в двух точках, первая в центре магнита, а вторая сдвинута на 25см вдоль длинной стороны полюса.

Для численного моделирования была задана восьмая часть магнита и построена сетка, изображенная на рисунке 3.5.

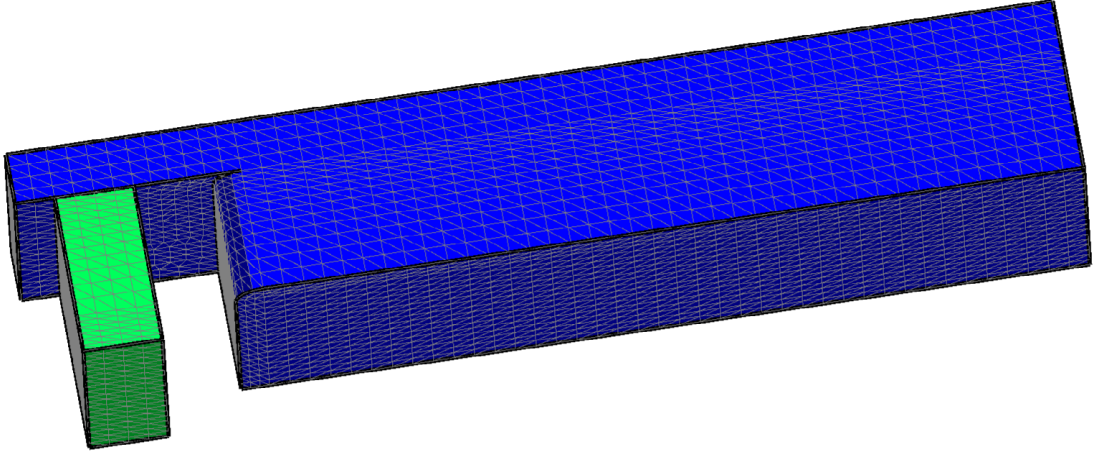


Рисунок 3.5 – Сетка на поверхности стали

В численном моделировании была использована следующая скалярная модель гистерезиса [33]:

$$M(H) = \chi \cdot H + \frac{1}{2} (M(H_{eff1}) + M(H_{eff2})), \quad (3.29)$$

где

$$M(H_{effi}) = M_{\max} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\chi_0 |H_{effi}|/M_{\max}}} \right) \text{sgn}(H_{effi}), \quad (3.30)$$

H_{effi} находится как решение дифференциального уравнения

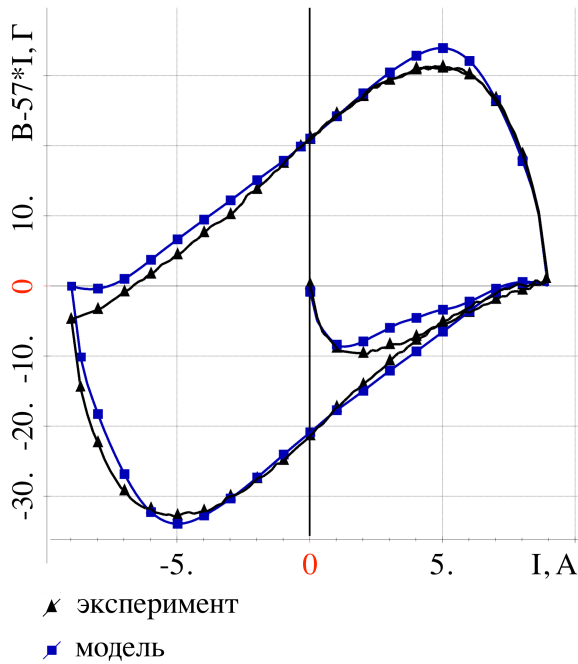
$$dH_{effi} = \vartheta [|H \cos \theta_i - H_{effi}| - H_{c_i}] \cos \theta_i dH, \quad (3.31)$$

ϑ – ступенчатая функция Хевисайда, $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{3}$. Отличия от описанной в работе [33] модели состоят только в том, что в формуле (3.29) присутствует дополнительное слагаемое $\chi \cdot H$. Для стали 3 параметры векторной модели были подобраны по экспериментальным данным, приведенным в работе [33]: $M_{\max} = 793 \text{ Гс}$, $\chi = 0$, $\chi_0 = 1295$, $H_{c_1} = 1.43 \text{ Э}$ и $H_{c_2} = 0.39 \text{ Э}$.

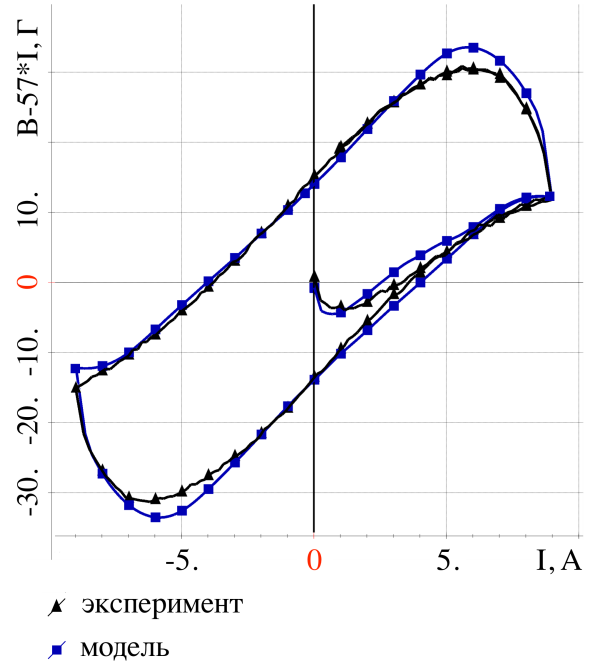
Полнос магнитопровода изготовлен из малоуглеродистой стали, по химическому составу и магнитным свойствам близкой к чистому железу. Однако численное моделирование было осложнено тем, что образцов этой стали не осталось, и поэтому определять параметры модели гистерезиса для расчета пришлось по трехмерному моделированию. Для подбора параметров модели был выбрано симметричное изменение тока. Таким образом были получены параметры для этой стали $M_{\max} = 472\text{Гс}$, $\chi = 397$, $\chi_0 = 4802$, $H_{c1} = 1.48\text{Э}$ и $H_{c2} = 0.23\text{Э}$.

Результаты моделирования вместе с данными экспериментов представлены на рисунке 3.6. Для того, чтобы отличия эксперимента от модели были видны, на рисунках показаны графики функции $B(I) - 57 \cdot I$. Измерения и результаты представлены в двух точках, первая находится в центре полюса (рисунок 3.6а,с), вторая в 25см от центра (рисунок 3.6б,д). Измерения и расчеты проводились при двух способах изменения тока, симметричном, когда ток менялся циклически от -8А до $+8\text{А}$ (рисунок 3.6а,б), и несимметричном, когда ток менялся циклически от 0 до 8А (рисунок 3.6с,д).

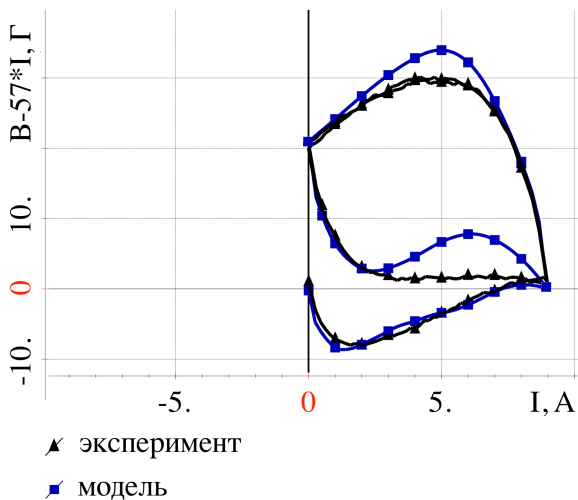
Из представленных результатов видно, что симметричный цикл, по которому подбирались параметры модели, описывается несколько точнее, но и для несимметричного цикла отличия моделирования от эксперимента не превышают 5-6 Гауссов. Заметим, что частично эти отличия могут объясняться вихревыми токами, которые не учитываются в описанной в данной статье модели. Моделирование вихревых токов, проведенное с использованием не учитывающего гистерезис подхода, описанного в [80], показало, что вихревые токи дают вклад более двух Гауссов, что подтверждается и экспериментально, использованием другой скорости подъема тока. Остальные отличия могут объясняться как недостаточно хорошо подобранными параметрами модели гистерезиса, так и неполным размагничиванием перед началом циклов. Дело в том, что в исходном состоянии магнит был размагничен, но не полностью, так как амплитуда тока была ограничена, что не позволяло достигнуть достаточно больших



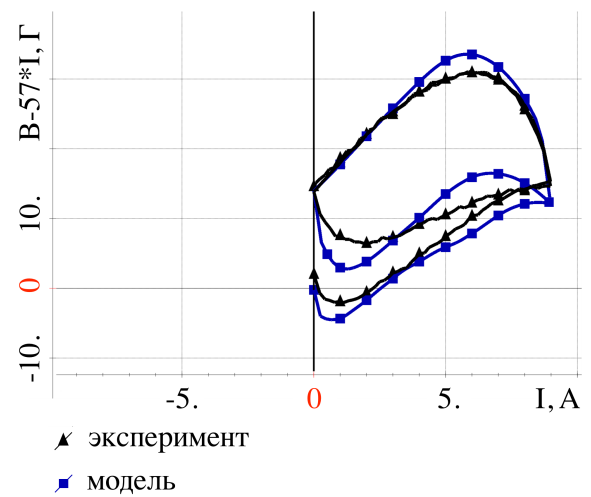
а. центр полюса



б. 25см. от центра



с. центр полюса



д. 25см. от центра

Рисунок 3.6 – Измеренные (треугольники) и рассчитанные (квадраты) зависимости индукции B в двух точках (а и с – в центре, б и д – на краю) зазора электромагнита от тока I в его катушках. Для того, чтобы более подробно показать петлю гистерезиса, по оси ординат отложено поле с вычтенной линейной частью, т. е. величина B (Гс) – $57 \cdot I$ (А).

значений индукции в магнитопроводе. Следует отметить, что такая ситуация типична для магнитов, используемых в ускорительной технике, так как обычно магнитопроводы электромагнитов конструируются так, чтобы индукция в них не достигала индукции насыщения.

Заметим, что даже описанная выше довольно грубая аппроксимация гистерезисных явлений обеспечивает точность расчёта в несколько раз лучшую, чем обычно используемые расчёты по главной кривой намагничивания, не учитывающие остаточной намагниченности (порядок ошибок расчётов без учёта остаточной намагниченности – высота петель гистерезиса, показанных на рисунке 3.6). Кроме того, точность знания параметров петель гистерезиса материала магнитопровода тоже невелика, так как эти параметры зависят от технологии изготовления, в частности, от температуры отжига, которая может быть разной у разных образцов того же материала и даже в разных областях одной и той же детали.

Полученные результаты сравнения данных эксперимента с результатами численного моделирования показывают несомненную перспективность рассматриваемого подхода к учету гистерезиса в численном моделировании. Однако для построения эффективных процедур численного моделирования требуется внести в математическую модель возможность учета вихревых токов, возникающих в полюсе магнита при изменении тока в обмотках.

3.3 Учет эффектов гистерезиса при расчете вихревых токов

Учет остаточной намагниченности при численном моделировании электромагнитных процессов протекающих при изменении тока во фрагментах ускорителей заряженных частиц позволяет существенно повысить точность численного моделирования [22, 34, 35, 81], однако если при этом не учитываются вихревые токи возникающие при изменении поля, то полученная точность может оказаться недостаточной. В данном разделе будет рассмотрен подход, позволяющий одновременно учитывать как остаточную намагниченность, так и вихревые токи при численном моделировании.

3.3.1 Математическая модель и вариационная постановка

Будем решать задачу расчета вихревых токов с учетом эффектов гистерезиса. Для этого используем уравнения Максвелла (1.1)-(1.4) и связь напряженности и индукции магнитного поля через намагниченность \mathbf{M} (3.10). При этом намагниченность может зависеть как от магнитного поля, так и от истории его изменения.

Для решения задачи будем использовать постановку с неполным скалярным магнитным потенциалом в непроводящей среде и векторным магнитным потенциалом в проводящей, описанной в главе 1. В данной главе будем рассматривать учет намагниченности только в векторном потенциале. Учет её в скалярном потенциале рассмотрен в разделе 3.2.

Обозначим область с нулевой проводимостью Ω_0 . Пусть \mathbf{H}_{ext} – напряженность магнитного поля создаваемого сторонними токами в однородном пространстве. Это поле может быть вычислено через закон Био-Савара-Лапласа [57].

Представим напряженность магнитного поля в Ω_0 в следующем виде:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{ext} - \text{grad } u, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (3.32)$$

где u – неполный скалярный магнитный потенциал.

Поскольку дивергенция поля \mathbf{H}_{ext} равна нулю, внутри области Ω_0 уравнения Максвелла сводятся к уравнению Лапласа. Для краткости сразу запишем уравнение для поиска потенциала в слабой форме

$$\mu_0 \int_{\Omega_0} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, d\Omega = \mu_0 \oint_{\partial\Omega_0} \mathbf{H}_{ext} \cdot \mathbf{n} v \, dS - \oint_{\partial\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} v \, dS, \quad (3.33)$$

где v – скалярная пробная функция, $u, v \in H^1(\Omega_0)$.

Обозначим область с ненулевой проводимостью Ω_F . Введем векторный магнитный потенциал \mathbf{A} следующим образом:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M} \quad (3.34)$$

В этом случае, уравнение в слабой форме для векторного потенциала имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega_F} \text{rot } \mathbf{A} \cdot \text{rot } \Psi \, d\Omega + \int_{\Omega_F} \gamma \mathbf{A} \cdot \Psi \, d\Omega = \\ & = \int_{\Omega_F} \mathbf{F} \cdot \Psi \, d\Omega + \int_{\Omega_F} \mathbf{M} \cdot \text{rot } \Psi \, d\Omega + \oint_{\partial\Omega_F} (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) \cdot \Psi \, dS, \end{aligned} \quad (3.35)$$

где Ψ – векторная пробная функция, γ и F определяются проводимостью среды и выбранной схемой аппроксимации по времени, $\mathbf{A}, \Psi \in H^{\text{rot}}(\Omega_F)$.

Обозначим $\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_F$ через Γ и будем считать, что на всех внешних границах расчетной области либо нормальная компонента \mathbf{B} , либо касательная компонента \mathbf{H} равны нулю (что соответствует наиболее распространенным условиям симметрии или удаленной границе). Фактически это означает, что все интегралы по внешней границе в формулах (3.33) и (3.35) обращаются в ноль за счет выбора соответствующих краевым условиям пространств $H^1(\Omega_0)$ и $H^{\text{rot}}(\Omega_F)$. Потребуем чтобы на границе Γ были непрерывны нормальная компонента \mathbf{B} , и касательная компонента \mathbf{H} . Тогда, учитывая, что нормаль в поверхностных интегралах в (3.33) и (3.35) при переходе к интегрированию по Γ

имеет разные знаки, получим (более подробно вывод аналогичной постановки рассмотрен в главе 1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega_F} \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \Psi \, d\Omega + \int_{\Omega_F} \gamma \mathbf{A} \cdot \Psi \, d\Omega + \int_{\Gamma} (\operatorname{grad} u \times \mathbf{n}) \cdot \Psi \, dS = \\ = \int_{\Omega_F} \mathbf{F} \cdot \Psi \, d\Omega + \int_{\Omega_F} \mathbf{M} \cdot \operatorname{rot} \Psi \, d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{H}_{ext} \times \mathbf{n}) \cdot \Psi \, dS, \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$- \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot (\operatorname{grad} v \times \mathbf{n}) \, dS + \mu_0 \int_{\Omega_0} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v \, d\Omega = -\mu_0 \int_{\Gamma} \mathbf{H}_{ext} \cdot \mathbf{n} v \, dS, \quad (3.37)$$

где \mathbf{n} – нормаль к Γ , внешняя по отношению к Ω_F .

Поскольку полученная постановка (3.36), (3.37) отличается от рассмотренной в главе 1 тем, что является нелинейной из-за вклада от намагниченности, особенности конечноэлементной постановки приведем только для этого вклада.

Будем считать, что область Ω_F разбита на конечные элементы с векторными базисными функциями ψ и эти же функции являются пробными, т.е.

$$\mathbf{A} = \sum_j q_j \psi_j. \quad (3.38)$$

Если принять, что намагниченность является постоянной на каждом конечном элементе Ω_F^k (k – номер элемента) и зависит от среднего на нем значения \mathbf{B} (обозначим его $\tilde{\mathbf{B}}^k$), то соответствующее интегралу от намагниченности в (3.36) выражение будет иметь вид

$$f_i^{\text{mag}} = \int_{\Omega_F} \mathbf{M} \cdot \operatorname{rot} \psi_i \, d\Omega = \sum_k \mathbf{M}(\tilde{\mathbf{B}}^k) \cdot \mathbf{R}_i, \quad (3.39)$$

где

$$\mathbf{R}_i = \int_{\Omega_F^k} \operatorname{rot} \psi_i \, d\Omega. \quad (3.40)$$

Для вычисления $\tilde{\mathbf{B}}^k$ воспользуемся формулой

$$\tilde{\mathbf{B}}^k = \frac{1}{|\Omega_F^k|} \int_{\Omega_F^k} \mathbf{B} \, d\Omega = \frac{1}{|\Omega_F^k|} \sum_j q_j \mathbf{R}_j, \quad (3.41)$$

где $|\Omega_F^k|$ – объем элемента Ω_F^k , q_j – искомые веса разложения из (3.38).

Для решения нелинейной задачи будем использовать метод Ньютона, необходимые для этого производные можно записать в виде

$$\frac{\partial f_i^{\text{mag}}}{\partial q_j} = \sum_k \frac{1}{|\Omega_F^k|} \mathbf{R}_j^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{R}_i \quad (3.42)$$

В большинстве моделей гистерезиса намагниченность зависит не от \mathbf{B} , а от \mathbf{H} [21, 26, 27, 78, 82, 83]. В таком случае $\mathbf{M}(\mathbf{B})$ можно получить, решая уравнение

$$\mathbf{H} + \mathbf{M}(\mathbf{H}) = \mathbf{B}/\mu_0 \quad (3.43)$$

относительно \mathbf{H} при заданной зависимости $\mathbf{M}(\mathbf{H})$, а для вычисления производных использовать выражение

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{B}} = \frac{1}{\mu_0} \left(\mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}}. \quad (3.44)$$

В качестве векторной модели гистерезиса $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ будем использовать модель, полученную из скалярной на основе подхода Майергойца [21]

$$\mathbf{M}(\mathbf{H}) = \sum_n w_n M(\mathbf{H} \cdot \mathbf{r}_n) \mathbf{r}_n, \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}} = \sum_n w_n M'(\mathbf{H} \cdot \mathbf{r}_n) \mathbf{r}_n \otimes \mathbf{r}_n, \quad (3.46)$$

где w_n и \mathbf{r}_n – веса и узлы квадратуры для интегрирования по единичной сфере, а $M(H)$ – скалярная модель гистерезиса. Заметим, что такой выбор модели гистерезиса обеспечивает симметричность матрицы метода Ньютона, элементы которой определяются выражением (3.42).

3.3.2 Применение

Как показали вычислительные эксперименты, гладкость выбранной модели гистерезиса $M(H)$ существенно влияет на сходимость метода Ньютона, поэтому приведенные ниже результаты получены с использованием модели Preisach [78], являющейся гладкой.

Продemonстрируем работоспособность предлагаемого подхода на примере расчета поля с заметным влиянием вихревых токов и эффектов гистерезиса. Расчеты будем проводить для поворотного магнита с О-образным магнитопроводом из статьи [35] в которой для него были подобраны параметры моделей гистерезиса. На этом магните были проведены измерения поля в центре магнита при токе в обмотках, график которого показан на рисунке 3.7.

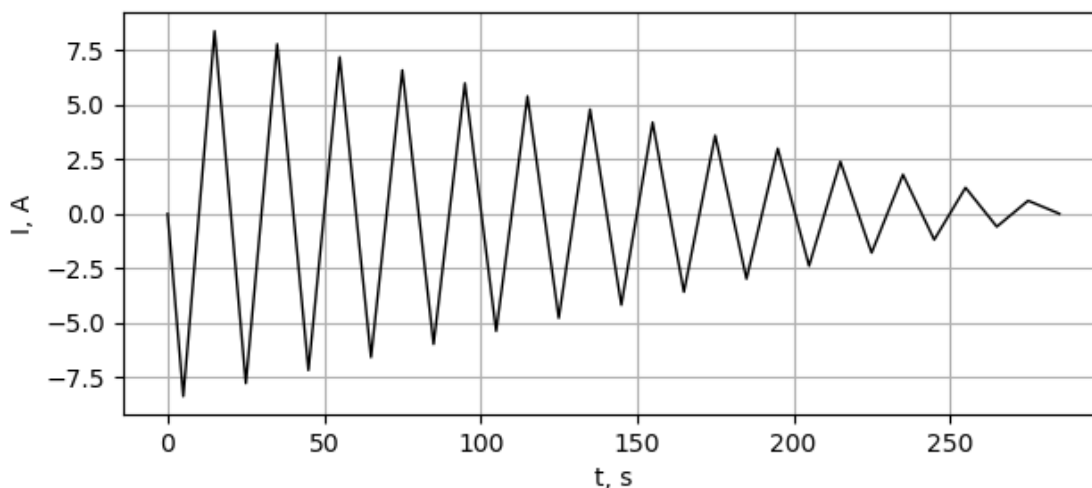


Рисунок 3.7 – График зависимости тока в обмотках от времени

На рисунке 3.8а приводятся графики зависимости индукции магнитного поля от тока (при этом для наглядности из индукции вычтен ток, умноженный на 50) для расчета с использованием рассматриваемого подхода и для результатов измерений. Удельная проводимость σ при моделировании была задана равной $3 \cdot 10^6$ См/м.

Для оценки влияния вихревых токов на рисунке 3.8б приводится зависимость от времени разности результатов расчета и измерений. Для сравнения на этом же графике приводится результат расчета методом описанным в статьях [33, 35], в котором эффект гистерезиса учитывается без влияния вихревых токов.

Как видно из приведенных графиков, без учета вихревых токов погрешность численного моделирования достигает 15 Гс (что составляет около 3% от величины поля). При это с использованием предложенного подхода погреш-

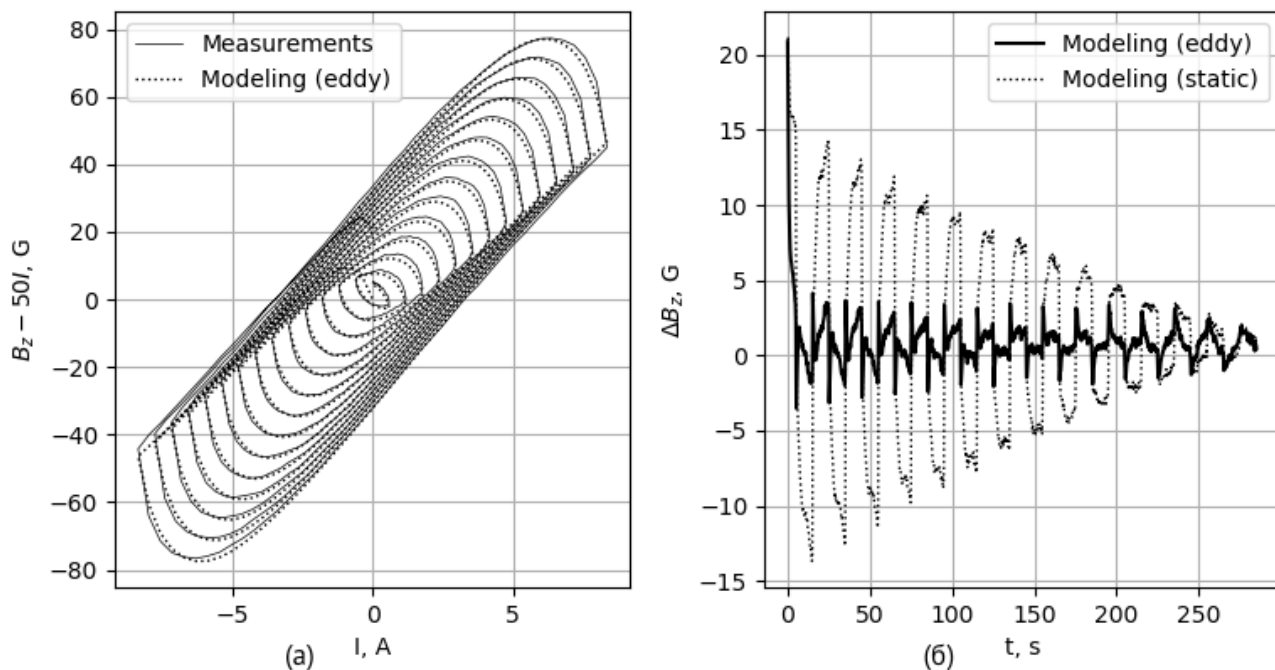


Рисунок 3.8 – Сравнение результатов численного моделирования с результатами измерений. Показана зависимость индукции от тока при частоте 3 Гц, за исключением начального состояния процесса, которое в расчете считается полностью размагниченным.

Таким образом, рассмотренный подход является вполне работоспособным и позволяет достаточно точно учитывать как вихревые токи, так и остаточную намагниченность. Заметим, однако, что использованная скалярная модель Preisach не является самой эффективной для учета остаточной намагниченности, поэтому разработка методов решения нелинейной задачи (3.36), (3.37), позволяющих использовать менее гладкие модели гистерезиса, остается актуальной.

Выводы

Полученные результаты вычислительных экспериментов показали, что даже довольно грубая аппроксимация гистерезисных явлений для стационарного случая обеспечивает точность расчёта в несколько раз лучшую, чем обычно используемые расчёты по главной кривой намагничивания, не учитывающие остаточной намагниченности. Без учета вихревых токов отличие результатов

численного моделирования от результатов экспериментальных измерений достигает 15 Гс (что составляет около 3% от величины поля). При этом с использованием предложенного в диссертационной работе подхода отличие не превышает 3 Гс (0,6%). Полученные результаты сравнения данных эксперимента с результатами численного моделирования показывают несомненную перспективность рассматриваемого подхода с учетом гистерезиса в численном моделировании. Подход может быть эффективно использован для оценки влияния вихревых токов и остаточной намагниченности в технических устройствах.

4 ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС QUASAR

При выполнении работы были доработаны существующие и разработаны новые модули программного комплекса численного моделирования *Quasar*. Комплекс разрабатывался автором с 2011 года совместно с И.М. Ступаковым. Комплекс реализован на языках программирования *C#* и *C++* с использованием платформы *.NET*, что позволило реализовать объектно-ориентированную архитектуру с широкими возможностями для расширения и интеграции.

4.1 Интерфейс

Программный комплекс имеет графический интерфейс (см. рисунок 4.1), поддерживающий отображение трехмерных сеток и решений на сечениях и границах подобластей. Входные данные для комплекса задаются в графическом интерфейсе либо импортируются из файлов. Набор входных данных образует проект, который может быть сохранен и впоследствии загружен заново. Проект может содержать следующие элементы:

- **Сетки** – конечно- и граничноэлементные сетки, описывающие расчетную область. Поддерживается импорт тетраэдральных или смешанных сеток из программы построения сеток *Gmsh* [84] и программного комплекса *TELMA* [31], а также удвоение какой-либо из уже содержащихся в проекте сеток. Поддерживается возможность трехмерной визуализации добавленной сетки.
- **Каталоги материалов** – содержат данные о материалах, в частности коэффициенты (поддерживаются произвольные функции). Есть возможность как задания данных о материалах в интерфейсе, так и импорта каталогов материалов из комплекса *TELMA*. Импортированные материалы могут в дальнейшем при необходимости быть модифицированы.

- **Токовые обмотки** – описывают форму, местоположение и ток в токовых обмотках. Простейшие обмотки могут быть заданы в интерфейсе, более сложные – получены путем импорта из комплекса TELMA.
- **Задачи** – объединяют входные данные из пунктов выше и задают конкретную решаемую задачу, а также тип базисных функций. Поддерживается создание задач магнитостатики, оптимизации, нестационарных задач электромагнетизма.

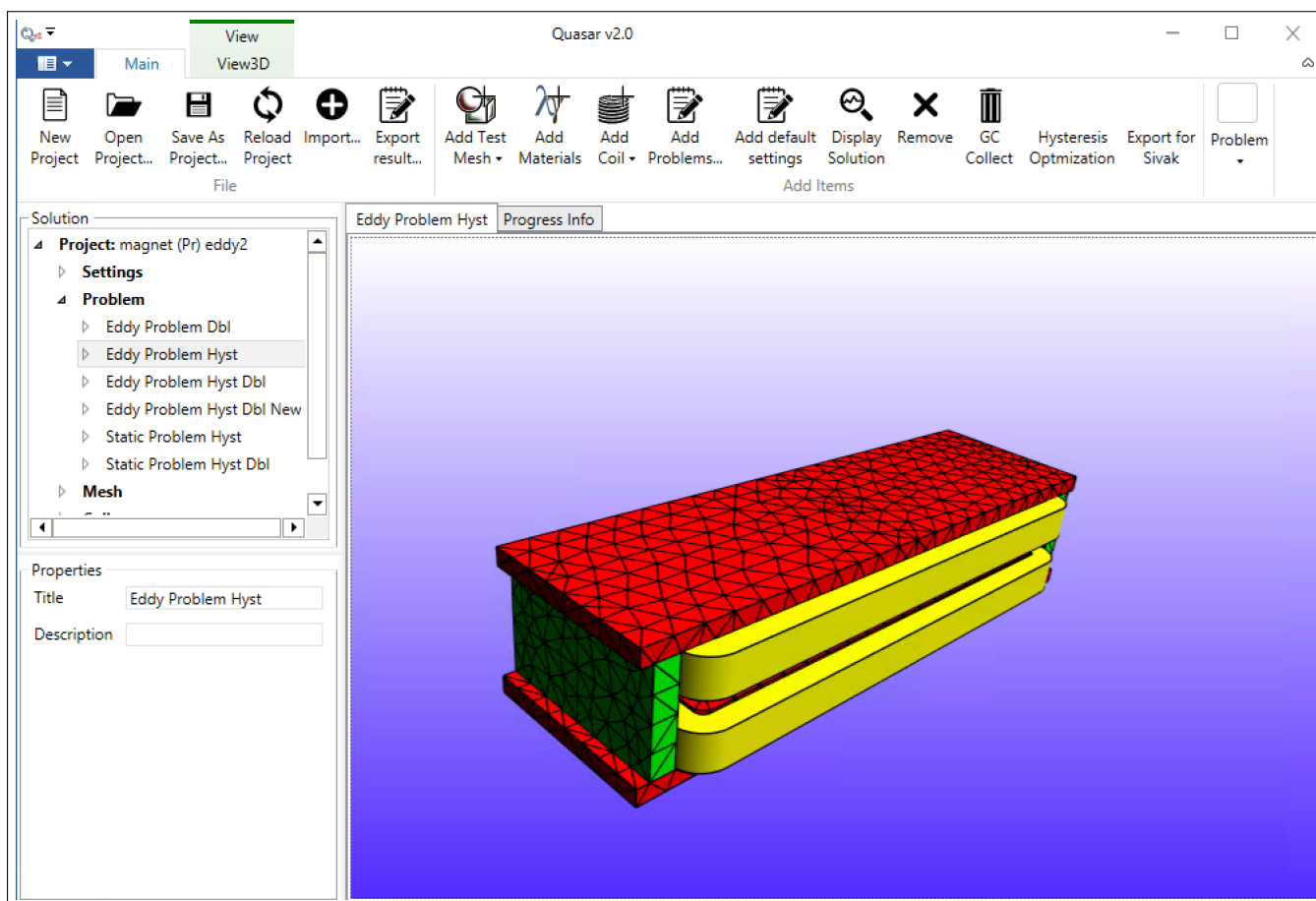


Рисунок 4.1 – Графический интерфейс программного комплекса Quasar

Процесс работы пользователя с комплексом выглядит следующим образом.

1. Пользователь открывает графический интерфейс комплекса, либо нажимает кнопку "Создать новый проект"

2. Пользователь импортирует сетку и задает материалы и, при необходимости, токовые обмотки.
3. Пользователь создает задачу требуемого типа, указывает в ней сетку, материалы и обмотки, добавленные ранее, а также тип базисных функций.
4. По желанию, пользователь может сохранить полученный проект, чтобы иметь возможность быстрой загрузки уже сформированного проекта для модификации или повторного решения.
5. Пользователь нажимает кнопку "Решить". Далее он может следить за ходом решения на вкладке "Информация о прогрессе"
6. После завершения процесса решения задачи, пользователь может отобразить полученное решение либо связанные физические величины на границе или сечении сетки, а также выгрузить решение в произвольных точках по пространству и по времени в рамках расчетной области.

4.2 Архитектура

Рассмотрим архитектуру программного комплекса **Quasar**. На рисунке 4.2 представлены основные программные компоненты комплекса и связи между ними.

Рассмотрим основные компоненты комплекса **Quasar** и их функции:

- **Quasar** – библиотека, содержащая основные типы данных, классы и интерфейсы, необходимые для взаимодействия и интеграции с программным комплексом **Quasar**.
- **Quasar.Core** – библиотека, содержащая основную функциональность комплекса. Содержит код, отвечающий за решение задач магнитостатики, оптимизации, нестационарных задач электромагнетизма.

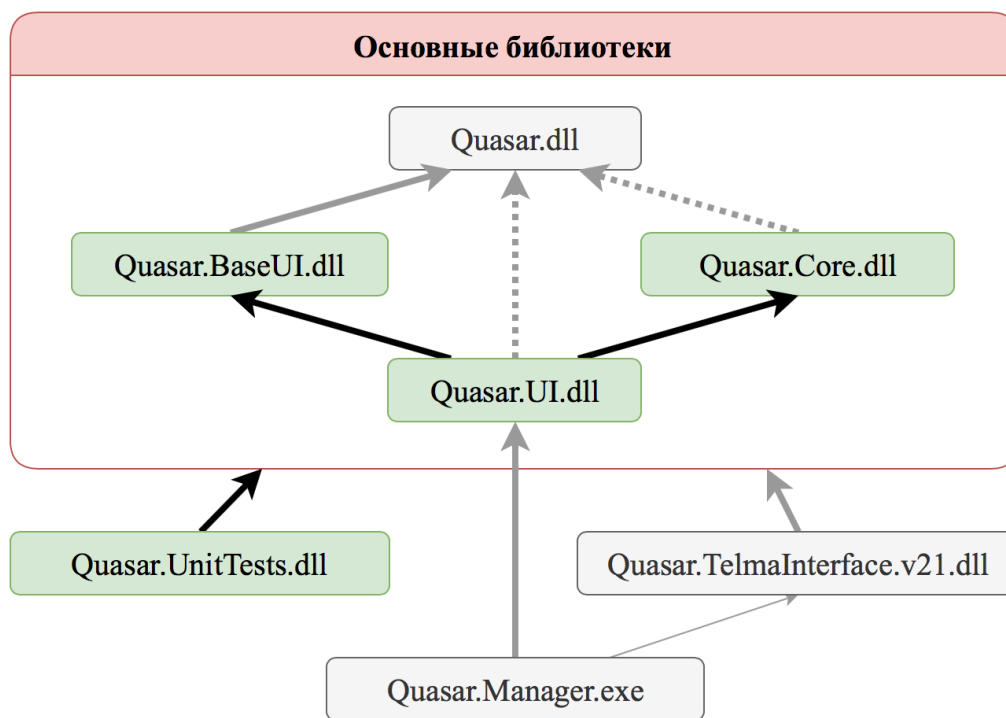


Рисунок 4.2 – Структура комплекса Quasar. Зеленым выделены библиотеки, в которые автором был внесен значительный вклад

- **Quasar.Manager** – запускаемый модуль. Содержит графический пользовательский интерфейс комплекса для операционной системы Windows, созданный на основе технологии WPF [85]. Поддерживает работу с проектами, отображение хода решения задач, экспорт полученных результатов в виде таблиц и визуализацию трехмерных сеток.
- **Quasar.BaseUI** – библиотека, содержащая базовые типы для работы с пользовательским интерфейсом, отображением информации о процессе расчетов и распознаванием пользовательского ввода.
- **Quasar.UI** – содержит классы, отвечающие за работу с проектами, а также визуализацию трехмерных сеток на основе технологии WPF и DirectX 11 [86, 87]
- **Quasar.TelmaInterface** – отвечает за взаимодействие с комплексом TELMA [31] и импорт конечноэлементных сеток из него.

- **Quasar.UnitTests** – содержит набор тестов, проверяющих работу комплекса Quasar, в том числе тестирование решения задач на полиномиальных функциях с известным ответом.

Рассмотрим более подробно основную библиотеку комплекса – **Quasar.Core**. На рисунке 4.3 представлена структура библиотеки.

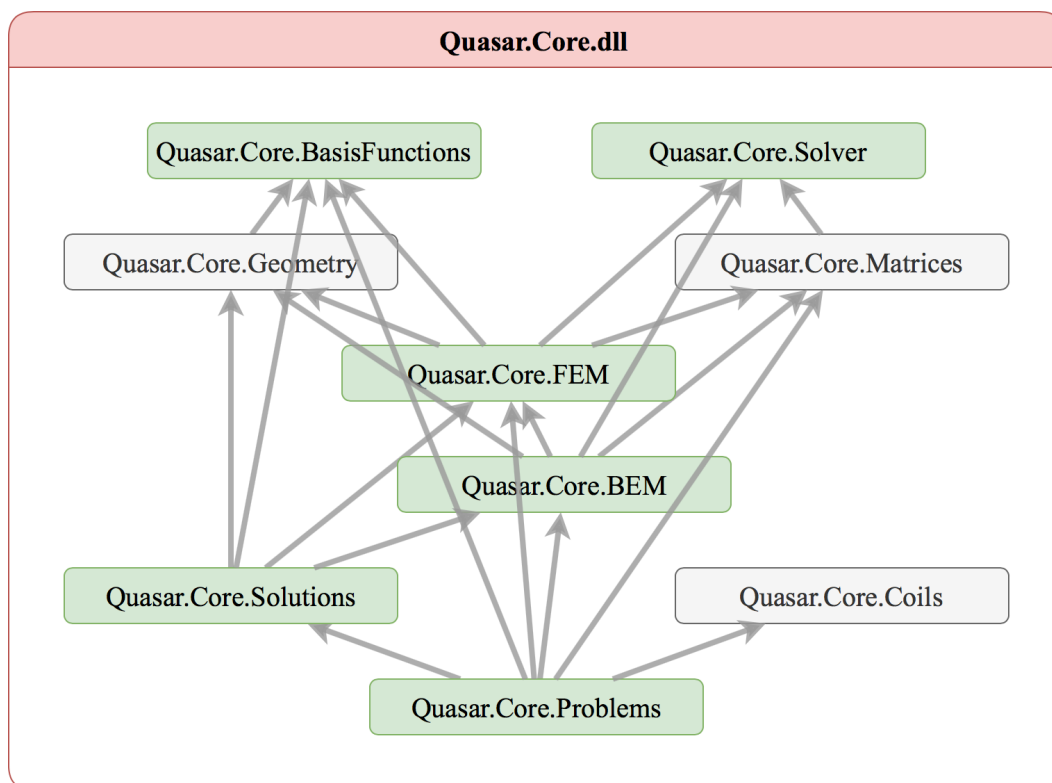


Рисунок 4.3 – Структура библиотеки **Quasar.Core**. Зеленым выделены компоненты, в которые автором был внесен значительный вклад

Библиотека **Quasar.Core** предоставляет следующие возможности:

- Использование треугольных, четырехугольных, тетраэдральных и призматических скалярных конечных элементов [79], с лагранжевыми или иерархическими базисными функциями произвольного порядка.
- Использование треугольных и тетраэдральных векторных конечных элементов [79].
- Использование треугольных и четырехугольных граничных элементов.

- Поддержка различных форматов хранения разреженных матриц. Возможность решения СЛАУ с использованием методов CG, LOS и FGMRES [79, 88]. Работа с плотными матрицами через библиотеку LAPACK [89].
- Решение трехмерных нелинейных задач магнитостатики, с возможностью выбора для каждой подобласти типа потенциала и метода аппроксимации. При этом может использоваться как одна матрица для хранения всей СЛАУ, так и отдельные матрицы для каждой подобласти.
- Решение трехмерных нелинейных нестационарных задач моделирования электромагнитного поля, с возможностью выбора для каждой подобласти типа потенциала, метода аппроксимации, модели гистерезиса.

4.3 Разработанные части и модули

Лично автором были реализованы следующие части программного комплекса Quasar:

4.3.1 Библиотека Quasar.Core

- В соответствии с общим интерфейсом скалярного конечного элемента, реализованы скалярные конечные элементы высоких порядков.
- Добавлен общий интерфейс векторного конечного элемента и добавлена возможность использования векторных элементов для векторных задач произвольного типа. В соответствии с интерфейсом, реализованы векторные треугольные и тетраэдральные конечные элементы с базисом 1 порядка.
- Реализован общий механизм вычисления конечноэлементного решения в точке.

- Реализовано ускорение получения граничноэлементного решения с использованием распараллеливания, векторизации и мультипольного разложения.
- Реализован расчет физических величин (например, \mathbf{B} , \mathbf{H}) по полученным решениям задач электромагнетизма (например, u , \mathbf{A}) в соответствии с общим интерфейсом решения из `Quasar.BaseUI`.
- Реализованы двух-, трех- и четырехслойные временные схемы. Добавлена возможность подключения схемы к задачам произвольного типа. Реализован механизм получения решения нестационарной задачи.
- Реализован модуль для решения нестационарных задач электромагнетизма с возможностью выбора векторного или скалярного потенциалов для произвольной подобласти.
- Реализован общий механизм сохранения истории намагничивания с возможностью подключения произвольной модели гистерезиса. Механизм интегрирован в вычислительные схемы с использованием скалярного магнитного потенциала в непроводящей среде и векторного потенциала в проводниках. Реализована вычислительная схема конвертации моделей гистерезиса вида $\mathbf{M}(\mathbf{H})$ в модели вида $\mathbf{M}(\mathbf{B})$, необходимые в используемой постановке для учета гистерезиса в векторном потенциале.

4.3.2 Библиотека `Quasar.BaseUI`

- Добавлена возможность задавать параметры задачи (например, параметры материалов, правую часть, краевые условия, сетку по времени, модель гистерезиса) из интерфейса .
- Реализован модуль синтаксического разбора формул, содержащих скалярные и векторные константы, переменные, основные математические функции. Модуль подключен к интерфейсу комплекса и позволяет задавать параметры задачи в виде произвольных функций.

4.3.3 Библиотека `Quasar.UI`

- Реализовано сохранение решения задач в проекте, как в стационарном, так и в нестационарном случаях.
- Реализован модуль `Quasar.Renderer`
 - Реализован общий механизм визуализации трехмерных сеток, сечений и отсечений. Реализована визуализация на основе технологии `Direct3D`.
 - Реализована гладкая визуализация решения на сечениях, отсечениях и границах подобластей при помощи функций высоких порядков и шейдеров `DirectX`.

4.3.4 Библиотека `Quasar.UnitTests`

- Добавлены юнит-тесты на решение задач с аналитическим решением методом конечных элементов для базисных функций различных порядков.

Выводы

Все разработанные в рамках диссертационной работы схемы для трехмерного численного моделирования электромагнитных полей были реализованы в программном комплексе `Quasar`. Программный комплекс позволяет решать трехмерные задачи электромагнетизма, как стационарные, так и нестационарные, и позволяет учитывать вихревые токи и остаточную намагниченность. Также `Quasar` имеет графический интерфейс, позволяющий сохранять наборы сеток, материалов, задач и решений в проекты и отображать трехмерные сетки и решения на сечениях и границах подобластей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Построена математическая модель для решения задачи моделирования нестационарных электромагнитных процессов с использованием неполного скалярного магнитного потенциала в непроводящей среде и полного векторного магнитного потенциала в проводящей среде, а также связи напряженности и индукции магнитного поля через намагниченность. Эта модель позволяет одновременно учитывать как вихревые токи, так и остаточную намагниченность в ферромагнитных объектах.
2. Разработаны вычислительные схемы с совместным использованием скалярных граничных элементов для аппроксимации скалярного магнитного потенциала и векторных конечных элементов для аппроксимации векторного магнитного потенциала для построенной математической модели. Этот подход имеет следующие преимущества: использование граничных элементов в непроводящей подобласти (воздухе) позволяет уменьшить число неизвестных по сравнению с использованием векторных конечных элементов во всей расчетной области, а также воздушная среда и токовые обмотки могут быть исключены из сетки.
3. Разработаны вычислительные схемы и алгоритмы для учета предыстории намагниченности в ферромагнитных объектах. Алгоритмы интегрированы в вычислительные схемы с совместным использованием методов конечных и граничных элементов для решения нестационарных нелинейных задач электромагнетизма. Разработанная постановка требует задания зависимости намагниченности от индукции магнитного поля. Поскольку в большинстве моделей гистерезиса намагниченность зависит от напряженности поля, а не от индукции, был разработан метод, позволяющий использовать такие модели в разработанной вычислительной схеме. Этот подход основан на ре-

шении нелинейного уравнения, связывающего индукцию с напряженностью и намагниченностью, методом Ньютона.

4. Все разработанные подходы для трехмерного численного моделирования электромагнитных полей были реализованы в программном комплексе Quasar. Программный комплекс имеет графический интерфейс, позволяющий сохранять и загружать проекты, содержащие наборы сеток, материалов, задач и решений, задавать коэффициенты материалов, токовые обмотки и сетки по времени, управлять процессом решения при помощи элементов интерфейса, а также отображать трехмерные сетки и решения на сечениях и границах подобластей. Quasar позволяет решать трехмерные задачи электромагнетизма, как стационарные, так и нестационарные, и позволяет учитывать вихревые токи и остаточную намагниченность.
5. Полученные результаты вычислительных экспериментов показали, что даже довольно грубая аппроксимация гистерезисных явлений для стационарного случая обеспечивает точность расчёта в несколько раз лучшую, чем обычно используемые расчёты по главной кривой намагничивания, не учитывающие остаточной намагниченности. Без учета вихревых токов отличие результатов численного моделирования от результатов экспериментальных измерений достигает 15 Гс (что составляет около 3% от величины поля). При этом с использованием предложенного в диссертационной работе подхода отличие не превышает 3 Гс (0,6%). Полученные результаты сравнения данных эксперимента с результатами численного моделирования показывают несомненную перспективность рассматриваемого подхода с учетом гистерезиса в численном моделировании. Подход может быть эффективно использован для оценки влияния вихревых токов и остаточной намагниченности в технических устройствах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zienkiewicz O., Lyness J., Owen D.* Three-dimensional magnetic field determination using a scalar potential—A finite element solution // *Magnetics, IEEE Transactions on.* — 1977. — Т. 13, № 5. — С. 1649—1656.
2. *Coulomb J.-L.* Finite elements three dimensional magnetic field computation // *IEEE Transactions on Magnetics.* — 1981. — Ноябрь. — Т. 17, № 6. — С. 3241—3246. — ISSN 0018-9464. — DOI: 10.1109/TMAG.1981.1061587.
3. *Soloveichik Y. G., Royak M. È.* Simultaneous use of node and vector finite elements for computing three-dimensional nonstationary electromagnetic fields // *Sibirskii Zhurnal Industrial'noi Matematiki.* — 2004. — Т. 7, № 3. — С. 132—147.
4. *Steinbach O.* Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems. — New York : Springer, 2008.
5. *Hiptmair R.* Coupling of finite elements and boundary elements in electromagnetic scattering // *SIAM Journal on Numerical Analysis.* — 2003. — Т. 41, № 3. — С. 919—944.
6. *Langer U., Steinbach O.* Coupled finite and boundary element domain decomposition methods // *Boundary element analysis.* — Springer, 2007. — С. 61—95.
7. *Kuhn M., Steinbach O.* FEM-BEM coupling for 3d exterior magnetic field problems // *Math. Meth. Appl. Sci.* — 2002. — Т. 25, № 5. — С. 357—371.
8. *Bossavit A.* The computation of eddy-currents, in dimension 3, by using mixed finite elements and boundary elements in association // *Mathematical and Computer Modelling.* — 1991. — Т. 15, № 3. — С. 33—42.

9. 3D FEM–BEM-coupling method to solve magnetostatic Maxwell equations / F. Bruckner [и др.] // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. — 2012. — Май. — Т. 324, № 10. — С. 1862–1866. — ISSN 0304-8853. — DOI: 10.1016/j.jmmm.2012.01.016.
10. *Acevedo R., Meddahi S.* An E-based mixed FEM and BEM coupling for a time-dependent eddy current problem // IMA Journal of Numerical Analysis. — 2011. — Т. 31, № 2. — С. 667–697.
11. *Martyanov A. S., Neustroyev N. I.* ANSYS Maxwell Software for electromagnetic field calculations // Eastern European Scientific Journal. — 2014. — № 5.
12. *Anderl R., Binde P.* Simulations with NX. — Munich, Carl Hanser Verlag, 2014.
13. *Mazgaonkar N., Chowdhury M., Fernandes L. F.* Design of Electric Motor Using Coupled Electromagnetic and Structural Analysis and Optimization: tex. отч. / SAE Technical Paper. — 2019.
14. Determination of Magnet Specification of 13 MeV Proton Cyclotron Based on Opera 3D / Т. Taufik [и др.] // Atom Indonesia. — 2014. — Т. 40, № 2. — С. 69–75.
15. *Kurz S., Russenschuck S.* The application of the BEM-FEM coupling method for the accurate calculation of fields in superconducting magnets // Electrical Engineering. — 1999. — Т. 82, № 1. — С. 1–10.
16. *Auchmann B.* ROXIE Users Documentation. — Geneva, 2007.
17. A systematic approach to multiphysics extensions of finite-element-based micromagnetic simulations: Nmag / Т. Fischbacher [и др.] // IEEE Transactions on Magnetics. — 2007. — Т. 43, № 6. — С. 2896–2898.

18. *Donahue M. J., Porter D. G.* OOMMF: Object oriented microMagnetic framework. — 2016. — DOI: 10.4231/D3XS5JJ23. — URL: <https://nanohub.org/resources/oommf>.
19. *Das J., Ray R. N.* 3D modeling of high temperature superconducting hysteresis motor using COMSOL multiphysics // 2017 8th Annual Industrial Automation and Electromechanical Engineering Conference (IEMECON). — IEEE. 2017. — С. 96—100.
20. *Mayergoyz I.* Dynamic Preisach models of hysteresis // IEEE Transactions on Magnetics. — 1988. — Т. 24, № 6. — С. 2925—2927.
21. *Mayergoyz I. D.* Mathematical models of hysteresis and their applications. — Academic Press, 2003.
22. *Подберезная И. Б.* Алгоритмы моделирования магнитного гистерезиса // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. — 2015. — № 6. — С. 5—13.
23. Electromagnetic computations with Preisach hysteresis model / A. Bermúdez [и др.] // Finite Elements in Analysis and Design. — 2017. — Т. 126. — С. 65—74.
24. An inverse Jiles-Atherton model to take into account hysteresis in time-stepping finite-element calculations / N. Sadowski [и др.] // IEEE Transactions on Magnetics. — 2002. — Т. 38, № 2. — С. 797—800.
25. An accurate vector Jiles-Atherton model for improving the FEM convergence / K. Hoffmann [и др.] // 2016 IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC). — IEEE. 2016. — С. 1—1.
26. *Чернышев А. В.* Модель магнитного гистерезиса Джайльса-Эйтертона и ее модификации // Контроль. Диагностика. — 2016. — № 2. — С. 55—60.

27. *Денисов П. А.* Описание петли гистерезиса с использованием явных выражений для модели Джилса-Атертона второго уровня // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. — 2018. — Т. 61, № 1. — С. 6—12.
28. *Bergqvist A.* Magnetic vector hysteresis model with dry friction-like pinning // Physica B: Condensed Matter. — 1997. — Т. 233, № 4. — С. 342—347.
29. *Henrotte F., Nicolet A., Hameyer K.* An energy-based vector hysteresis model for ferromagnetic materials // COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering. — 2006. — Т. 25, № 1. — С. 71—80.
30. *Henrotte F., Hameyer K.* A dynamical vector hysteresis model based on an energy approach // IEEE Transactions on Magnetics. — 2006. — Т. 42, № 4. — С. 899—902.
31. *Рояк М. Э.* Анализ возможностей объектно-ориентированного подхода при разработке программных комплексов конечно-элементного моделирования электромагнитных полей // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. — Новосибирск, 2005. — № 1. — С. 63—72.
32. Алгоритмы оптимизации геометрии дипольных магнитов / М. Э. Рояк [и др.] // Труды XII международной конференции «Актуальные проблемы электронного приборостроения» (АПЭП-2014) : в 7 т. Т. 6. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2014. — С. 215—219.
33. Учет гистерезиса при расчете поля в элементах магнитных систем ускорителей / Н. А. Винокуров [и др.] // Письма в Журнал технической физики. — 2016. — Т. 42, № 13. — С. 96—103.
34. Allowing for hysteresis in the calculation of fields in the elements of accelerator magnetic systems / N. A. Vinokurov [и др.] // Technical Physics Letters. — 2016. — Т. 42, № 7. — С. 708—711.

35. Применение новой модели остаточной намагниченности железа для расчёта поворотного магнита ускорителя / М. Э. Рояк [и др.] // Письма в Журнал технической физики. — 2017. — Т. 43, № 20. — С. 28—36.
36. *Stupakov I., Royak M., Kondratyeva N.* Comparison of Hysteresis Models Applied to the Simulation of a Deflecting Accelerator Magnet Using the Finite Element Method // 13th International Forum on Strategic Technology (IFOST-2018). Т. 1. — IEEE. 2018. — С. 446—449.
37. Finite-element solution to multidimensional multisource electromagnetic problems in the frequency domain using non-conforming meshes / Y. G. Soloveichik [и др.] // Geophysical Journal International. — 2017. — Т. 212, № 3. — С. 2159—2193.
38. Method for calculating the three-dimensional time-harmonic electromagnetic fields in marine electrical prospecting / Y. Soloveichik [и др.] // 2014 12th International Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE). — IEEE. 2014. — С. 594—597.
39. 3-D Modelling of Marine Electromagnetic Technologies Taking into Account Induced Polarization / M. G. Persova [и др.] // 2018 XIV International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE). — IEEE. 2018. — С. 222—225.
40. Electromagnetic soundings in the arctic shelf in conditions of magnetotelluric noise / M. G. Persova [и др.] // Saint Petersburg 2018: Innovations in Geosciences and Time for Breakthrough. — 2018. — С. 44648.
41. Software for solution of 3D problems of electrical survey by transient electromagnetic field using finite elements method / M. Persova [и др.] // Proceedings. The 9th Russian-Korean International Symposium on Science and Technology, 2005. KORUS 2005. — IEEE. 2005. — С. 93—96.

42. Software and its new possibilities for 3D processing of marine electrical survey data / M. G. Persova [и др.] // 2016 11th International Forum on Strategic Technology (IFOST). — IEEE. 2016. — С. 366—370.
43. Подход к 3D-моделированию и 3D-инверсии данных магнитной градиентометрии = The approach to 3D modeling and 3D inversion of magnetic gradiometry data / М. Г. Персова [и др.] // Geomodel 2019 = Геомодель 2019: 21st EAGE conference on oil and gas geological exploration and development, Gelendzhik, September 9-13, 2019. — EAGE Publ., 2019.
44. *Шурина Э. П., Добролюбова Д. В., Штанько Е. И.* Моделирование векторных электромагнитных полей в областях с микровключениями на полиэдральных носителях // Теоретические основы и конструирования численных алгоритмов решения задач математической физики Тезисы докладов XXII Всероссийской конференции, посвященной памяти К.И. Бабенко. — 2018. — С. 99—100.
45. Модификации многомасштабного метода конечных элементов для решения задач электромагнетизма на постоянном и переменном токе / М. И. Эпов [и др.] // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. — 2018. — Т. 86, № 3. — С. 219—230.
46. *Шурина Э. П., Добролюбова Д. В., Штанько Е. И.* Редуцированная вариационная постановка для моделирования гармонического электромагнитного поля в областях с малыми проводящими включениями // Вычислительные технологии. — 2018. — Т. 23, № 3. — С. 92—108.
47. *Epov M. I., Shurina E. P., Shtabel N. V.* The mathematical modeling of the electric field in the media with anisotropic objects // Applied Numerical Mathematics. — 2015. — Т. 93. — С. 164—175.

48. *Эпов М. И., Шурина Э. П., Нечаев О. В.* Прямое трехмерное моделирование векторного поля для задач электромагнитного каротажа // Геология и геофизика. — 2007. — Т. 48, № 9. — С. 989—995.
49. *Мосин А. П., Могилатов В. С.* Средства математического анализа электромагнитного каротажа методом переходных процессов в цилиндрически-слоистой среде // Каротажник. — 2018. — 6 (288). — С. 73—84.
50. *Могилатов В. С.* Вопросы математического моделирования и инверсии индукционного каротажа для радиально-неоднородных сред // Каротажник. — 2015. — 8 (254). — С. 81—93.
51. *Мариненко А. В., Эпов М. И., Оленченко В. В.* Численное моделирование прямых и обратных задач электротомографии на кустовых площадках месторождений // Труды Международной конференции "Вычислительная математика и математическая геофизика" посвященная 90-летию со дня рождения академика А. С. Алексеева. — 2018. — С. 268—274.
52. *Онегова Е. В., Эпов М. И.* Трехмерное моделирование нестационарного электромагнитного поля для задач геонавигации горизонтальных скважин // Геология и геофизика. — 2011. — Т. 52, № 7. — С. 925—930.
53. *Сивак С. А., Ступаков И. М., Кондратьева Н. С.* Комбинированный векторный метод конечных и граничных элементов для задачи распространения электромагнитного поля с учетом вихревых токов // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. — 2018. — 4 (73). — С. 79—90.
54. Учет эффектов гистерезиса при расчете вихревых токов / И. М. Ступаков [и др.] // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии (Электронный научный журнал). — 2019. — № 20. — С. 67—74.

55. *Kondratyeva N. S., Stupakov I. M.* Acceleration methods for the calculation of results in boundary element modeling // 13th International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE-2016). Т. 2. — IEEE. 2016. — С. 268—270.
56. *Royak M. E., Stupakov I. M., Kondratyeva N. S.* Coupled vector FEM and scalar BEM formulation for eddy current problems // 13th International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE-2016). Т. 2. — IEEE. 2016. — С. 330—335.
57. *Stupakov I. M., Royak M. E., Kondratyeva N. S.* The method for calculating magnetic field induced by current coils // 13th International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE-2016). Т. 2. — IEEE. 2016. — С. 347—350.
58. Finite element formulation with coupled vector-scalar magnetic potentials for eddy current problems / M. Royak [и др.] // 11th International Forum on Strategic Technology (IFOST-2016). — IEEE. 2016. — С. 456—460.
59. *Ступаков И. М., Косьминова Н. С.* Исследование возможности эффективного применения численного интегрирования для конечных элементов, аффинно изоморфных шаблонному элементу // Наука. Технологии. Инновации.: материалы всерос. науч. конференции молодых ученых, Новосибирск, 29 ноября-2 декабря, 2012. Ч. 1. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2012. — С. 255—258.
60. *Ступаков И. М., Косьминова Н. С.* Исследование возможности сокращения числа измерений магнитного поля при изучении его распределения в помещении // Международный конкурс научных работ по приоритетным направлениям развития науки, технологий и техники в Российской Федерации. Сборник трудов. — М., 2012. — С. 83—90.

61. *Косьминова Н. С., Ступаков И. М.* Оценка возможности ускорения метода граничных элементов с использованием OpenMP и AVX инструкций // Наука. Технологии. Инновации.: материалы всерос. науч. конференции молодых ученых, Новосибирск, 21-24 ноября, 2013 : в 10 ч. Ч. 3. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2013. — С. 99—102.
62. *Ступаков И. М., Косьминова Н. С.* Автоматизация построения согласованных базисов высокого порядка в методе конечных элементов // Труды XII международной конференции «Актуальные проблемы электронного приборостроения» (АПЭП-2014) : в 7 т. Т. 6. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2014. — С. 220—222.
63. *Кондратьева Н. С.* Адаптивный алгоритм построения траекторий заряженных частиц в электромагнитном поле // Наука. Технологии. Инновации : материалы Всерос. науч. конф. молодых ученых, 02-06 декабря 2014 г. В 11 ч. Ч. 2. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2014. — С. 120—124.
64. *Ступаков И. М., Кондратьева Н. С., Зеленский А. В.* О способах совместного учета остаточной намагниченности и вихревых токов при численном моделировании ускорительных магнитов = About the methods of residual magnetization and eddy currents coupled consideration in the numerical simulation of accelerator magnets // Обработка информации и математическое моделирование : материалы Рос. науч.-техн. конф., [Новосибирск, 25–26 апр. 2019 г.] — Новосибирск : Изд-во СибГУТИ, 2019.
65. *Stupakov I., Royak M., Kondratyeva N.* Coupled Finite and Boundary Element Method for Solving Magnetic Hysteresis Problems // WIT Transactions on Engineering Sciences. — 2019. — С. 125—135.
66. Подход к геометрической нелинейной 3D-инверсии данных электроразведки с подбором криволинейных границ между геоэлектрическими слоями = The approach to parametric nonlinear 3D inversion of electrical prospecting data with the recovery of curvilinear boundaries between geoelectrical layers /

- М. Г. Персова [и др.] // Geomodel 2019 = Геомодель 2019: 21st EAGE conference on oil and gas geological exploration and development, Gelendzhik, September 9-13, 2019. — EAGE Publ., 2019.
67. Application of a new model of residual magnetization of iron for calculating the deflecting magnet of an accelerator / M. E. Royak [и др.] // Technical Physics Letters. — 2017. — Т. 43, № 10. — С. 924—927.
68. Boundary element methods for magnetostatic field problems: a critical view / Z. Andjelic [и др.] // Computing and Visualization in Science. — 2011. — Март. — Т. 14, № 3. — С. 117—130. — ISSN 1432-9360, 1433-0369. — DOI: 10.1007/s00791-011-0167-3.
69. *Sivak S.* Boundary Element Method for eddy current problem // Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE), 2014 12th International Conference on. — IEEE. 2014. — С. 207—214.
70. *Kuczmann M.* Potential formulations in magnetics applying the finite element method // Lecture notes, Laboratory of Electromagnetic Fields, “Széchenyi István” University, Győr, Hungary. — 2009.
71. *Bramble J. H., Pasciak J. E.* A preconditioning technique for indefinite systems resulting from mixed approximations of elliptic problems // Mathematics of Computation. — 1988. — Т. 50, № 181. — С. 1—17.
72. *Stoll M., Wathen A.* The Bramble-Pasciak preconditioner for saddle point problems. — 2007.
73. MASTAC-New Code for Solving Three-dimensional Non-linear Magnetostatic Problems / M. Rojak [и др.]. — 1996.
74. *Вонсовский С. В.* Магнетизм. — М. : Наука, 1971. — 1032 с.
75. *Мишин Д. Д.* Магнитные материалы. — 2-е изд. — М. : Высш. школа, 1991. — 384 с.

76. Материалы в приборостроении и автоматике: Справочник // / под ред. Ю. Пятина. — 2-е изд. — М. : Машиностроение, 1982.
77. *Чечерников В. И.* Магнитные измерения. — 2-е изд. — М. : Изд-во МГУ, 1969. — 387 с.
78. Identification procedures for scalar Preisach model / Z. Szabó [и др.] // *Physica B: Condensed Matter*. — 2004. — Т. 343, № 1—4. — С. 142—147.
79. *Соловейчик Ю. Г., Рояк М. Э., Персова М. Г.* Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2007. — 896 с.
80. *Royak M. E., Stupakov I. M., Kondratyeva N. S.* Coupled Vector FEM and Scalar BEM Formulation for Eddy Current Problems // *Actual problems of electronic instrument engineering (APEIE-2016) : proc. of 13 international conference, Novosibirsk, 3–6 oct. 2016*. Т. 1. — NSTU. Novosibirsk, 2016. — С. 330—335.
81. *Нейман Л. А., Нейман В. Ю.* Моделирование процессов в электромагнитном вибрационном преобразователе с потерями энергии в магнитопроводе // *Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники*. Т. 19. — 2016.
82. *Матюк В. Ф., Осипов А. А.* Математические модели кривой намагничивания и петель магнитного гистерезиса. Часть I. Анализ моделей // *Неразрушающий контроль и диагностика*. — 2011. — № 2.
83. *Кулаев Ю. В., Курбатов П. А.* Модель гистерезисных магнитных свойств материалов при наложении постоянного и переменного магнитных полей // *Альтернативная энергетика и экология (ISJAEE)*. — 2016. — № 22. — С. 23—29.

84. *Geuzaine C., Remacle J.* Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2009. — Т. 79, № 11. — С. 1309—1331.
85. *Макдональд М.* WPF: Windows Presentation Foundation в .NET 4.5 с примерами на C# 5.0 для профессионалов. — Вильямс, 2013. — 1024 с. — ISBN 978-5-8459-1854-3.
86. *Zink J., Pettineo M., Hoxley J.* Practical Rendering and Computation with Direct3D 11. — CRC Press, 2012. — 648 с. — ISBN 9781568817200.
87. *Luna F. D.* Introduction to 3D Game Programming with DirectX 11. — Mercury Learning & Information, 2012. — 600 с. — ISBN 978-1936420223.
88. *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems. — Siam, 2003.
89. LAPACK Users' guide. Т. 9 / Е. Anderson [и др.]. — Siam, 1999.
90. *Кондратьева Н. С., Ступаков И. М.* Методы ускорения вычислений результата при граничноэлементном моделировании // Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП-2016) : 13 междунар. науч.-техн. конф., Новосибирск, 3–6 окт. 2016 г. Т. 8. — IEEE. 2016. — С. 100—102.
91. *Рояк М. Э., Ступаков И. М., Кондратьева Н. С.* Совместное использование векторных конечных и скалярных граничных элементов для моделирования электромагнитных процессов // Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП-2016) : 13 междунар. науч.-техн. конф., Новосибирск, 3–6 окт. 2016 г. Т. 8. — IEEE. 2016. — С. 163—167.
92. *Ступаков И. М., Рояк М. Э., Кондратьева Н. С.* Метод расчета магнитного поля токовых обмоток // Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП-2016) : 13 междунар. науч.-техн. конф., Новосибирск, 3–6 окт. 2016 г. Т. 8. — IEEE. 2016. — С. 184—187.

93. Parallel solution of 3D forward and inverse problems of airborne electromagnetic survey / M. Persova [и др.] // 14th International forum on strategic technology (IFOST 2019) : proc., National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia, October 14-17, 2019. — IEEE. 2019.

ПРИЛОЖЕНИЕ А ДОКУМЕНТ О ВНЕДРЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Минобрнауки России
Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
им. Г.И. Будкера
Сибирского отделения Российской академии наук
(ИЯФ СО РАН)

Проспект ак. Лаврентьева, д. 11, г. Новосибирск, 630090
телефон: (383) 329-47-60, факс: (383) 330-71-63
<http://www.inp.nsk.su>, e-mail: inp@inp.nsk.su
ОКПО 03533872 ОГРН 1025403658136
ИНН/КПП 5408105577 / 540801001

от 15.03.2019 № 15311 – 31/9314-529

на № _____ от _____



“УТВЕРЖДАЮ”

Зам. директора ИЯФ СО РАН
по научной работе
Левичев Е. Б.

15 декабря 2018 г.

АКТ

об использовании результатов научных исследований, выполненных соискателем Кондратьевой Н.С. в диссертационной работе «Разработка программного обеспечения для трехмерного численного моделирования электромагнитных процессов с учетом вихревых токов в технических устройствах»

Программный комплекс Quasar, одним из авторов которого является Кондратьева Наталья Сергеевна, успешно применялся для расчетов вихревых токов, возникающих при включении магнитов, а также для моделирования явлений гистерезиса.

Пархомчук В. В.
академик РАН, доктор физ.-мат. наук,
Заведующий лабораторией 5-2 ИЯФ СО РАН