

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет»

На правах рукописи



Блинов Павел Юрьевич

**ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ И МОЩНОСТИ КРИТЕРИЕВ
РАВНОМЕРНОСТИ И ПОКАЗАТЕЛЬНОСТИ МЕТОДАМИ
КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Специальность 05.13.17 – Теоретические основы информатики

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, профессор
Лемешко Борис Юрьевич

Новосибирск – 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ.....	16
1.1 Основные понятия и определения	16
1.2 Общие сведения о проверке статистических гипотез	16
1.3 Проверка гипотез о равномерности	22
1.3.1 Проверяемая гипотеза и рассматриваемые критерии при проверке равномерности.....	25
1.3.2 Конкурирующие гипотезы, рассматриваемые при проверке равномерности.....	26
1.3.3 Проверка равномерности на интервале $[a, b]$	29
1.3.4 Проверка сложных гипотез о равномерности закона	29
1.4 Проверка гипотез об экспоненциальности	31
1.4.1 Проверяемая гипотеза и виды критериев при проверке показательности	32
1.4.2 Конкурирующие гипотезы, рассматриваемые при проверке показательности	33
1.5 Статистическое моделирование	36
Выводы по главе.....	37
2 ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ КРИТЕРИЕВ РАВНОМЕРНОСТИ..	39
2.1 Критерий Шермана.....	39
2.2 Критерий Кимбелла.....	42
2.3 Критерий Морана 1	44
2.4 Критерий Морана 2	45
2.5 Критерий Ченга-Спиринга	48
2.6 Критерии Хегази–Грина.....	50
2.7 Критерий Янга	54
2.8 Критерий Фросини	57

2.9	Критерий Гринвуда	59
2.10	Модификация критерия Гринвуда	61
2.11	Критерий Гринвуда–Кэсенберри–Миллера	64
2.12	Критерии Неймана–Бартона.....	66
2.13	Энтропийный критерий Дудевича–ван дер Мюлена	68
2.14	Модификации энтропийного критерия	72
2.15	Критерий Кресси 1.....	74
2.16	Критерий Кресси 2.....	76
2.17	Критерий Пардо	77
2.18	Критерий Шварца	78
2.19	Модификация критерия Андерсона-Дарлинга.....	79
2.20	Энтропийный критерий Корреа	80
2.21	Сравнительный анализ множества специальных критериев равномерности.....	82
	Выводы по главе.....	85

3 ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ КРИТЕРИЕВ ПОКАЗАТЕЛЬНОСТИ 86

3.1	Критерий Шапиро-Уилка	86
3.2	Критерий Фросини	87
3.3	Корреляционный критерий экспоненциальности.....	88
3.4	Критерий Кимбера-Мичела.....	89
3.5	Критерий Фишера.....	90
3.6	Критерий Бартлетта-Морана	92
3.7	Критерий Пиэтра	93
3.8	Критерий Эппса-Палли	96
3.9	Критерий Холландера-Прошана	97
3.10	Критерий наибольшего интервала	98
3.11	Критерий Кочара	99
3.12	Критерий Клишко-Антла-Радемакера-Рокетта	100
3.13	Критерий Гринвуда.....	101

3.14	Критерий Лоулесса	102
3.15	Критерий Дешпанде	102
3.16	Критерий Эпштейна	105
3.17	Критерий Морана	106
3.18	Критерии Хегази-Грина.....	108
3.19	Сравнительный анализ критериев показательности	110
	Выводы по главе.....	114
4	КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ ПРИ ПРОВЕРКЕ РАВНОМЕРНОСТИ И ПОКАЗАТЕЛЬНОСТИ	115
4.1	Непараметрические критерии согласия	115
4.1.1	Критерий Колмогорова.....	115
4.1.2	Критерий Купера	117
4.1.3	Критерий Крамера-Мизеса-Смирнова	118
4.1.4	Критерий Ватсона.....	119
4.1.5	Критерий Андерсона-Дарлинга.....	120
4.1.6	Критерии Жанга.....	121
4.1.7	Упорядоченность непараметрических критериев согласия по мощности при проверке равномерности.....	122
4.1.8	Упорядоченность непараметрических критериев согласия по мощности при проверке показательности	124
4.2	Критерий хи-квадрат Пирсона	125
4.2.1	Проверка равномерности по критерию хи-квадрат Пирсона	126
4.2.2	Проверка показательности по критерию хи-квадрат Пирсона....	129
4.3	Сравнительный анализ множества всех критериев равномерности	131
4.4	Сравнительный анализ всего множества критериев показательности	134
	Выводы по главе.....	137
5	МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ	139
5.1	Интерактивный режим проверки гипотез	139
5.2	Подсистема моделирования функций от случайных величин	155

5.3 Влияние округления на распределения статистик критериев	165
Выводы по главе.....	174
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	176
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	178
ПРИЛОЖЕНИЕ А Таблицы процентных точек статистик критериев равномерности	192
ПРИЛОЖЕНИЕ Б Таблицы оценок мощности критериев проверки равномерности	203
ПРИЛОЖЕНИЕ В Таблицы процентных точек статистик критериев показательности	221
ПРИЛОЖЕНИЕ Г Таблицы оценок мощности критериев проверки показательности	230
ПРИЛОЖЕНИЕ Д Акты об использовании и свидетельства о государственной регистрации	245

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. На сегодняшний день компьютерное моделирование является мощным аппаратом для развития прикладной математической статистики. В частности, при проверке статистических гипотез использование моделирования позволяет получать реальные распределения статистик, на которые можно опираться при проверке гипотез. С ростом мощности вычислительной техники точность моделирования можно повышать за счет увеличения количества имитационных экспериментов.

Математический аппарат проверки статистических гипотез представляет собой эффективное и гибкое средство для анализа данных и исследования статистических закономерностей.

Применение множества статистических моделей и методов зависит от справедливости тех предположений, которые легли в обоснование соответствующих методов. Например, одним из наиболее известных в некоторых приложениях является предположение о принадлежности наблюдений или ошибок измерений равномерному закону распределения.

В природе не существует событий, описываемых с помощью равномерного распределения. Однако равномерное распределение очень часто используется в прикладных и фундаментальных исследованиях. С одной стороны это связано с тем, что оно является простейшим законом распределения вероятностей, с другой – с тем, что псевдослучайные выборки, подчиняющиеся любому другому распределению, могут быть смоделированы преобразованием равномерно распределённых с использованием метода обратных функций.

С другой стороны существуют реальные процессы, при описании которых вполне обоснованно используется равномерный закон распределения. Сюда можно отнести следующие примеры принадлежности случайных величин равномерному закону: расположение частиц молекул воздуха в помещении; моменты времени, когда случаются следующие проколы (сдутия) автомобильных шин; время ожидания транспорта. В разведке нефти, положение водонефтяного

раздела в потенциальной перспективе часто рассматривают как непрерывную равномерно распределенную величину. При конвертации аналогового сигнала в цифровой формат ошибки, возникающие вследствие округления и называемые ошибками квантования, зачастую считают принадлежащими равномерному закону.

Популярной моделью в приложениях является показательный (экспоненциальный) закон распределения. Показательный закон часто используется в задачах статистического анализа, особенно, в моделях выживаемости в биологии и медицине, а также в моделях надежности в технических приложениях, где рассматриваются случайные выборки данных типа времени жизни [45] (ремиссии заболеваний, времена смерти) или времена отказов определенных объектов или устройств [36]. Гипотеза об экспоненциальности эквивалентна гипотезе о том, что наблюдаемому случайному процессу соответствует постоянная интенсивность отказов. При этом если наблюдается пуассоновский процесс, то времена между наступлениями событий подчиняются показательному закону распределения. Среди процессов, генерирующих пуассоновские потоки, можно указать испускание радиоактивных частиц [115], землетрясения [31], отказы оборудования [70] и т.п.

За последние сто лет методы прикладной математической статистики получили бурное развитие. Не в последнюю очередь это определялось востребованностью соответствующего аппарата в приложениях. Рассмотрено и исследовано множество вероятностно-статистических моделей, методов построения этих моделей и оценивания их параметров. Предложен трудно обзримый перечень критериев, предназначенных для проверки различных статистических гипотез. При этом не редко для решения одной задачи (проверки одного вида гипотезы) могут использоваться различные методы (критерии), приводящие к различным выводам. Так, например, для проверки гипотезы о принадлежности наблюдаемой выборки нормальному (равномерному, показательному и т.п.) закону, как правило, могут использоваться порядка 2-х десятков критериев, построенных специально для этих целей, а также более

десятка параметрических и непараметрических критериев согласия. И в то же время появляются новые критерии, базирующиеся на определённых характеристиках или свойствах законов распределения вероятностей.

Статистики критериев измеряют отклонение эмпирического закона распределения от теоретического с использованием различных мер. При проверке сложных гипотез параметры теоретических законов могут оцениваться различными методами. Для одних критериев известны предельные или асимптотические распределения статистик критериев, соответствующие справедливой проверяемой гипотезе, для других такие распределения зависят от объёмов выборок n и информация об этих распределениях представлена лишь таблицами критических значений для ограниченного числа значений n , что затрудняет применение критериев. Порой отсутствует информация о достоинствах и недостатках критериев конкретных критериев, а иногда такая информация не соответствует действительности. Свойства критериев и распределения статистик при ограниченных объёмах выборок часто существенно отличаются от асимптотических. На корректность статистических выводов может влиять факт грубого округления анализируемых данных. Для обоснования выбора для использования конкретного критерия, как правило, не хватает результатов сравнительного анализа мощности критериев.

В последние годы, помимо конструирования новых, исследователи акцентируют свое внимание на сравнительном анализе существующих критериев проверки статистических гипотез. Эти исследования, безусловно, имеют большое значение для практики, так как в значительной мере раскрывают достоинства и недостатки отдельных критериев. Часто такой сравнительный анализ сопутствует предложению нового критерия, демонстрируя определённые преимущества предлагаемого. Однако ни один такой пример сравнительного анализа не выявил наилучшего критерия.

С появлением широкого перечня критериев равномерности связан целый ряд имен математиков. Множество критериев равномерности и их модификаций было предложено в трудах американских математиков Б. Шермана, Брэдфорда Ф.

Кимбелла, британских математиков Майера Гринвуда, Давида Джона Бартоломео, австралийского математика Патрика Альфреда Пирса Морана и многих других. Шерман одним из первых (в 1957 году) использовал компьютер первого поколения (SWAC) для получения статистических данных для своего интервального критерия [78].

В 1974 году Стефенс [83] впервые провел сравнительный анализ критериев согласия Хи-квадрат Пирсона и Колмогорова–Смирнова. В качестве конкурирующих при проверке гипотезы о равномерности некоторых данных он предложил рассмотреть ряд законов, близких к равномерному закону на интервале $[0,1]$, которые в дальнейшем использовались при сравнительном анализе рядом других авторов. Отличие этих законов от равномерного заключается в большей концентрации наблюдений либо в начале, либо в середине, либо в конце, либо в начале и конце интервала. Позднее Стефенс написал ряд работ, касающихся сравнительного анализа различных групп критериев, включая анализ критериев, ориентированных на проверку равномерности [84] и на проверку показательности [80].

Первый сравнительный анализ критериев показательности был проведен также в 70-х годах прошлого столетия. В 1978 вышла работа Гайла [30], посвященная данной тематике. Результаты ещё одного сравнительного анализа критериев экспоненциальности были опубликованы в работе Ашера [3].

Идею сравнительного анализа для проверки равномерности продолжили два американских статистика Чарльз П. Кэсенберри и Форест Леонард Миллер младший [61]. В их работах [71,72] сравнивалось большее число критериев, а также была модифицирована статистика Гринвуда. Соответствующий критерий теперь называют критерием Гринвуда–Кэсенберри–Миллера. При проведении сравнительного анализа в целях повышения мощности критериев применялось преобразование Дурбина [23].

Среди современных работ, затрагивающих критерии показательности, следует отметить работы Никитина Я.Ю. [65, 66] и Волковой К.Ю. [89, 109], касающиеся асимптотической эффективности критериев.

В 2005 году сравнительный анализ критериев равномерности был проведен испанскими учеными Мархуенда, Моралез и Пардо, в котором были предложены новые критерии [59]. Мария дель Кармен Пардо ранее предложила новый критерий, основанный на оценке информационной энергии, и использующий все тот же оконный параметр [69]. Она опровергла предположение Шварца об оптимальном выборе единичного оконного параметра, но вопрос выбора окна остался актуальным. В последние годы конструированием новых оценок и критериев, а также проблемой выбора оконного параметра занимаются иранские математики [67, 94, 95].

Эффективное применение методов статистического анализа в приложениях без соответствующего программного обеспечения практически невозможно. А в последнее время становится очевидным, что при использовании компьютерных технологий и методов статистического (имитационного) моделирования можно не только досконально оценить достоинства и недостатки конкретных критериев, отобрать наиболее мощные, но и корректно использовать широкое множество критериев, в том числе в условиях нарушения стандартных предположений, обуславливающих возможность применения классических результатов

Цель и задачи исследований. Основная цель диссертационной работы заключалась в исследовании свойств и сравнительном анализе множества статистических критериев, предназначенных для проверок гипотез о принадлежности данных равномерному или экспоненциальному (показательному) закону распределения, дающих основание для выбора наиболее предпочтительного критерия в конкретной ситуации, в разработке программного обеспечения, позволяющего исследовать и корректно применять соответствующие статистические критерии.

В соответствии с поставленной целью решались следующие задачи:

- создание программного обеспечения, предназначенного для моделирования функций от случайных величин и для проверки гипотез по критериям, рассматриваемым в диссертационной работе, для статистического моделирования и исследования распределений статистик критериев, для

вычисления оценок мощности критериев по отношению к различным конкурирующим гипотезам;

- исследование распределений статистик критериев равномерности;
- исследование влияния на эффективность специальных критериев равномерности дополнительных параметров, имеющих место в некоторых критериях;
- вычисление оценок мощности критериев равномерности по отношению к некоторым близким конкурирующим гипотезам и проведение сравнительного анализа мощности множества рассмотренных критериев;
- исследование распределений статистик критериев показательности;
- вычисление оценок мощности критериев показательности по отношению к конкурирующим законам с различной формой функции интенсивности отказов и проведение сравнительного анализа множества критериев показательности.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовался аппарат теории вероятностей, математической статистики, статистического моделирования, математического программирования.

Научная новизна диссертационной работы заключается:

- в уточнении реальных свойств множества рассмотренных критериев проверки гипотез;
- в результатах сравнительного анализа мощности критериев равномерности;
- в результатах сравнительного анализа мощности критериев показательности;
- в результатах исследования выбора значений дополнительных параметров на свойства некоторых специальных критериев равномерности или показательности;
- в построенных таблицах процентных точек, расширяющих возможности применения рассмотренных критериев равномерности и критериев показательности;
- в выявленных отклонениях распределений статистик критериев от теоретических;
- в рекомендациях по применению критериев равномерности и показательности при ограниченных объемах выборок.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся:

1. Результаты исследования распределений статистик, мощности и сравнительного анализа критериев равномерности.
2. Рекомендации по применению критериев равномерности, опирающиеся на результаты исследований.
3. Результаты исследования распределений статистик, мощности и сравнительного анализа критериев показательности.
4. Рекомендации по применению критериев показательности.
5. Программное обеспечение, позволяющее применять рассмотренные критерии с вычислением достигнутого уровня значимости p -value, в том числе, в условиях отсутствия предельных (асимптотических) распределений статистик критериев.

Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций обеспечивается:

- корректным применением математического аппарата и методов статистического моделирования для исследования свойств и распределений статистик критериев;
- совпадением результатов статистического моделирования с известными теоретическими результатами.

Личный творческий вклад автора заключается в проведении исследований, обосновывающих основные положения, выносимые на защиту: в разработке программного обеспечения, в проведении статистического моделирования распределений статистик, в вычислении оценок мощности критериев относительно конкретных альтернатив, в построении моделей распределений статистик и вычислении таблиц процентных точек (критических значений).

Практическая ценность и реализация результатов. Результаты сравнительного анализа критериев позволяют обосновать выбор критерия для проверки гипотез о равномерности и показательности, как при наличии конкурирующих гипотез определенного вида, так и в их отсутствие. Результаты исследований и средства моделирования включены в программную систему «Интервальная статистика» ISW и используются в научных исследованиях и

учебном процессе. Интерактивное моделирование неизвестных распределений статистик критериев позволяет корректно применять множество критериев равномерности и показательности при ограниченных объемах выборок с вычислением достигнутого уровня значимости p_{value} .

Диссертационные исследования выполнены при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках проектной части государственного задания (проекты № 2.541.2014/К и № 1.1009.2017/ПЧ)

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Содержание диссертации соответствует п.5 области исследований «Разработка и исследование моделей и алгоритмов анализа данных, обнаружения закономерностей в данных и их извлечениях, разработка и исследование методов и алгоритмов анализа текста, устной речи и изображений» паспорта специальности научных работников 05.13.17 – «Теоретические основы информатики» по техническим наукам.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на международном семинаре “Applied Methods of Statistical Analysis”, Новосибирск, 2015г. и 2017г.; международном форуме по стратегическим технологиям “International Forum on Strategic Technology, IFOST-2016”, Новосибирск, 2016 г.; международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы электроники и приборостроения», Новосибирск, 2014г., 2016г. и 2018г.; российской научно-технической конференции “Обработка информационных сигналов и математическое моделирование”, Новосибирск, 2013г., 2015г., 2016г., 2017г. и 2018г.; всероссийской научной конференции молодых ученых “Наука. Технология. Инновации”, Новосибирск, 2012г., 2014г. и 2015г., седьмой международной научно-технической конференции “Измерения и испытания в судостроении и смежных отраслях – СУДОМЕТРИКА-2018”, 2018г.

Публикации. По результатам диссертационных исследований опубликованы 22 печатных работы, в том числе 3 статьи в журналах, входящих в перечень изданий, рекомендуемых ВАК РФ, 5 статьей в рецензируемых трудах международных конференций, индексируемых в Scopus и Web of Sciences, 1 монография (в соавторстве), 2 свидетельства о государственной регистрации

программы для ЭВМ, 11 публикаций в материалах международных и российских конференций.

Структура работы. Общий объем диссертационной работы составляет 249 страниц. Работа состоит из введения, 5-и глав основного содержания, включая 170 таблиц и 72 рисунка, заключения, списка литературы из 139 наименований и 5-и приложений.

Краткое содержание работы. В первой главе дается введение в задачи исследования, включая обзор и обоснование выбора задач проверки равномерности и показательности, даются некоторые общие сведения, связанные с проверкой статистических гипотез, обосновывается важность разработки программного обеспечения, реализующего статистическое моделирование, используемого в процессе исследований, уточняется точность моделирования, применяемого в исследованиях, рассматриваются законы, используемые в качестве конкурирующих при проверке равномерности и показательности.

Во второй главе дается описание рассмотренных специальных критериев равномерности, рассматриваются вопросы влияния некоторых параметров на свойства критериев, представляются таблицы с оценками мощности для рассмотренных критериев относительно конкурирующих гипотез, представленных в первой главе. Далее проводится сравнительный анализ мощности рассмотренных в главе специальных критериев.

В третьей главе приводится описание специальных критериев, ориентированных на проверку гипотезы экспоненциальности. Рассматривается влияние значений параметров, присутствующих в некоторых критериях, на мощность относительно конкурирующих гипотез, рассмотренных в первой главе. Проводится сравнительный анализ мощности критериев показательности, даются некоторые рекомендации по применению критериев.

В четвертой главе рассматривается применение для проверки гипотез равномерности и экспоненциальности множества классических критериев согласия. Здесь же рассматривается вопрос влияния выбора числа интервалов на мощность критерия хи-квадрат Пирсона при проверке равномерности и

показательности. В конце главы приводятся результаты сравнительного анализа мощности при проверке равномерности и показательности критериев согласия и критериев, описанных во второй и третьей главах. На основании полученных оценок мощности критериев даются рекомендации по применению критериев при наличии тех или иных альтернатив, делается вывод о конкурентоспособности критериев согласия при проверке рассматриваемых гипотез.

В пятой главе описывается методика интерактивного моделирования распределений статистик критериев, целью которой является обеспечение корректного применения различных статистических критериев в тех случаях, когда распределение статистики не может быть известно до начала процедуры проверки гипотезы. Далее описываются реализованные возможности для исследования законов распределения функций от случайных величин. Приводятся примеры анализа по соответствующим критериям при объёмах выборок, превышающих в приводимых таблицах критических значений, в условиях округления (дискретизации) наблюдений.

В заключении приводится перечень основных результатов исследований.

В приложении **А** приведены уточнённые в работе таблицы процентных точек статистик критериев равномерности.

В приложении **Б** – таблицы с полученными оценками мощности критериев равномерности относительно рассмотренных конкурирующих гипотез.

В приложении **В** приведены уточнённые таблицы процентных точек статистик критериев показательности.

В приложении **Г** – таблицы с полученными оценками мощности критериев показательности относительно рассмотренных конкурирующих гипотез.

В приложении **Д** – акты об использовании результатов исследований и свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Автор выражает глубокую признательность за ценные советы и оказанную помощь в написании диссертации своему научному руководителю д.т.н. профессору Лемешко Борису Юрьевичу и коллективу кафедры теоретической и прикладной информатики.

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ

1.1 Основные понятия и определения

Введем для дальнейшего использования следующие обозначения:

X — одномерная случайная величина;

x_1, x_2, \dots, x_n — выборка из n наблюдений одномерной непрерывной случайной величины;

$x_{(j)}$ — j -я порядковая статистика выборки;

$x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)}$ — упорядоченная выборка;

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ — среднее значение выборки из n наблюдений.

1.2 Общие сведения о проверке статистических гипотез

С каждым из используемых для проверки гипотезы H_0 критериев связана статистика S , которая в соответствии с некоторой мерой измеряет расстояние между равномерным законом распределения вероятностей и эмпирическим законом, определяемым выборкой. В силу случайности извлекаемых выборок случайными оказываются и значения статистики S , вычисляемые в соответствии с этими выборками. При справедливости проверяемой гипотезы H_0 статистика S подчиняется некоторому распределению $G(S|H_0)$.

Схема проверки гипотезы заключается в следующем. Область определения статистики разбивается на два подмножества, одно из которых представляет собой критическую область, и попадание в которую при справедливости H_0 маловероятно. При попадании вычисленного по выборке значения S^* статистики S в критическую область проверяемая гипотеза H_0 отклоняется (отвергается). В противном случае – нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

Заметим, что не отклонение гипотезы H_0 в процессе проверки не означает, что она справедлива. Истинный закон распределения реальных случайных

величин остается всегда неизвестным. Результат проверки свидетельствует лишь о том, что этот закон, возможно, не очень сильно отличается от предполагаемого закона распределения, например равномерного.

С другой стороны, справедливая гипотеза H_0 может быть отклонена и будет совершена ошибка 1-го рода. При проверке гипотез вероятность ошибки 1-го рода α (уровень значимости), как правило, задают, допуская тем самым возможность отклонения H_0 и возможность такой ошибки.

При построении критериев стремятся к использованию одномерных статистик, что упрощает построение критической области. При этом критерии могут быть правосторонними, левосторонними и двусторонними, что определяет построение критической области.

Все критерии согласия являются правосторонними, и проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при больших значениях статистики. Среди специальных критериев проверки равномерности присутствуют правосторонние и двусторонние.

В случае правостороннего критерия граница критической области (критическое значение) $S_{1-\alpha}$, определяется уравнением

$$\alpha = \int_{S_{1-\alpha}}^{\infty} g(s|H_0) ds = 1 - G(S_{1-\alpha}|H_0), \quad (1.1)$$

где $g(s|H_0)$ – условная плотность распределения статистики при справедливости H_0 .

Для используемых на практике критериев в благоприятных случаях известны асимптотические (предельные) распределения $G(S|H_0)$ соответствующих статистик при условии справедливости гипотезы H_0 . В тех ситуациях, когда распределения статистик существенно зависят от объёмов выборок n , информация о законе распределения статистики бывает представлена таблицей процентных точек (квантилей распределения $G(S|H_0)$). Критическое

значение $S_{1-\alpha}$ вычисляют в соответствии с $G(S|H_0)$ или берут из соответствующей таблицы процентных точек.

В случае правостороннего критерия в принятой практике статистического анализа обычно полученное значение статистики S^* сравнивают с критическим значением $S_{1-\alpha}$ при заданном уровне значимости α . Проверяемую гипотезу H_0 отклоняют, если $S^* > S_{1-\alpha}$ (Рисунок 1.1).

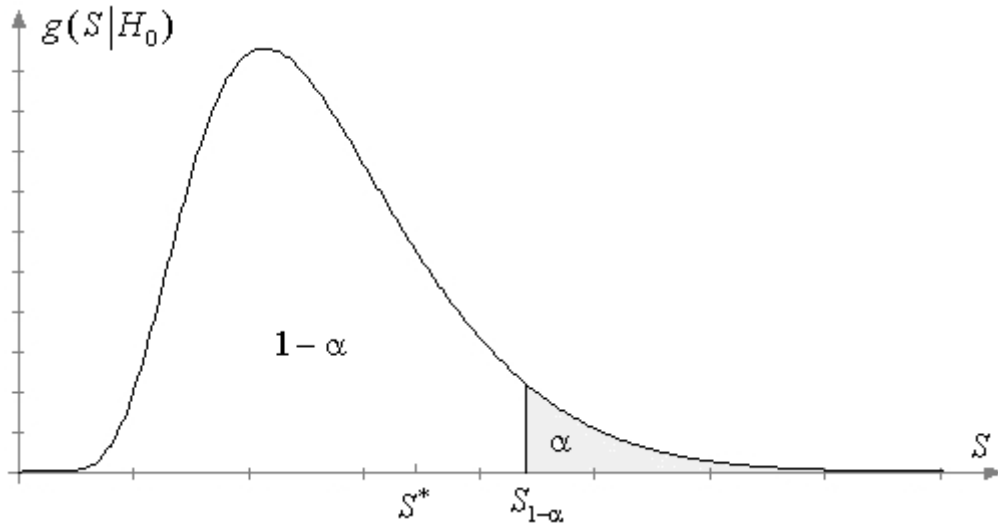


Рисунок 1.1 – Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы H_0 и критическое значение для правостороннего критерия

Больше информации о степени соответствия выборки теоретическому закону можно почерпнуть из достигнутого уровня значимости **p-value**: вероятности возможного превышения полученного значения статистики при справедливости H_0

$$P\{S > S^*\} = \int_{S^*}^{\infty} g(s|H_0) ds = 1 - G(S^*|H_0). \quad (1.2)$$

Данная вероятность позволяет судить о том, насколько хорошо выборка согласуется с теоретическим распределением, так как, по существу, представляет собой вероятность истинности нулевой гипотезы (Рисунок 1.2). Проверяемую гипотезу H_0 не отвергают, если $P\{S > S^*\} > \alpha$.

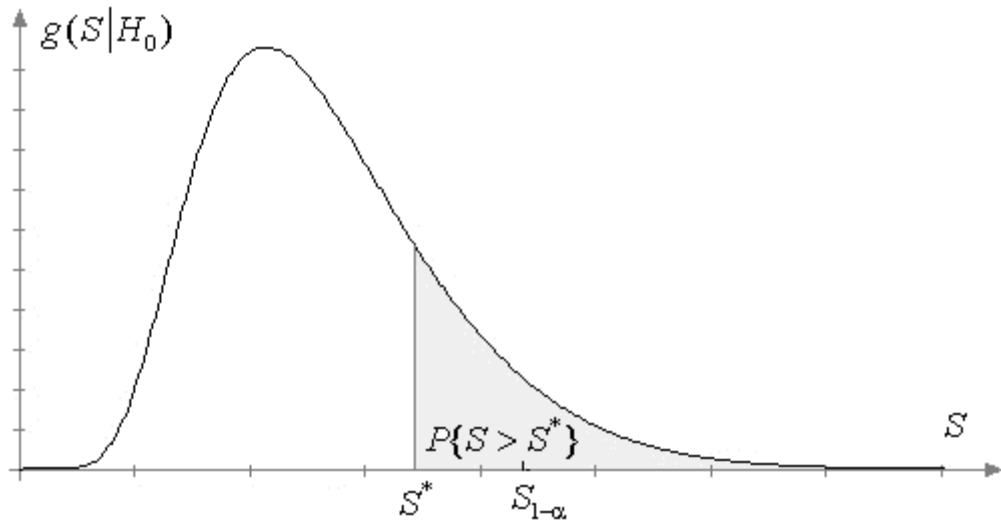


Рисунок 1.2 – Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы H_0 и достигнутый уровень значимости

В случае двустороннего критерия критическая область состоит из двух частей. И проверяемая гипотеза H_0 отклоняется, если $S^* < S_{\alpha/2}$ или $S^* > S_{1-\alpha/2}$ (Рисунок 1.3). А достигнутый уровень значимости (**p-value**) в этом случае определяется соотношением

$$p_{value} = 2 \min \{ G(S^* | H_0), 1 - G(S^* | H_0) \}. \quad (1.3)$$

Задачи оценивания параметров и проверки гипотез опираются на выборки независимых случайных величин. Случайность самой выборки предопределяет, что возможны и ошибки в результатах статистических выводов. С результатами проверки гипотез связывают ошибки двух видов: ошибка первого рода состоит в том, что отклоняют гипотезу H_0 , когда она верна; ошибка второго рода состоит в том, что принимают (не отклоняют) гипотезу H_0 , в то время как справедлива конкурирующая гипотеза H_1 . Уровень значимости α задает вероятность ошибки первого рода. Обычно, используя критерии проверки гипотез, не рассматривают конкретную конкурирующую гипотезу. В таком случае при проверке гипотез о виде закона можно считать, что конкурирующая гипотеза имеет вид H_1 : $F(x) \neq F(x, \theta_0)$.

Если же гипотеза H_1 задана и имеет, например, вид $H_1: F(x) = F_1(x, \theta)$, то задание величины α для используемого критерия проверки гипотез определяет и вероятность ошибки второго рода β . Ошибка второго рода заключается в том, что не отклоняется гипотеза H_0 , когда на самом деле справедлива гипотеза H_1 .

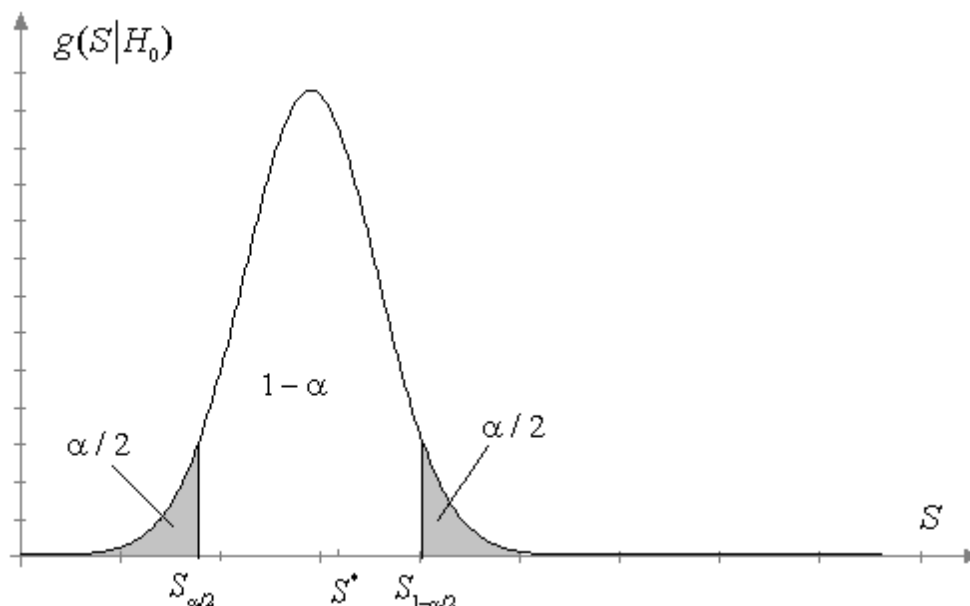


Рисунок 1.3 – Плотность распределения статистики при справедливости гипотезы H_0 и критические значения для двустороннего критерия

Вероятность ошибки второго рода β для правостороннего критерия определяется выражением:

$$\beta = \int_{-\infty}^{S_{1-\alpha}} g(s|H_1) ds, \quad (1.4)$$

а для двустороннего критерия – соотношением:

$$\beta = \int_{S_{\alpha/2}}^{S_{1-\alpha/2}} g(s|H_1) ds. \quad (1.5)$$

Для конкретной альтернативы H_0 и H_1 задание вероятности ошибки 1-го рода определяет и вероятность ошибки 2-го рода. Рисунок 1.4 поясняет это для правостороннего критерия. На рисунке 1.4 $g(s|H_0)$ характеризует плотность

распределения статистики S при справедливости гипотезы H_0 , а $g(s|H_1)$ – плотность распределения при справедливости H_1 .

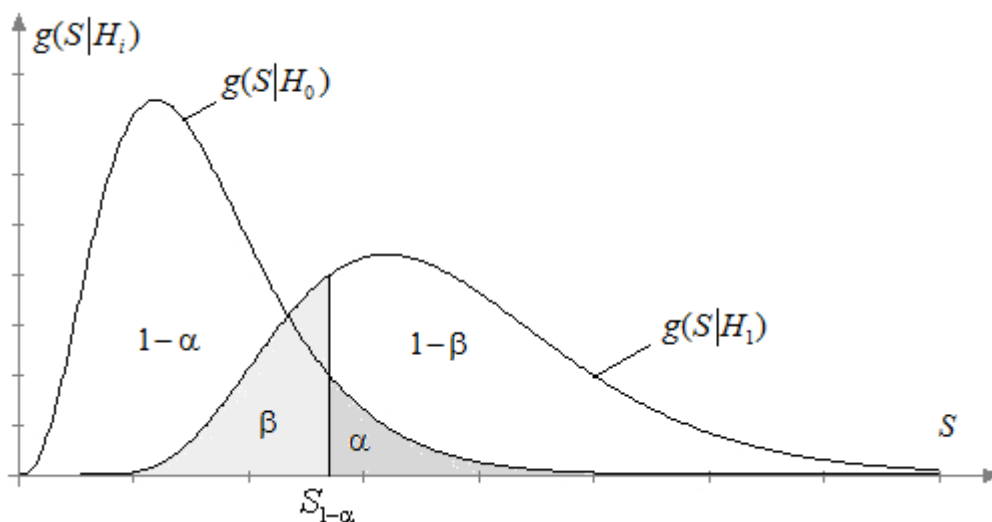


Рисунок 1.4 – Плотности распределения статистик при справедливости соответственно гипотез H_0 и H_1 в случае правостороннего критерия

Мощность критерия представляет собой величину $1 - \beta$. Стоит отметить, что чем выше мощность используемого критерия при заданном значении α , тем лучше он различает гипотезы H_0 и H_1 . Особенно важно, чтобы используемый критерий хорошо различал близкие конкурирующие гипотезы. Графически требование максимальной мощности критерия означает, что на рисунке 1.4 плотности распределений статистики $g(s|H_0)$ и $g(s|H_1)$ должны быть максимально “раздвинуты”.

Аналогичным образом можно проиллюстрировать вероятности ошибок второго рода и мощности для двустороннего критериев (Рисунок 1.5).

Очевидно, что при проверке любой статистической гипотезы желательно использовать наиболее мощный критерий, который для заданной вероятности ошибки первого рода обеспечивает минимальную вероятность ошибки второго рода относительно любой конкурирующей гипотезы H_1 .

Ещё лучше использовать равномерно наиболее мощный критерий, который для любого заданного α обеспечивает минимальное значение β . Однако существование такого критерия для проверки конкретной гипотезы H_0

является редчайшим исключением. Нет такого и среди критериев, которые могут использоваться для проверки гипотезы о принадлежности наблюдаемой выборки равномерному закону или показательному закону.

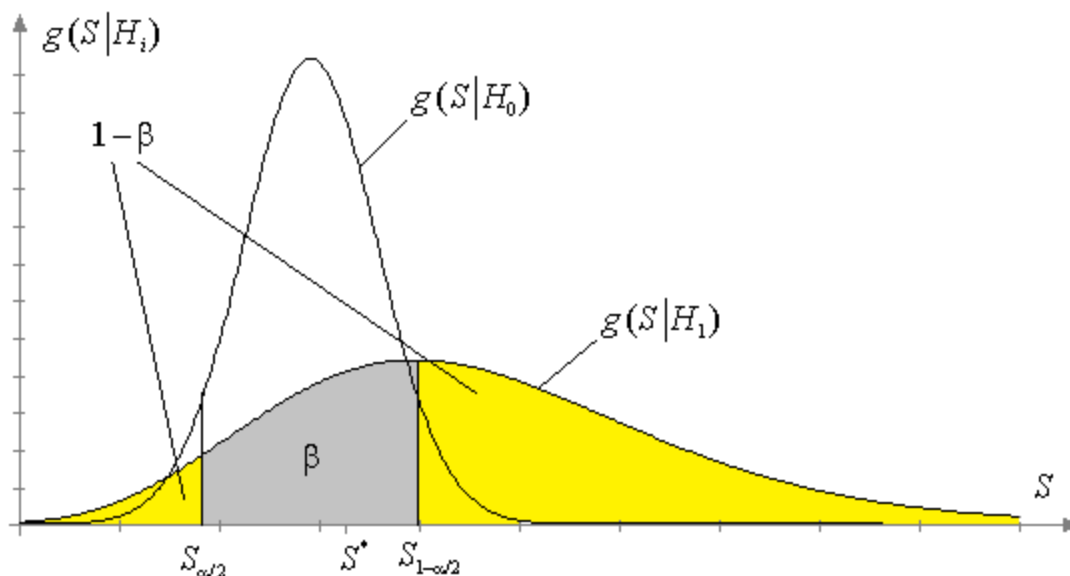


Рисунок 1.5 – Плотности распределения статистик при справедливости соответственно гипотез H_0 и H_1 в случае двустороннего критерия

В последние годы в публикациях, посвященных предлагаемым критериям или модификациям критериев проверки равномерности, как правило, пытаются сравнивать критерии по мощности, используя методы статистического моделирования. При этом перечень рассматриваемых критериев и рассматриваемых альтернатив бывает достаточно широк. Одними из таких примеров являются работы [46, 59, 122].

1.3 Проверка гипотез о равномерности

Существует множество работ, посвященных проверке гипотез о принадлежности выборки равномерному закону распределения, в которых авторами предложен достаточно обширный перечень статистических критериев. В некоторой степени обилие критериев обусловлено тем интересом, который проявляется к использованию модели равномерного закона в различных приложениях. Частота применения модели равномерного закона в задачах

статистического анализа в приложениях не в последнюю очередь определяется тем, что применение такой простой модели во многих ситуациях позволяет найти решение задачи с опорой только на аналитические методы. Если применение модели равномерного закона обосновано, то многие статистические выводы оказываются проще.

Очень часто равномерное распределение используют для описания ошибок измерений некоторых приборов или измерительных систем.

В системах статистического моделирования крайне необходима возможность моделирования псевдослучайных величин в соответствии с различными параметрическими законами, что, как правило, реализуется на базе датчиков равномерных псевдослучайных величин с использованием метода обратных функций. Очевидно, что результат в значительной степени зависит от качества датчика равномерных псевдослучайных чисел.

Множество приложений, в которых сталкиваются с использованием модели равномерного закона распределения вероятностей, объясняет повышенный интерес к выбору простых в вычислительном отношении и эффективных критериев проверки гипотез о принадлежности анализируемых выборок равномерному закону.

Если случайные величины x_1, x_2, \dots, x_n принадлежат некоторому закону с функцией распределения вероятностей $F(x)$, то случайные величины $y_i = F(x_i)$, $i = \overline{1, n}$ распределены равномерно на интервале $[0, 1]$. Поэтому во многих ситуациях вместо проверки гипотезы о принадлежности выборки x_1, x_2, \dots, x_n закону с функцией распределения $F(x)$ зачастую переходят к проверке гипотезы о принадлежности y_1, y_2, \dots, y_n равномерному закону. Не будет лишним заметить, что при подобном переходе использование классических критериев проверки равномерности, ориентированных на проверку простой гипотезы о принадлежности выборки равномерному закону, корректно, если $F(x)$ известно с точностью до значений параметров. Если же вектор параметров θ закона $F(x, \theta)$

оценивался по выборке x_1, x_2, \dots, x_n , то при справедливости проверяемой гипотезы H_0 распределение статистики любого критерия равномерности будет отличаться от имеющего место при проверке простой гипотезы.

Наличие множества критериев ставит перед инженерами не очень простую задачу выбора, так как имеющаяся в публикациях информация не позволяет однозначно отдать предпочтение какому-то определенному критерию.

В качестве одной из основных задач, поставленных перед автором данной диссертации, рассматривалось исследование множества критериев, используемых при проверке гипотезы о принадлежности выборок равномерному закону распределения. В процессе её решения преследовались следующие цели:

- выяснить, как влияет объем выборки на распределения статистик критериев при справедливости проверяемой гипотезы H_0 ;
- построить расширенные таблицы процентных точек для критериев равномерности, а также оценить сходимость к предельным распределениям в случае их наличия;
- для энтропийных критериев оценить влияние выбора оконного параметра на распределения статистик и мощность;
- получить оценки мощности критериев по отношению к некоторым близким конкурирующим гипотезам;
- на основании полученных оценок мощности упорядочить множество критериев по предпочтительности относительно некоторых типов альтернатив (некоторых видов конкурирующих гипотез);
- реализовать возможность применения рассмотренных критериев равномерности с вычислением достигнутого уровня значимости P_{value} , в том числе, в условиях отсутствия предельных (асимптотических) распределений статистик критериев.

Результаты настоящих исследований критериев проверки равномерности опубликованы в [8-10, 56-58, 100-102, 104, 132, 134, 135].

1.3.1 Проверяемая гипотеза и рассматриваемые критерии при проверке равномерности

Равномерное распределение случайной величины X на интервале $[0,1]$ будем обозначать как $Rav(0,1)$. Функция распределения вероятностей равномерного закона имеет вид $F(x) = x$ при $x \in [0,1]$. Для случайной величины, равномерно распределённой на интервале $[a,b]$, функция распределения имеет вид $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$ при $x \in [a,b]$.

При проверке гипотезы о принадлежности наблюдаемой случайной величины равномерному закону простая проверяемая гипотеза имеет вид $H_0: X \in Rav(0,1)$ или $H_0: X \in Rav(a,b)$, где a и b известны. Эту же гипотезу можно записать как $H_0: F(x) = x, x \in [0,1]$ или $H_0: F(x) = \frac{x-a}{b-a}, x \in [a,b]$.

Проверяемая гипотеза будет сложной, если по данной выборке находится и область определения равномерной случайной величины.

Для проверки гипотезы о принадлежности выборки независимых одинаково распределённых случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n равномерному закону может использоваться ряд критериев, построенных специально для проверки этой гипотезы, а также применяться совокупность классических непараметрических критериев согласия (Колмогорова, Купера, Крамера–Мизеса–Смирнова, Ватсона, Андерсона–Дарлинга, Жанга) и критерий согласия χ^2 Пирсона.

В большинстве критериев проверки равномерности опираются на оценки порядковых статистик величины X (элементы $x_{(i)}$ вариационного ряда $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)}$, построенного по выборке x_1, x_2, \dots, x_n), которые в дальнейшем, в главе 2, будем обозначать как U_i (то есть, $U_i = x_{(i)}$).

Среди множества “специальных” критериев проверки гипотезы о равномерности можно выделить три группы.

Статистики критериев первой группы предусматривают использование разностей последовательных значений вариационного ряда

$$D_i = U_i - U_{i-1},$$

где $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$, n – объем выборки.

К критериям второй группы относятся различные модификации критериев, использующие разности оценок порядковых статистик, соответствующих анализируемой выборке, и математических ожиданий этих порядковых статистик.

Третью группу составляют, так называемые, энтропийные критерии, опирающиеся на различные оценки энтропии.

Как правило, все “специальные” критерии ориентированы на проверку простой гипотезы H_0 .

Четвёртую группу составляют непараметрические критерии согласия, применяемые для проверки равномерности.

Единственным представителем пятой группы является критерий χ^2 Пирсона.

1.3.2 Конкурирующие гипотезы, рассматриваемые при проверке равномерности

При анализе мощности критериев, используемых для проверки гипотезы вида $H_0: X \in \text{Rav}(0,1)$ о принадлежности наблюдаемой случайной величины равномерному закону, в качестве конкурирующих гипотез рассматривалась принадлежность выборок различным законам распределения вероятностей. Естественно, что наиболее интересна способность критериев различать близкие конкурирующие гипотезы. Именно при анализе близких альтернатив удастся выяснить тонкие моменты, характеризующие свойства критериев, выявить принципиальные недостатки или достоинства критериев.

Статистики рассматриваемых критериев представляют собой различные меры близости законов распределения. Поэтому в зависимости от конкурирующих гипотез порядок предпочтительности критериев по мощности оказывается различным. Но можно упорядочить критерии по величине мощности относительно конкретного вида конкурирующих гипотез. Например, есть основание рассмотреть в качестве конкурирующей гипотезы H_1 закон, функция распределения которого пересекается с функцией распределения равномерного

закона, а в качестве H_2 и H_3 законы, функции распределения которых лежат выше и ниже функции равномерного (см. рис. 1.7). Исследования показали, что относительно такого вида конкурирующих гипотез порядок предпочтительности сохраняется, если рассматривать более близкую или более далёкую гипотезу вида H_i . Но этот порядок различен для H_1 , H_2 и H_3 , так как способности различать гипотезы H_0 и H_1 , и гипотезы H_0 и H_2 или H_3 у критериев оказываются различными.

Такого вида конкурирующие гипотезы легко задаются семейством бета-распределений 1-го рода с функцией плотности

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2 B(\theta_0, \theta_1)} \left(\frac{x - \theta_3}{\theta_2} \right)^{\theta_0 - 1} \left(1 - \frac{x - \theta_3}{\theta_2} \right)^{\theta_1 - 1}, \quad (1.6)$$

где $B(\theta_0, \theta_1) = \Gamma(\theta_0)\Gamma(\theta_1) / \Gamma(\theta_0 + \theta_1)$ – бета-функция, $\theta_0, \theta_1 \in (0, \infty)$ – параметры формы, $\theta_2 \in (0, \infty)$ – масштабный параметр, $\theta_3 \in (-\infty, \infty)$ – параметр сдвига, $x \in [0, \theta_2]$.

Если обозначим функцию бета-распределения 1-го рода при конкретных значениях параметров как $B_I(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$, то три выбранные для конкретности и рассматриваемые далее достаточно близкие к H_0 конкурирующие гипотезы H_1 , H_2 , H_3 принимают следующий вид:

$$H_1 : F(x) = B_I(1.5, 1.5, 1, 0), \quad x \in [0, 1];$$

$$H_2 : F(x) = B_I(0.8, 1, 1, 0), \quad x \in [0, 1];$$

$$H_3 : F(x) = B_I(1.1, 0.9, 1, 0), \quad x \in [0, 1].$$

Функции распределения вероятностей, соответствующие рассматриваемым гипотезам, приведены на рисунке 1.6, а плотности распределений – на рисунке 1.7.

Заметим, что анализ мощности критериев относительно H_1 позволил обнаружить неспособность отдельных критериев при малых объёмах выборок n и малых уровнях значимости α отличать эту гипотезу от H_0 , то есть показал смещённость соответствующих критериев (мощность $1 - \beta$ оказывается меньше α).

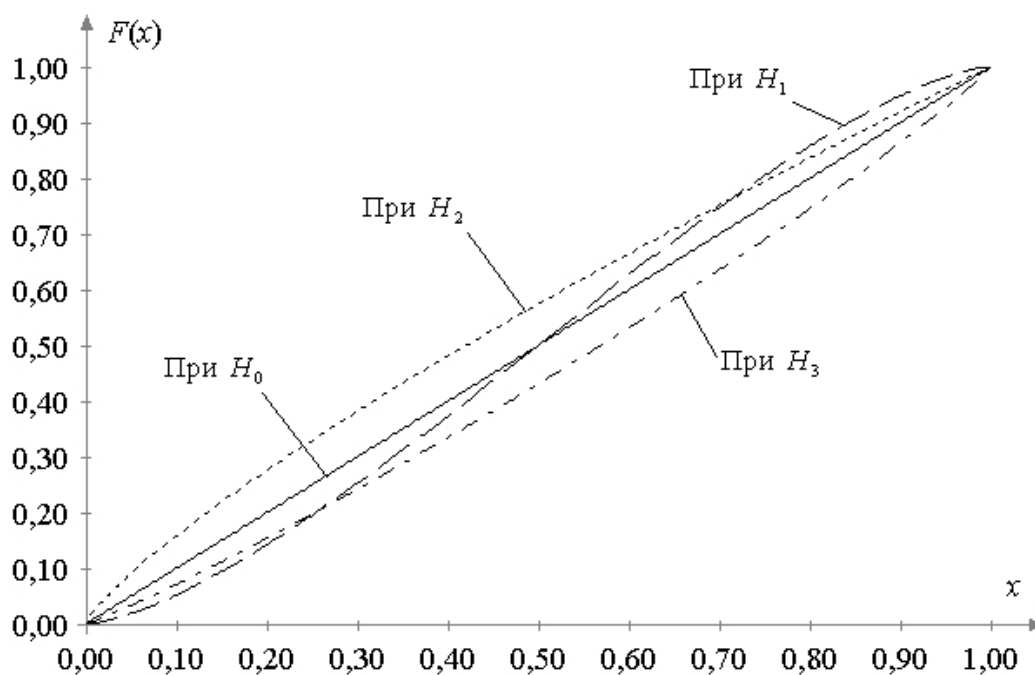


Рисунок 1.6 – Функции распределения вероятностей, соответствующие конкурирующим гипотезам

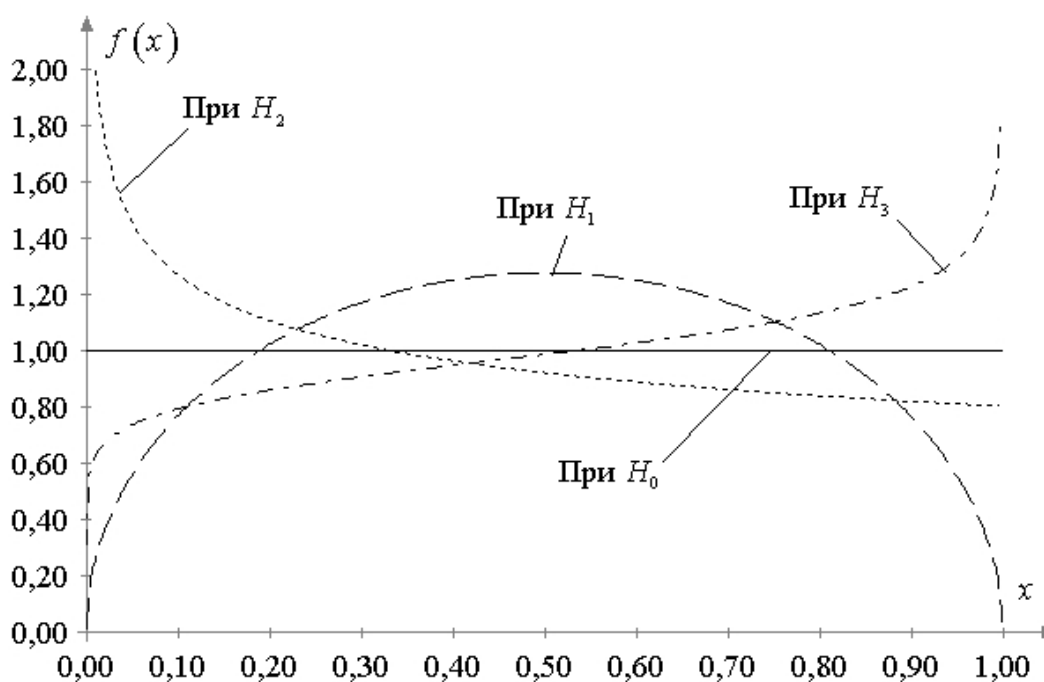


Рисунок 1.7 – Плотности распределения вероятностей, соответствующие конкурирующим гипотезам

Причем указанный недостаток оказался свойственным не только значительной части специальных критериев проверки равномерности, но и большей части непараметрических критериев согласия.

1.3.3 Проверка равномерности на интервале $[a, b]$

Все рассматриваемые критерии проверки равномерности изложены для стандартного случая проверки равномерности на интервале $[0, 1]$. И после формирования по исходной выборке x_1, x_2, \dots, x_n вариационного ряда $0 < x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)} < 1$ в статистиках критериев используются порядковые статистики следующего вида $U_i = x_{(i)}$, $i = \overline{1, n}$, $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$.

В случае проверки гипотезы о принадлежности выборки x_1, x_2, \dots, x_n равномерному закону с параметром сдвига a и параметром масштаба $b - a$ для использования всех рассматриваемых в руководстве критериев следует поступать следующим образом.

По элементам $x_{(i)}$ вариационного ряда $a < x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)} < b$, построенного по выборке x_1, x_2, \dots, x_n порядковые статистики, используемые в критериях, принимают вид $U_i = \frac{x_{(i)} - a}{b - a}$, $i = \overline{1, n}$, $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$.

Весь дальнейший порядок применения рассматриваемых критериев проверки равномерности остаётся неизменным (как и на интервале $[0, 1]$).

1.3.4 Проверка сложных гипотез о равномерности закона

В общем случае при проверке гипотезы о принадлежности наблюдаемой случайной величины равномерному закону *простая* проверяемая гипотеза имеет

вид $H_0: F(x) = \frac{x - a}{b - a}$, $x \in [a, b]$, где a и b известны.

Проверяемая гипотеза будет *сложной*, если по данной выборке находится и область определения равномерной случайной величины, то есть находятся оценки параметра сдвига a и параметра масштаба $b - a$.

Пусть x_1, x_2, \dots, x_n – выборка независимых наблюдений случайной величины X , по элементам которой построен вариационный ряд $x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)}$.

Напомним, что $x_{(1)} = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_{(n)} = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Хорошей оценкой параметра сдвига является [132]

$$\hat{a} = x_{(1)} - \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{n-1}, \quad (1.7)$$

а оценкой правой границы области определения равномерной случайной величины будет

$$\hat{b} = x_{(n)} + \frac{x_{(n)} - x_{(1)}}{n-1}. \quad (1.8)$$

Следовательно, оценка параметра масштаба равномерного закона принимает вид

$$\hat{b} - \hat{a} = \frac{n+1}{n-1} (x_{(n)} - x_{(1)}). \quad (1.9)$$

Стоит отметить, что проверка сложной гипотезы о принадлежности x_1, x_2, \dots, x_n равномерному закону на интервале $[\hat{a}, \hat{b}]$, полученному по данной выборке, эквивалентна проверке простой гипотезы о принадлежности части выборки меньшего объема $n-2$, соответствующей ряду $x_{(2)} < x_{(3)} < \dots < x_{(n-1)}$, равномерному закону на интервале $[x_{(1)}, x_{(n)}]$, который соответствует размаху выборки.

В этом случае при использовании всех рассматриваемых в руководстве критериев значения порядковых статистик находим в соответствии с соотношениями

$$U_{i-1} = \frac{x_{(i)} - x_{(1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}}, \quad i = \overline{2, (n-1)}, \quad U_0 = 0, \quad U_{n-1} = 1 \quad \text{и вычисляем статистику}$$

применяемого критерия при объеме выборки $n-2$.

А далее решение о результатах проверки принимаем, опираясь на распределение статистики критерия при объеме выборки $n-2$, или сравнивая значение статистики с критическим, взятым из соответствующей таблицы процентных точек при $n-2$. При справедливости проверяемой гипотезы элементы вариационного ряда $U_i, i = \overline{1, (n-2)}$, распределены равномерно на интервале $[0, 1]$.

1.4 Проверка гипотез об экспоненциальности

Экспоненциальный закон распределения вероятностей является базовым законом, используемым в теории надежности. Его аналитическая простота делает его привлекательным для инженеров и исследователей. В то же время, прежде чем использовать данную модель следует убедиться, что поведение наблюдаемой случайной величины (например, моментов отказов изделий) согласуется с «желаемым» экспоненциальным законом. В противном случае выигрыш от простоты расчетов будет многократно «компенсирован» потерями от некорректности выводов, вызванных отклонением реального закона распределения от экспоненциального закона.

Проверке гипотез о принадлежности выборки экспоненциальному закону распределения посвящено множество работ, в которых авторами предлагаются различные статистические критерии. Обилие критериев обусловлено частым использованием модели показательного закона в приложениях. А частота использования не в последнюю очередь определяется тем, что применение такой простой модели во многих ситуациях позволяет найти решение задачи с опорой только на аналитические методы.

В некоторых работах, например, в [3,30] рассматривался достаточно широкий ряд критериев показательности, и методами статистического моделирования исследовалась их мощность по отношению к некоторым важным конкурирующим гипотезам. Рассмотрение результатов работы позволило выделить критерии, перспективные как для применения в случае конкурирующих законов с определенной формой функции интенсивности отказов, так и предпочтительные для применения в случае наличия широкого класса конкурирующих гипотез.

Наличие множества критериев ставит перед практиками не очень простую задачу выбора, так как имеющаяся в публикациях информация не позволяет однозначно отдать предпочтение какому-то определенному критерию.

Исследование множества критериев, используемых при проверке гипотезы о принадлежности выборок показательному закону распределения, явилось второй основной задачей, поставленной перед автором данной диссертации. В процессе её решения преследовались аналогичные цели:

- выяснить, как влияет объем выборки на распределения статистик критериев при справедливости проверяемой гипотезы H_0 ;
- построить расширенные таблицы процентных точек для критериев показательности, а также оценить сходимость к предельным распределениям в случае их наличия;
- получить оценки мощности критериев по отношению к некоторым близким конкурирующим гипотезам с различными характеристиками интенсивности;
- на основании полученных оценок мощности упорядочить множество критериев по предпочтительности относительно некоторых типов альтернатив (некоторых видов конкурирующих гипотез);
- реализовать возможность применения рассмотренных критериев показательности с вычислением достигнутого уровня значимости p_{value} , в том числе, в условиях отсутствия предельных (асимптотических) распределений статистик критериев.

Результаты данных исследований опубликованы в [12, 105].

1.4.1 Проверяемая гипотеза и виды критериев при проверке показательности

Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — выборка независимых наблюдений случайной величины X . В качестве проверяемой гипотезы H_0 рассматривается принадлежность выборки показательному закону с плотностью $f(x) = \exp(-x)$.

Для проверки гипотезы H_0 может использоваться множество классических критериев согласия (Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова, Андерсона–Дарлинга, Купера, Ватсона, χ^2 Пирсона), а также 3 критерия Жанга.

В этих же целях может использоваться целый ряд критериев, построенных специально для проверки этой гипотезы.

В связи с разнообразием статистик специальных критериев их довольно сложно разделить на группы. Можно отметить, что при вычислении статистик части специальных критериев используются элементы вариационного ряда $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$.

В ряде других критериев порядок следования элементов не имеет значения.

В некоторых статистиках используются модифицированные выборки с элементами $z_i = \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$, использующие оценки сдвига и масштаба. Например, в корреляционных критериях используются оценки вида:

$$\hat{\sigma} = \frac{n(\bar{x} - x_{(1)})}{n-1}; \hat{\mu} = x_{(1)} - \frac{\hat{\sigma}}{n}.$$

Некоторые критерии используют только оценку параметра масштаба с нулевым сдвигом:

$$z_i = \frac{x_i}{\bar{x}}.$$

1.4.2 Конкурирующие гипотезы, рассматриваемые при проверке показательности

Показательному закону соответствует постоянная интенсивность отказов. В связи с этим естественно в качестве конкурирующих рассматривать законы, принадлежащие к классам с возрастающими, убывающими и немонотонными интенсивностями отказов [138, 139].

При выборе конкурирующих законов в данном случае исходили из тех же соображений, что и при исследовании критериев равномерности. Основные исследования мощности проводились относительно следующих трех конкурирующих гипотез:

H_1 : $LN(1)$ – логнормальное распределение с плотностью $f(x) = (\theta x \sqrt{2\pi})^{-1} \exp(-(\ln x)^2 / 2\theta^2)$ и с параметром масштаба $\theta = 1$ в качестве гипотезы с немонотонной интенсивностью отказов;

H_2 : $W(0.7)$ – распределение Вейбулла с плотностью $f(x) = \theta x^{\theta-1} \exp(-x^\theta)$, с параметром формы $\theta = 0.7$ в качестве гипотезы с убывающей интенсивностью отказов;

H_3 : $W(1.2)$ – распределение Вейбулла с параметром формы $\theta = 1.2$ в качестве гипотезы с возрастающей интенсивностью отказов.

Функции распределений, плотности и интенсивности отказов, соответствующие проверяемой и конкурирующим гипотезам, представлены на рисунках 1.8, 1.9 и 1.10 соответственно.

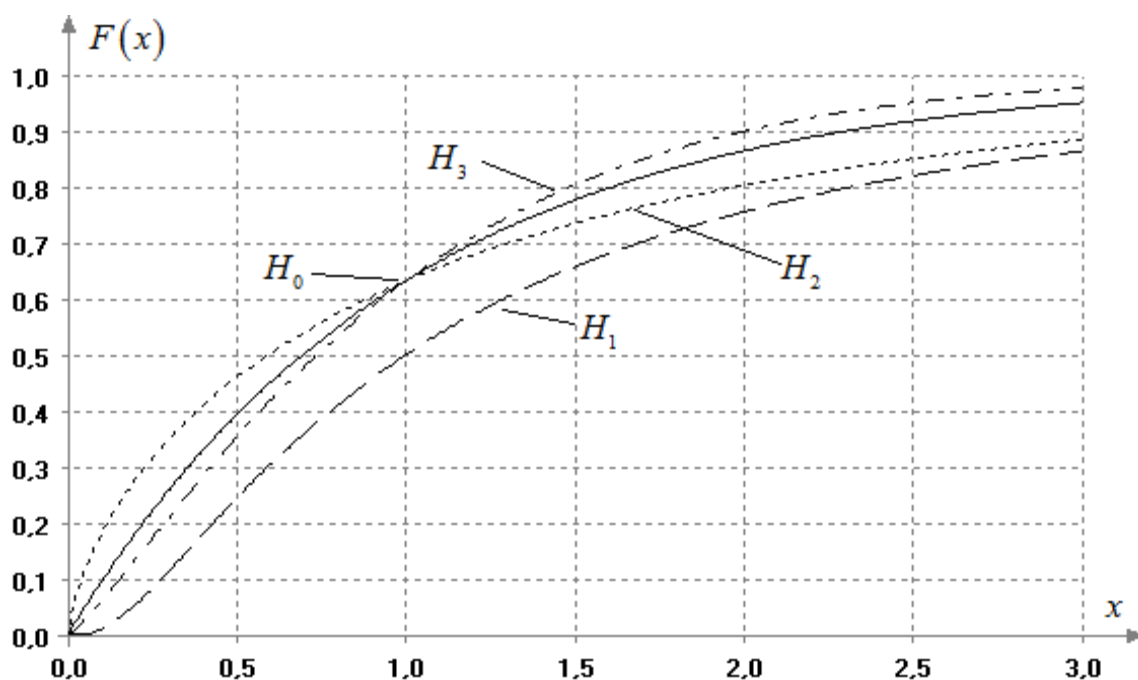


Рисунок 1.8 – Функции распределения вероятностей, соответствующие конкурирующим гипотезам

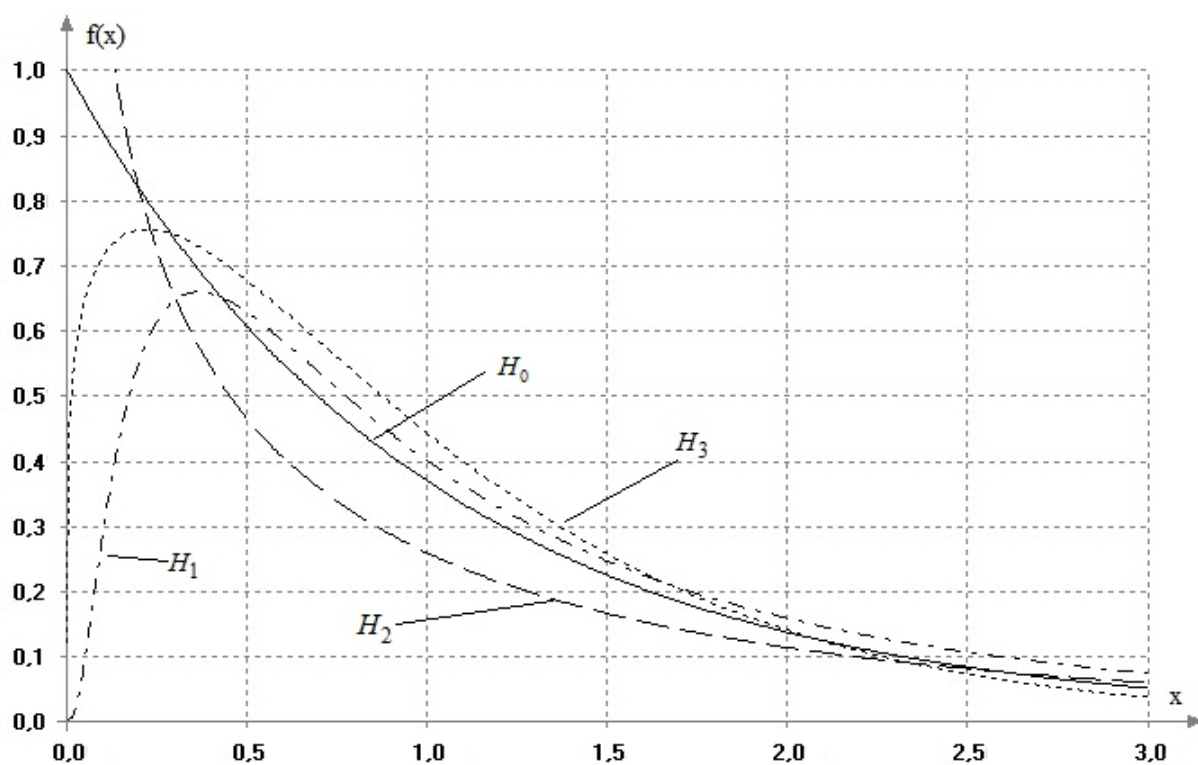


Рисунок 1.9 – Плотности распределения законов, соответствующие конкурирующим гипотезам

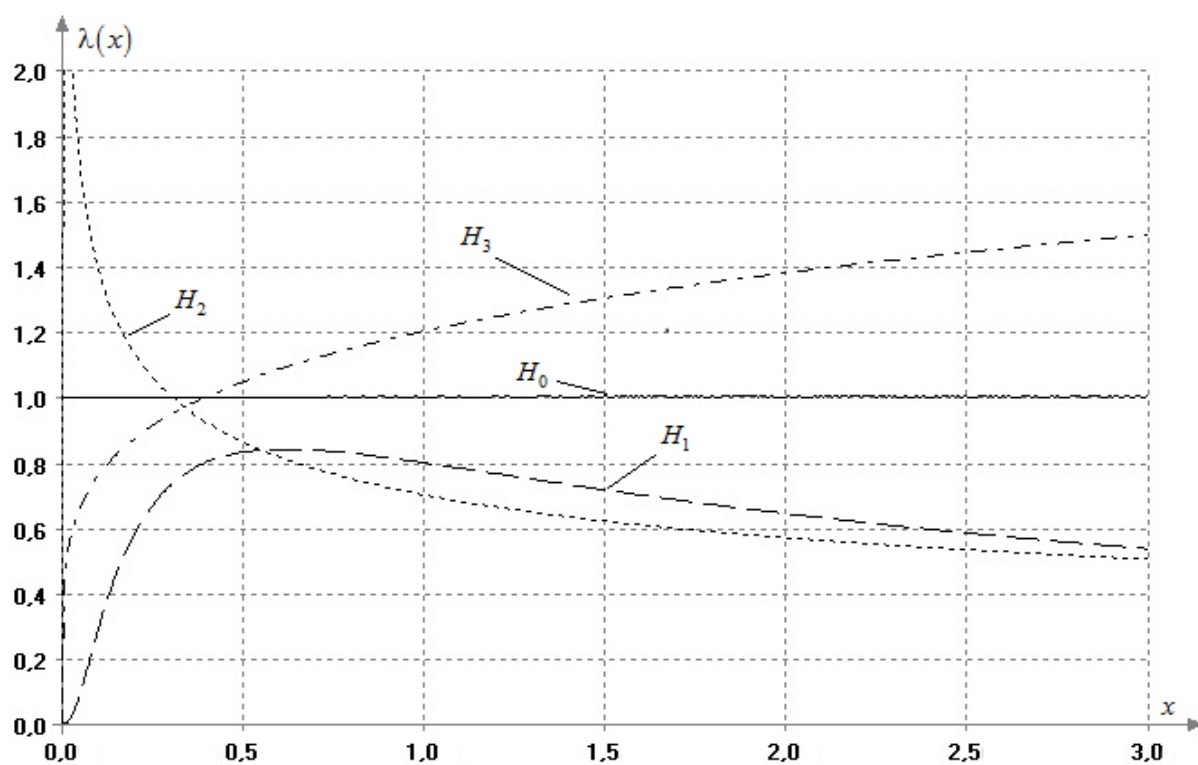


Рисунок 1.10 – Интенсивности отказов распределений, соответствующие конкурирующим гипотезам

1.5 Статистическое моделирование

При разработке статистических критериев обычно рассматривают вопрос о состоятельности критериев против тех или иных альтернатив и стремятся получить вид распределения статистики при истинности проверяемой гипотезы. Решение этих задач в рамках аппарата аналитических методов, как правило, требует существенных усилий, а аналитическое решение зачастую просто не существует. Ограниченность человеческих сил и обширность имеющихся задач просто требуют применения методов статистического (имитационного) моделирования для изучения статистических закономерностей.

Различные авторы прибегали к моделированию распределений статистик критериев и в относительно ранний период [3, 30], и прибегают в настоящее время [59, 73]. Возрастание количества исследований с использованием статистического моделирования обусловлено расширением классов решаемых задач, экспоненциальным ростом производительности компьютеров, развитием статистических и математических пакетов и библиотек, реализующих моделирование по методу Монте-Карло, а также соответствующих программ, самостоятельно разработанных различными исследователями.

Аналитические выводы обычно носят асимптотический характер, в то время как на практике чаще сталкиваются с выборками конечного объема, для которых асимптотические результаты не всегда оказываются применимыми. Классические критерии согласия Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга при проверке сложных гипотез теряют свойство свободы от распределения, а в ряде случаев распределения их статистик зависят сразу от метода оценивания, набора оцениваемых параметров распределения и даже конкретных значений параметров наблюдаемого распределения, не обязательно относящихся к оцениваемым.

В настоящей работе множество рассматриваемых критериев исследовалось методами статистического моделирования. При исследовании распределений статистик соответствующих критериев количество экспериментов,

осуществляемых при статистическом моделировании, как правило, принималось равным 1 660 000. Такое количество экспериментов позволяет, с одной стороны, проследить качественную картину, отражающую изменение распределений статистик в зависимости от различных факторов, с другой – обеспечить приемлемую точность получаемых оценок мощности и искомых вероятностей.

Количество экспериментов было получено по формуле [121]:

$$N \geq t_{\gamma}^2 \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2}; \quad (1.10)$$

где $t_{\gamma} = \Phi^{-1}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)$ – квантиль стандартного нормального распределения и ε обозначается заданная точность. Пусть $\gamma = 0.99$, тогда $t_{\gamma} = 2.576$. Взяв $\varepsilon = 0.001$ (для точности до 3 знака в дальнейших вычислениях) и учитывая, что для любого p выполняется неравенство $p(1-p) \leq 0.25$ получаем по (1.10), что для заданной точности достаточно $N = 1\,658\,724$. Данное число для удобства округленно в большую сторону до 1 660 000.

Компьютерные методы анализа дают возможность выявить достоинства и недостатки отдельных критериев, оценить при каких объемах выборок отличием действительных распределений статистик (при справедливости проверяемой гипотезы) от асимптотических (предельных) распределений статистик можно практически пренебречь, позволяют провести сравнительный анализ мощности критериев относительно различных конкурирующих гипотез, выделить наиболее предпочтительные критерии.

Выводы по главе

В данной главе были рассмотрены используемые в диссертации основные понятия, определения и обозначения в задачах проверки гипотез.

Затрагивается вопрос важности применения равномерного и показательного распределений в приложениях. Из факта наличия большого количества критериев, ориентированных на проверку гипотез о принадлежности выборок данным законам распределения, и отсутствия информации о предпочтительности

применения тех или иных критериев вытекает необходимость исследования реальных свойств множества критериев, оценки мощности относительно различных конкурирующих гипотез, в ранжировании этих критериев по предпочтительности.

Множество специальных критериев равномерности разбиты на группы по особенностям используемых в них статистик. Предложены близкие к равномерному законы, рассматриваемые в качестве конкурирующих при проверке гипотезы о равномерности и используемые при исследовании свойств критериев и сравнительном анализе мощности рассматриваемых критериев равномерности, осуществляемых во 2-й главе. Рассмотрены ситуации проверки равномерности на интервале $[a, b]$ и способы сведения их к стандартной проверке равномерности на интервале $[0, 1]$.

Приведены некоторые оценки параметров, используемые в критериях проверки гипотезы об экспоненциальности наблюдаемого закона. Выбраны конкурирующие законы, близкие к экспоненциальному и рассматриваемые в качестве конкурирующих при исследовании свойств и сравнительном анализе мощности множества критериев показательности в 3-й главе.

Дается информация о точности моделирования с обоснованием выбора количества имитационных экспериментов $N = 1\ 660\ 000$, используемого на протяжении всей работы и обеспечивающего погрешность при моделировании эмпирических распределений статистик в пределах $\pm 10^{-3}$.

2 ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ КРИТЕРИЕВ РАВНОМЕРНОСТИ

2.1 Критерий Шермана

Критерий Шермана [77, 78, 116] относится к первой группе специальных критериев, использующей разности элементов вариационного ряда. Статистика критерия имеет вид:

$$\omega_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \left| U_i - U_{i-1} - \frac{1}{n+1} \right|, \quad (2.1)$$

где U_i – элементы вариационного ряда, построенного по выборке x_1, x_2, \dots, x_n объёмом n , $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$.

Критерий правосторонний: гипотеза H_0 отклоняется при больших значениях статистики ω_n . Критические значения статистики (2.1), полученные в результате статистического моделирования и расширяющие таблицу процентных точек, приведенную в [77, 78, 116], представлены в таблице А.1, в приложениях.

При справедливости H_0 и больших объёмах выборок n статистика ω_n приближенно подчиняется нормальному распределению. Зависимость распределений статистики (2.1) от объёма выборки иллюстрирует рисунок 2.1.

Распределение нормализованной статистики

$$\omega_n^* = \frac{\omega_n - E[\omega_n]}{\sqrt{D[\omega_n]}}, \quad (2.2)$$

где математическое ожидание и дисперсия статистики (2.1) определяются выражениями

$$E[\omega_n] = \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1}, \quad D[\omega_n] = \frac{2n^{n+2} + n(n-1)^{n+2}}{(n+2)(n+1)^{n+2}} - \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2n+2},$$

при $n \rightarrow \infty$ сходится к стандартному нормальному закону [77, 116].

Отметим, что оценки математического ожидания и дисперсии распределений статистики (2.1), получаемые при статистическом моделировании, совпадают со значениями, вычисляемыми по приведенным формулам для $E[\omega_n]$ и $D[\omega_n]$, с точностью до 3-го знака.

Отличием распределения статистики (2.2) от стандартного нормального закона можно пренебрегать при $n \geq 20$.

В [6] предложена ещё одна модификация статистики, задаваемая выражением

$$\tilde{\omega}_n = V - \frac{0,0955}{\sqrt{n}}(V^2 - 1), \quad (2.3)$$

где

$$V = \frac{\omega_n - 0,3679 \left(1 - \frac{1}{2n}\right)}{\frac{0,2431}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{0,605}{n}\right)}.$$

Распределение модифицированной статистики (2.3) ещё быстрее сходится к стандартному нормальному закону (Рисунок 2.2).

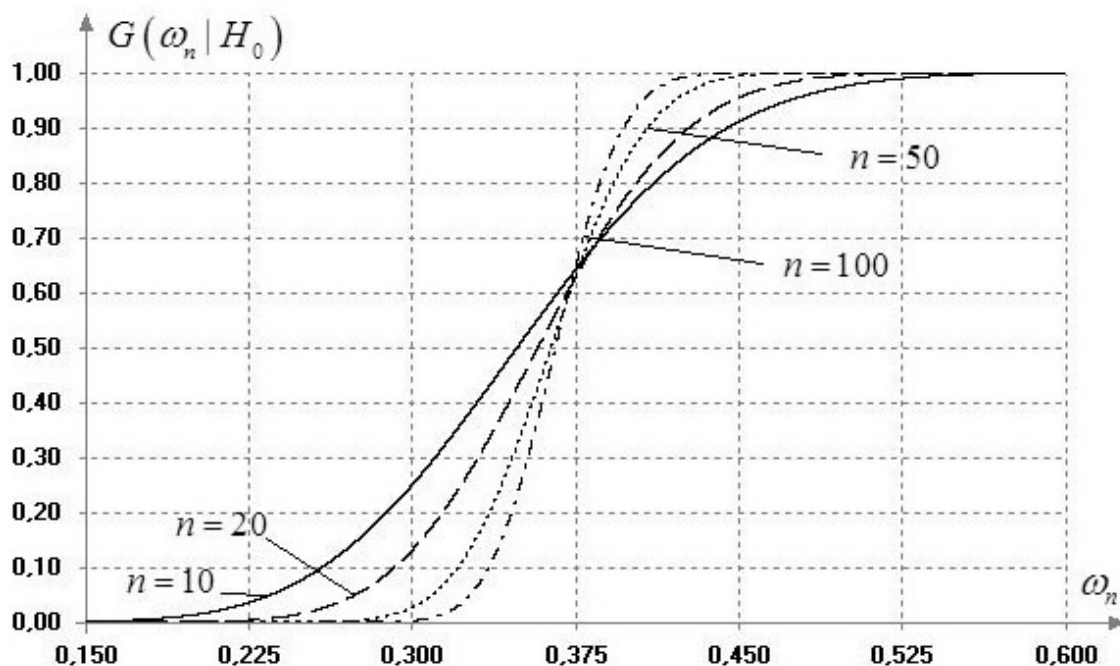


Рисунок 2.1 – Зависимость распределения статистики (2.1) Шермана от n

Оценки мощности критерия равномерности Шермана для значений вероятностей ошибок 1-го рода $\alpha = 0.15, 0.1, 0.05, 0.025, 0.01$, полученные в результате статистического моделирования, по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 приведены в таблице Б.1 (Приложение Б), оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в таблицах Б.2 и Б.3 соответственно.

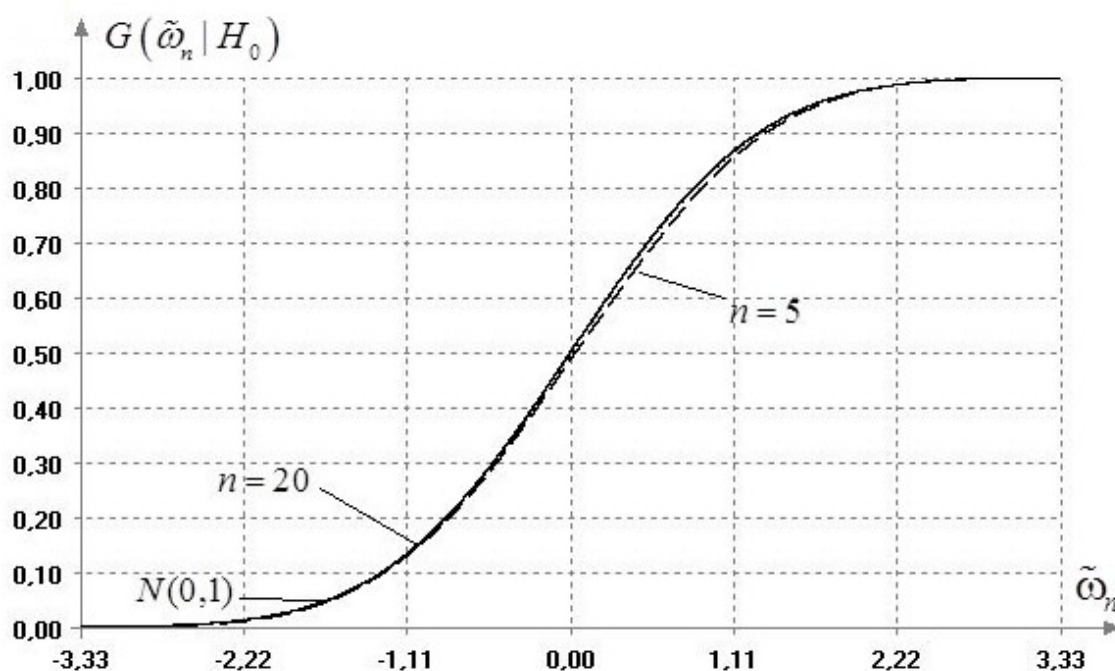


Рисунок 2.2 – Сходимость распределения статистики (2.3) Шермана к стандартному нормальному закону $N(0,1)$

По отношению к конкурирующей гипотезе H_1 при малых n и α отмечена смещённость критерия Шермана (мощность $1 - \beta$ оказывается меньше заданной вероятности ошибки 1-го рода α). Чтобы подчеркнуть это, в таблице Б.1 соответствующие оценки мощности выделены серым цветом.

Для иллюстрации факта смещённости на рисунке 2.3 показаны распределения $G(\omega_n | H_i)$ статистики (2.1) Шермана, соответствующие справедливости H_0 и H_1 , при объёмах выборок $n=10$ и $n=50$.

Критерий правосторонний, и проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистики. Как можно видеть, распределение статистики $G(\omega_{10} | H_1)$, имеющее место при справедливости H_1 , сдвинуто относительно

$G(\omega_{10}|H_0)$ не вправо, а влево. Следовательно, мощность $1-\beta$ оказывается меньше соответствующего α . С ростом n смещённость исчезает ($G(\omega_{50}|H_0)$ и $G(\omega_{50}|H_1)$ на рисунке 2.3).

В качестве недостатка критерия Шермана, наряду с возможной смещённостью, можно указать, как правило, невысокую мощность.

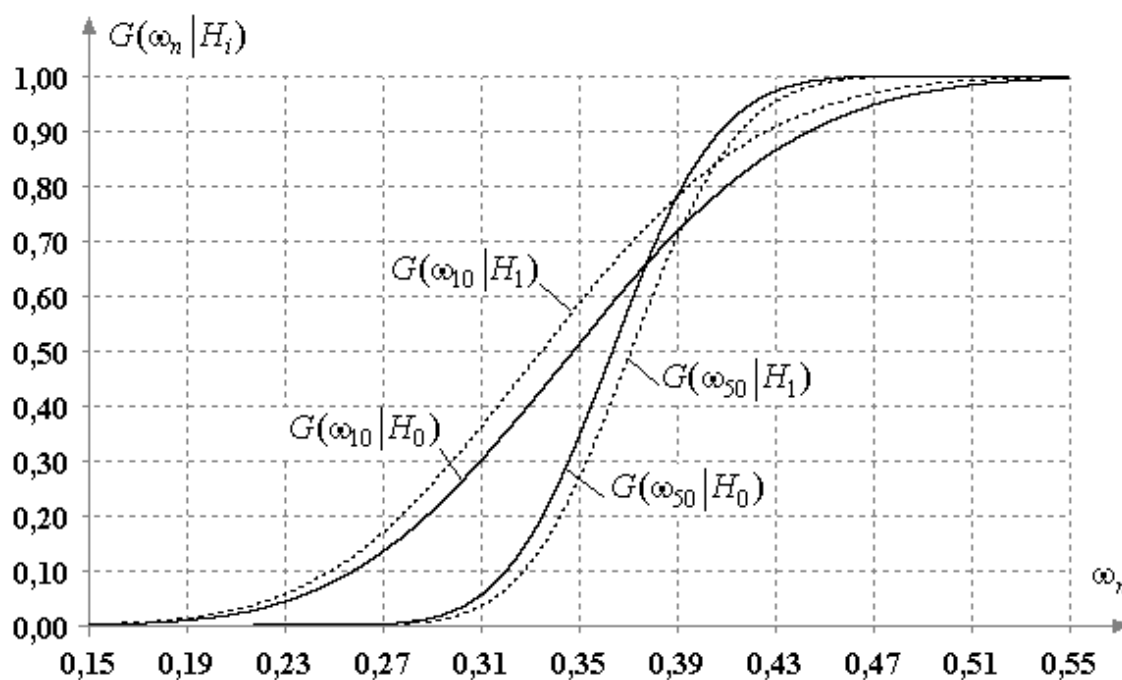


Рисунок 2.3 – Распределения $G(\omega_n | H_i)$ статистики (2.1) Шермана

2.2 Критерий Кимбелла

Статистика критерия Кимбелла [38] похожа на статистику критерия Шермана и имеет вид

$$A = \sum_{i=1}^{n+1} \left(U_i - U_{i-1} - \frac{1}{n+1} \right)^2, \quad (2.4)$$

где, как и в критерии Шермана, U_i – элементы вариационного ряда, построенного по выборке x_1, x_2, \dots, x_n объёмом n , $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$.

Проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при больших значениях статистики (2.4) (критерий правосторонний). Критические значения статистики Кимбелла,

полученные в результате статистического моделирования, представлены в таблице А.2.

Зависимость распределения статистики от объема выборок n иллюстрирует рисунок 2.4.

Полученные в результате статистического моделирования оценки мощности критерия Кимбелла при проверке равномерности по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 представлены в таблице Б.4, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в таблицах Б.5 и Б.6 соответственно.

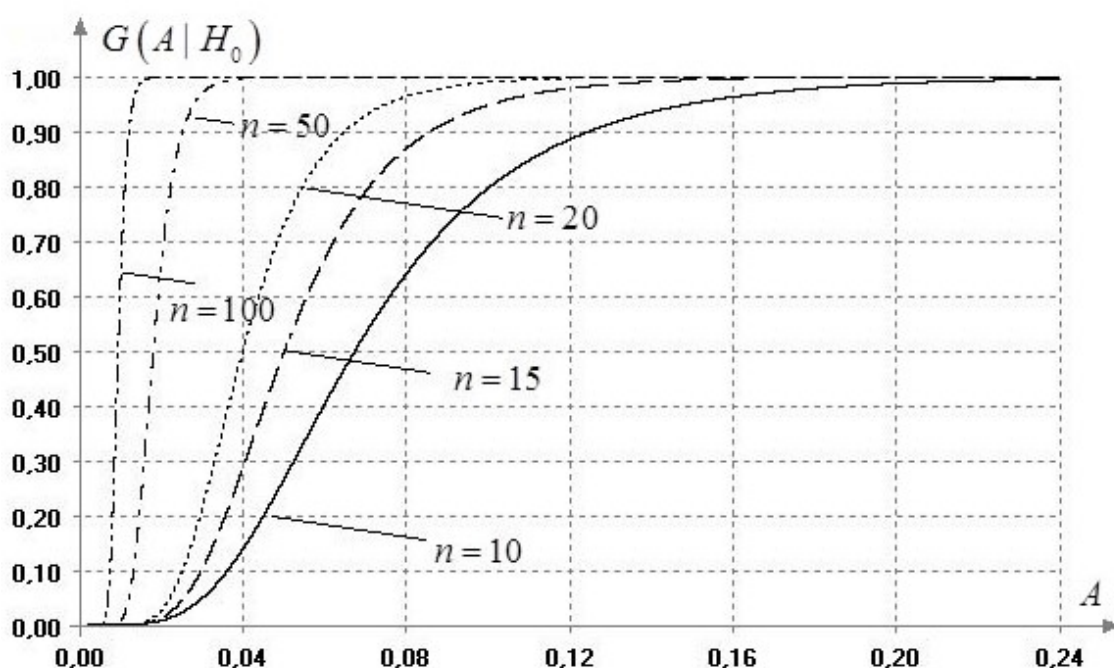


Рисунок 2.4 – Распределения статистики (2.4) критерия Кимбелла
в зависимости от n

Как и критерий Шермана, по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 при малых n и α критерий Кимбелла оказывается смещенным (мощность $1 - \beta$ оказывается меньше заданной вероятности ошибки 1-го рода α). В таблице Б.4 такие оценки мощности выделены серым цветом.

В целом же критерий Кимбелла показывает несколько большую мощность по сравнению с критерием Шермана.

Недостатком при использовании критерия является зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек.

По своим статистическим свойствам критерий Кимбелла эквивалентен критерию равномерности Морана со статистикой (2.5) и критерию равномерности Гринвуда со статистикой (2.21).

2.3 Критерий Морана 1

Статистика предложенного в [62] критерия очень близка к статистике критерия Кимбелла и имеет вид:

$$B = \sum_{i=1}^{n+1} (U_i - U_{i-1})^2, \quad (2.5)$$

где также $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$.

Критерий правосторонний. Процентные точки распределения статистики (2.5), полученные при статистическом моделировании представлены в таблице А.3. Зависимость распределений статистики критерия от объема выборок n при справедливости проверяемой гипотезы H_0 иллюстрирует рис. 2.5.

Естественно, распределения статистики (2.5) при справедливости проверяемой гипотезы H_0 или справедливости конкурирующих гипотез отличаются от соответствующих распределений статистики (2.4), однако выводы при использовании данного критерия всегда будут идентичны выводам по критерию Кимбелла. Аналогично, относительно тех же конкурирующих гипотез критерии эквивалентны по мощности. Критерий эквивалентен критерию равномерности Гринвуда (2.21).

В частности, оценки мощности критерия со статистикой (2.5) относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 полностью совпадают с соответствующими оценкам для критерия Кимбелла (см. таблицы Б.4–Б.6).

Недостаток у критерия Морана тот же, что и у критерия Кимбелла: зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек.

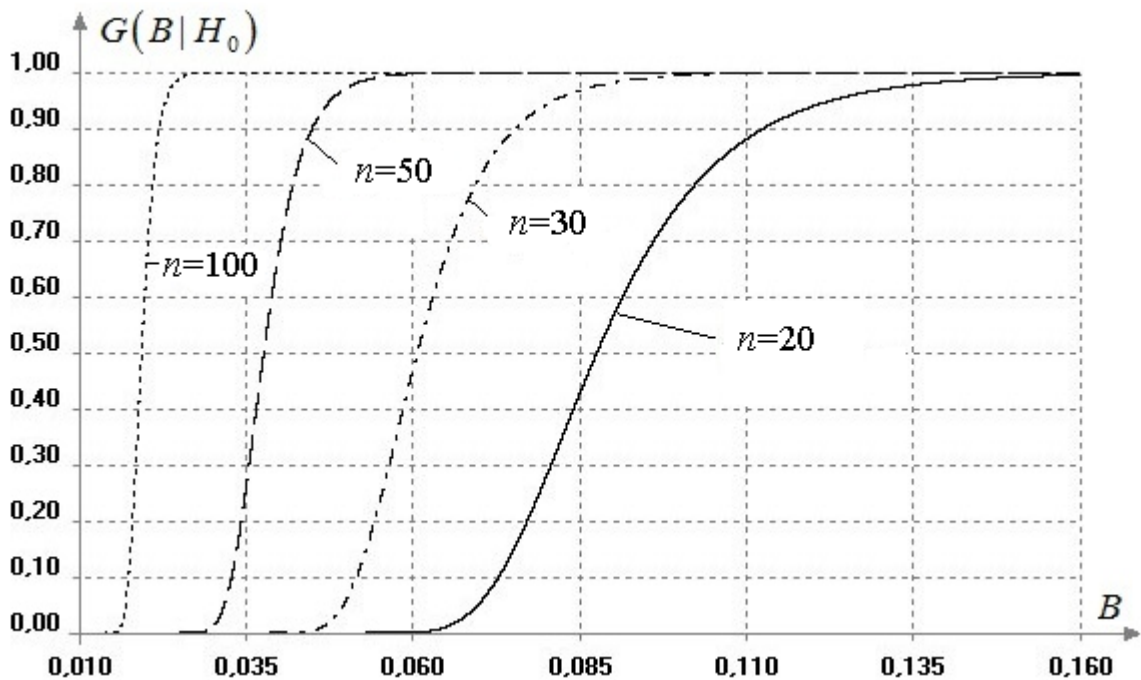


Рисунок 2.5 – Распределения статистики (2.5) критерия Морана в зависимости от n

2.4 Критерий Морана 2

Статистика критерия, предложенного Мораном в [63] имеет вид

$$M_n = - \sum_{i=1}^{n+1} \ln[(n+1)(U_i - U_{i-1})], \quad (2.6)$$

где $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$.

Хотя в [116] говорится, что критерий двусторонний, на самом деле он правосторонний. При заданном уровне значимости α проверяемая гипотеза H_0 о равномерности не отклоняется при $M_n \leq M_{n,\alpha}$. Критические значения статистики (2.6), полученные в результате статистического моделирования, несколько расширяющие и уточняющие результаты [14], представлены в таблице А.4.

Оценки мощности критерия Морана со статистикой (2.6) относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 представлены в таблицах Б.7–Б.9

соответственно. Можно отметить смещённость критерия относительно H_1 при малых n .

В [68] показано, что статистика

$$\tilde{M}_n = \frac{12(n+1)}{7n+8} M_n \quad (2.7)$$

подчиняется χ^2 -распределению с n степенями свободы. Тогда при заданном уровне значимости α проверяемая гипотеза H_0 о равномерности не отклоняется при $\tilde{M}_n \leq \chi_{n,1-\alpha}^2$, где $\chi_{n,1-\alpha}^2$ – соответствующая квантиль χ_n^2 -распределения. Опираясь на χ_n^2 -распределение в соответствии с соотношением (1.2) может быть найдено приближенное значение достигнутого уровня значимости (p-value).

Однако действительное распределение статистики (2.7) заметно отличается от χ_n^2 -распределения. На рисунке 2.6 показано распределение $G(\tilde{M}_n | H_0)$ статистики (2.7) при $n=50$ и соответствующее χ_{50}^2 -распределение, которые существенно отличаются, что может приводить к некорректности вывода.

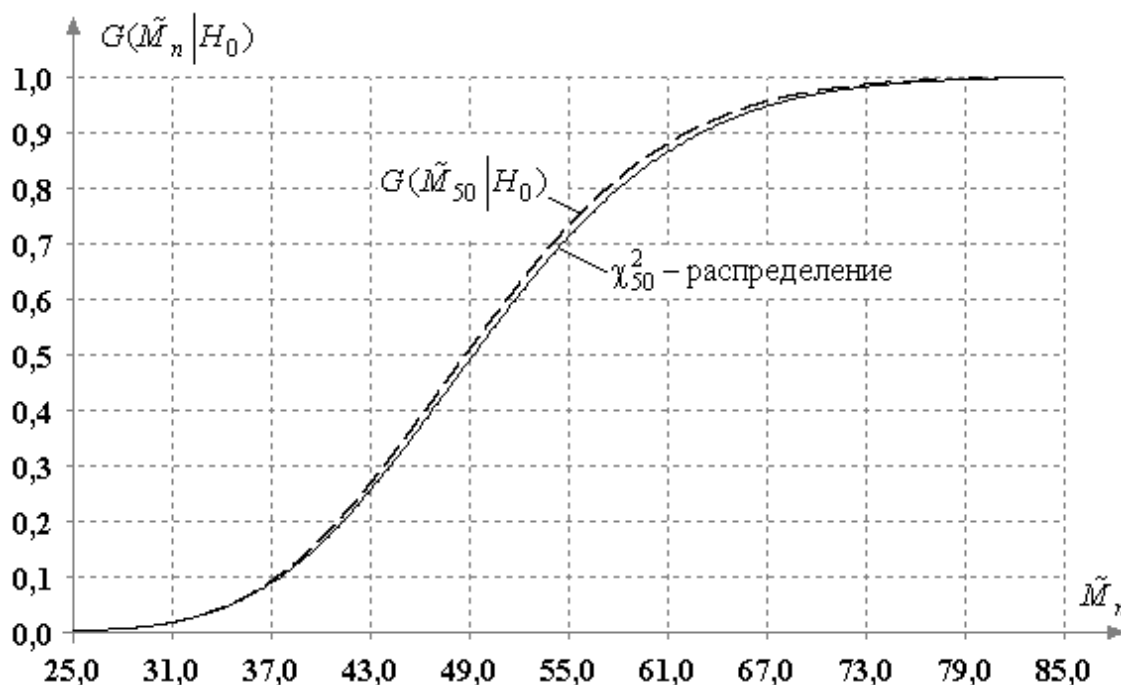


Рисунок 2.6 – Распределения статистики (2.7) при $n = 50$ и аппроксимирующее χ_{50}^2 -распределение

В [116] говорится, что, используя аппроксимацию Вилсона-Хилферти, можно перейти к статистике

$$z = \frac{\sqrt[3]{\tilde{M}_n} - \left(1 - \frac{2}{9n}\right)}{\sqrt{\frac{2}{9n}}}, \quad (2.8)$$

которая должна подчиняться стандартному нормальному закону. В этом случае проверяемая гипотеза H_0 о равномерности не отклоняется, если $z \leq N_{1-\alpha}$, где $N_{1-\alpha}$ – соответствующая квантиль стандартного нормального закона. Оценка достигнутого уровня значимости может быть найдена по соотношению (1.2) в соответствии со стандартным нормальным законом.

Однако в данном случае распределение статистики (2.8) также существенно отличается от стандартного нормального закона. На рисунке 2.7 показано распределение $G(z_n | H_0)$ статистики (2.8) при $n=50$ и функция распределения стандартного нормального закона. Подобное различие может приводить к некорректности вывода.

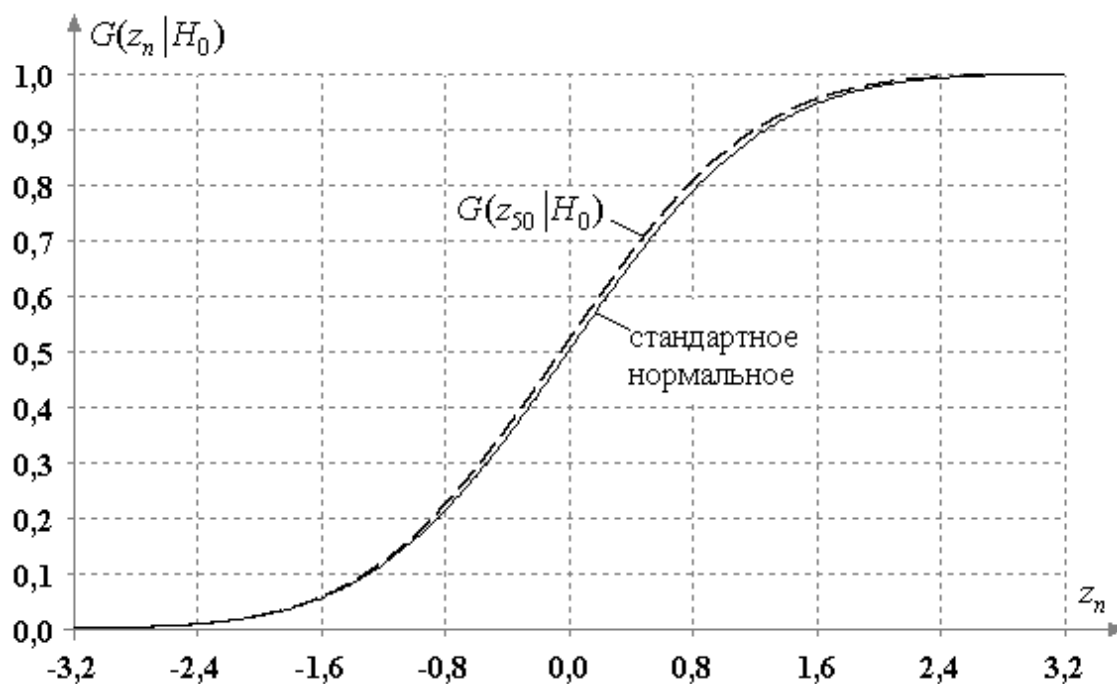


Рисунок 2.7 – Распределения статистики (2.8) при $n = 50$ и стандартное нормальное распределение

Следует заметить, что возможны проблемы с вычислением статистики, если в анализируемой выборке встретятся повторяющиеся значения.

Как можно заметить, во всех случаях критерий обладает не очень высокой мощностью. Учитывая это и другие нюансы можно считать, что критерий не относится к предпочтительным для применения.

2.5 Критерий Ченга-Спиринга

Данный критерий предложен в работе [15]. Статистика критерия имеет вид:

$$W_p = \frac{\left[(U_n - U_1) \frac{n+1}{n-1} \right]^2}{\sum_{i=1}^n (U_i - \bar{U})^2} \quad (2.9)$$

где разность $U_n - U_1$ представляет собой выборочный размах, а $\bar{U} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U_i$.

При справедливости проверяемой гипотезы H_0 всегда выполняются неравенства [116]:

$$\frac{2(n+1)^2}{(n-1)^2} \geq W_p \geq \frac{4(n+1)^2}{n(n-1)^2} \quad (\text{для четных } n);$$

$$\frac{2(n+1)^2}{(n-1)^2} \geq W_p \geq \frac{4n(n+1)}{(n-1)^3} \quad (\text{для нечетных } n).$$

Зависимость распределений статистики (2.9) при справедливости H_0 от объема выборок n демонстрируется на рисунке 2.8.

Критерий двусторонний: проверяемая гипотеза H_0 не отклоняется, если $W_{\alpha/2} \leq W_p \leq W_{1-\alpha/2}$. Критические значения в виде $W_1 = W_{\alpha/2}$ и $W_n = W_{1-\alpha/2}$ для уровней значимости $\alpha = 0.2, 0.15, 0.1, 0.05, 0.01$, полученные в результате статистического моделирования и расширяющие таблицу критических значений, приведенную в [15] и [116], представлены в таблице А.5.

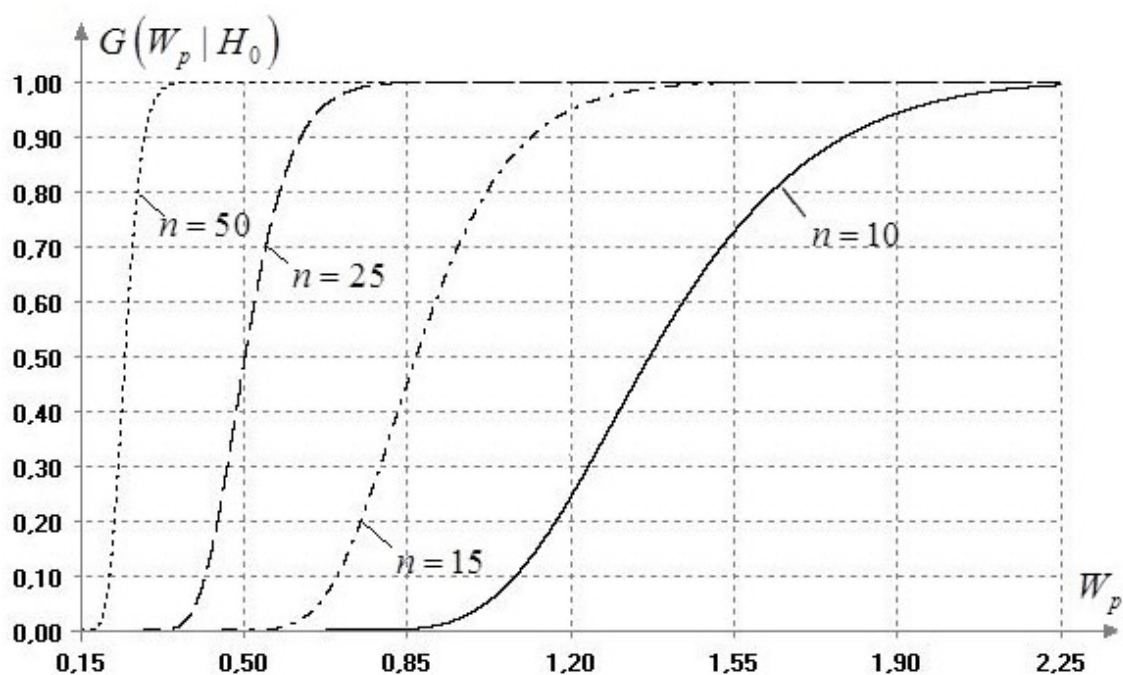


Рисунок 2.8 – Распределения статистики (2.9) критерия Ченга-Спиринга в зависимости от n

Полученные в результате статистического моделирования оценки мощности критерия Ченга-Спиринга при проверке равномерности по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 представлены в таблице Б.10, оценки мощности по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в таблицах Б.11 и Б.12 соответственно.

По сравнению с критериями равномерности Шермана и Кимбелла критерий Ченга-Спиринга демонстрирует очень высокую мощность относительно конкурирующей гипотезы H_1 .

По отношению к конкурирующей гипотезе H_2 показывает мощность аналогичную с теми же критериями. И в то же время этот критерий практически неспособен отличать от равномерного закона распределение, соответствующее гипотезе H_3 .

К недостаткам использования критерия относится также зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек.

2.6 Критерии Хегази-Грина

Эти критерии имеют сходство с одноименными критериями нормальности и опираются на аналогичные статистики [34]:

$$T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |U_i - \eta_i|, \quad (2.10)$$

$$T_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (U_i - \eta_i)^2, \quad (2.11)$$

где U_i – элементы вариационного ряда, построенного по выборке x_1, x_2, \dots, x_n объёмом n , а $\eta_i = E[U_i]$ – математическое ожидание соответствующей порядковой статистики.

При проверке гипотезы на $[0, 1]$ статистики принимают вид:

$$T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| U_i - \frac{i}{n+1} \right|, \quad (2.12)$$

$$T_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(U_i - \frac{i}{n+1} \right)^2. \quad (2.13)$$

В той же работе [34] рассмотрены модифицированные статистики, в которых вместо математического ожидания i -й порядковой статистики $\eta_i = \frac{i}{n+1}$,

учитывая несимметричность распределения этой статистики, используются её модальные значения $\xi_i = \frac{i-1}{n-1}$. В этом случае статистики критерия принимают

вид:

$$T_1^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| U_i - \frac{i-1}{n-1} \right|, \quad (2.14)$$

$$T_2^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(U_i - \frac{i-1}{n-1} \right)^2. \quad (2.15)$$

Критерии применимы для случайных величин, распределенных на любом интервале $[a, b]$, но в этом случае необходимо перейти к величинам $y_i = (U_i - U_1)/(U_n - U_1)$, заменив на них U_i в выражениях для статистик при объеме выборки $n - 2$.

Заметим, что отличие статистик (2.14) – (2.15) от статистик (2.12) – (2.13) сказывается на распределениях этих статистик. При справедливости проверяемой гипотезы H_0 отличие распределений заметно при ограниченных объемах выборок и практически не сказывается при $n \geq 300$ (Таблица А.6).

В то же время имеет место различие в мощностях критериев, опирающихся на статистику (2.12) – (2.13) и (2.14) – (2.15), по крайней мере, относительно некоторых альтернатив (относительно некоторых конкурирующих законов).

Распределения статистик (2.12), (2.13) критериев Хегизи–Грина при различных объемах выборок n показаны, соответственно, на рисунках 2.9 и 2.10.

Критерии правосторонние. Проверяемая гипотеза о равномерности распределения случайных величин X_i принимается на уровне значимости α , если $T_1 < T_1(\alpha)$, $T_1^* < T_1^*(\alpha)$ или $T_2 < T_2(\alpha)$, $T_2^* < T_2^*(\alpha)$.

Полученные методами статистического моделирования критические значения, представленные в таблице А.6, расширяют таблицу критических значений, приведенную в [116].

Для критериев со статистиками (2.12) – (2.15), как указано в [116], для поиска критических значений существует следующая аппроксимация:

$$T(\alpha) = a + \frac{b}{\sqrt{n}} + \frac{c}{n}. \quad (2.16)$$

Коэффициенты a , b и c для $\alpha = 0,95$ и $\alpha = 0,99$ приведены в таблице 2.1. Критические значения, получаемые в результате статистического моделирования, совпадают с точностью до 2–3 знаков после запятой со значениями, полученными по формуле (2.16).

Таблица 2.1 – Значения для вычисления значений статистик (2.12) – (2.15)

Статистика	Уровень значимости α					
	0.95			0.99		
	a	b	c	a	b	c
T_1	0.0003	0.5876	-0.0425	-0.0070	0.8373	-0.2500
T_1^*	0.0064	0.5066	0.2364	-0.0090	0.7949	-0.0782
T_2	-0.0068	0.0783	0.2419	-0.0148	0.1701	0.2745
T_2^*	0.0214	0.0214	0.8212	0.0047	-0.0607	0.9330

Оценки мощности критерия Хегази–Грина со статистиками T_1 и T_2 относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 при проверке равномерности представлены в таблицах Б.13–Б.15. При этом критерий со статистикой T_1 показывает несколько большую мощность, чем критерий со статистикой T_2 .

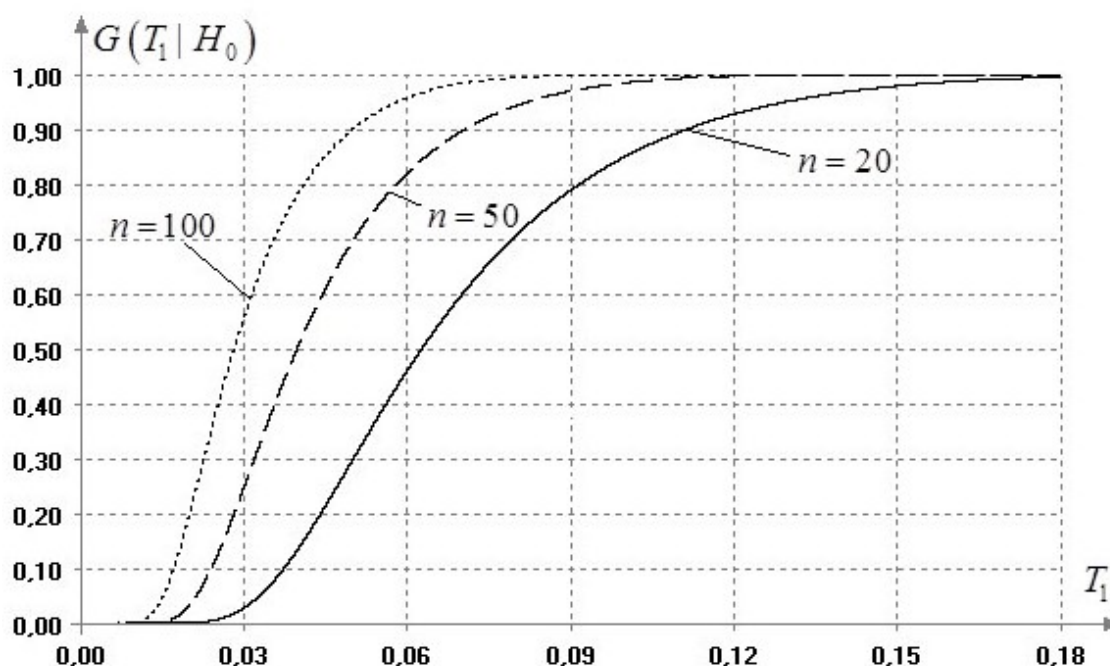


Рисунок 2.9 – Распределения статистики (2.12) критерия Хегази–Грина в зависимости от n

По отношению к конкурирующей гипотезе H_1 при малых n и α оба критерия Хегази–Грина оказываются смещёнными (в таблице Б.13, где оценки мощности меньше вероятности ошибки 1-го рода α выделены серым цветом). В то же время смещённость критерия со статистикой T_1 проявляется более заметно.

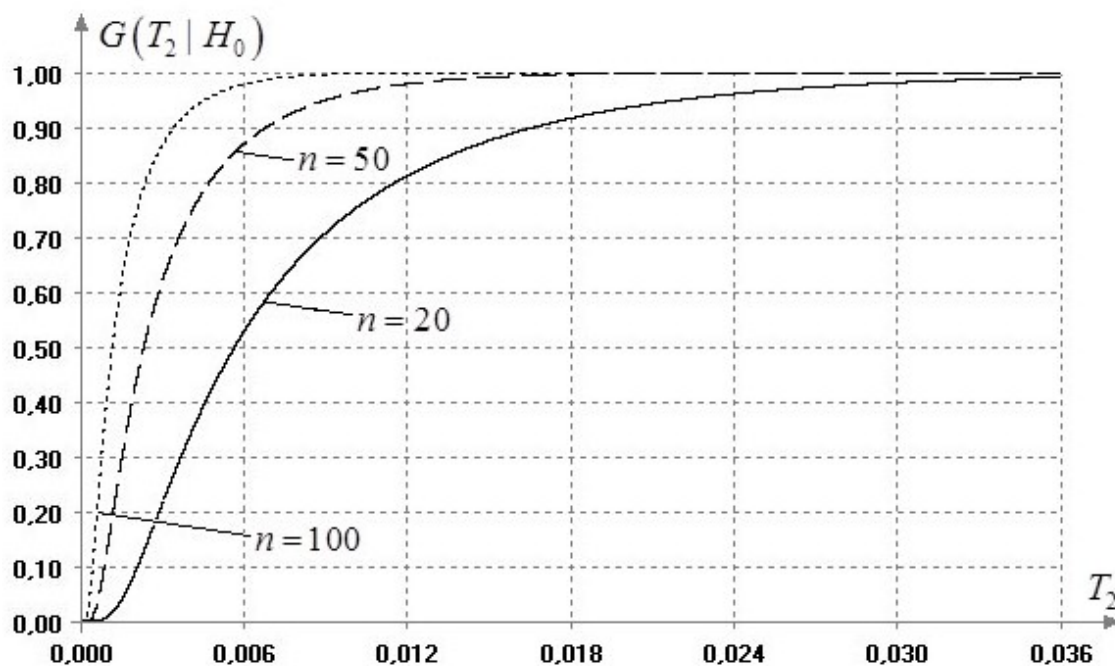


Рисунок 2.10 – Распределения статистики (2.13) критерия Хегази-Грина
в зависимости от n

Оценки мощности относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 при проверке равномерности для критерия Хегази-Грина со статистиками T_1^* и T_2^* представлены в таблицах Б.16–Б.18.

Как можно заметить, относительно H_1 смещённость критериев меньше, а мощность критериев заметно выше мощности критериев со статистиками T_1 и T_2 , оценки которой приведены в таблице Б.13.

В то же время оценки мощности критериев Хегази-Грина со статистиками T_1^* и T_2^* относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3 слегка уступают соответствующим оценкам мощности критериев со статистиками T_1 и T_2 , но при этом очень близки к последним.

К недостаткам критериев Хегази-Грина, затрудняющим их использование, является зависимость распределений статистик от объема выборки n и необходимость пользоваться таблицами процентных точек, а также смещённость критериев относительно конкурирующих гипотез H_1 . В то же время критерии

обладают достаточно высокой мощностью относительно других конкурирующих гипотез.

2.7 Критерий Янга

Критерий предназначен для проверки равномерности выборок, распределенных на отрезке длиной l с началом в нуле.

Статистика Янга [92] в общем виде описывается формулой

$$M = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n \min(D_i, D_{i+1}), \quad (2.17)$$

где $D_1 = U_1$, $D_i = U_i - U_{i-1}$, $D_{n+1} = 1 - U_n$.

Очевидно, что $0 \leq M \leq \frac{n}{n+1}$. При проверке равномерности на интервале $[0,1]$ имеем $l=1$. Характер изменения распределения статистики (2.17) при справедливости проверяемой гипотезы H_0 в зависимости от n иллюстрируется на рисунке 2.11.

При неизвестном l (при проверке сложной гипотезы) используется статистика вида

$$M^* = \frac{1}{U_n - U_1} \sum_{i=2}^{n-1} \min(D_i, D_{i+1}). \quad (2.18)$$

Распределение статистики (2.18) при справедливости проверяемой гипотезы и объеме выборки n совпадает с распределением статистики (2.17) при объеме выборки $n-2$.

Критерий двусторонний. Гипотеза о равномерности не отклоняется, если вычисленное значение статистики (2.17) удовлетворяет неравенству $M_1(\alpha) \leq M \leq M_2(\alpha)$.

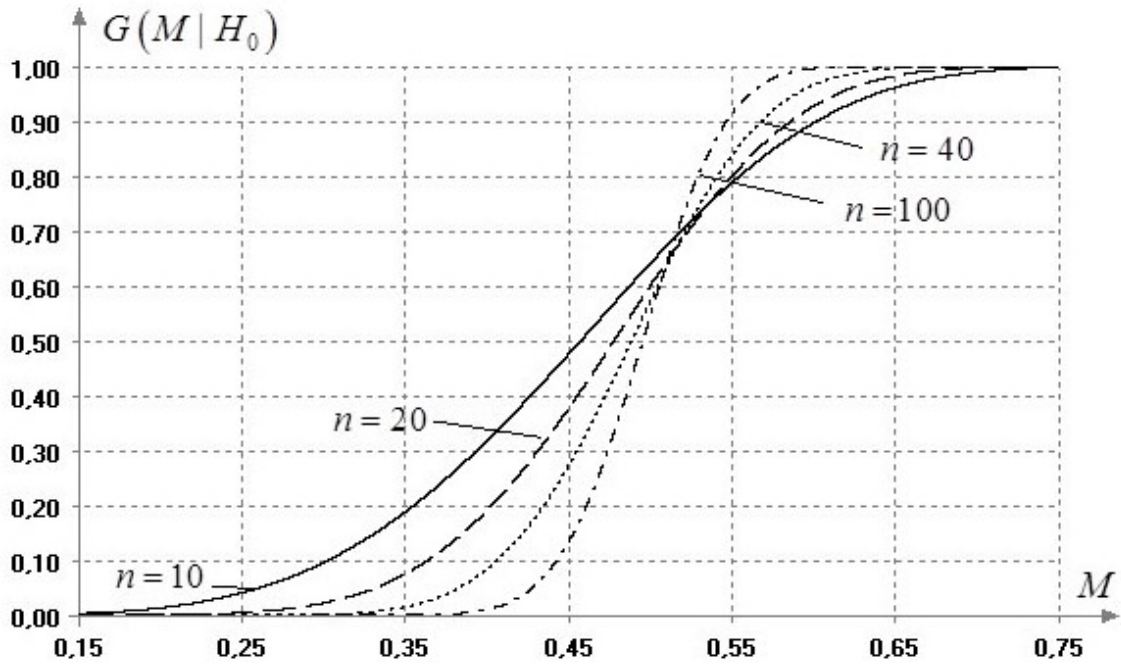


Рисунок 2.11 – Распределения статистики (2.17) критерия Янга
в зависимости от n

Полученные с использованием статистического моделирования критические значения представлены в таблице А.7, которая несколько расширяет таблицу, приведенную в [92, 116].

Математическое ожидание и дисперсия статистики (2.17) определяются выражениями:

$$E[M] = \frac{n}{2(n+1)}, \quad D[M] = \frac{2n-1}{12(n+1)^2}.$$

В качестве распределения нормализованной статистики, которую можно представить в виде

$$\tilde{M} = 2(n+1)M \sqrt{\frac{3}{2n-1}} - n \sqrt{\frac{3}{2n-1}}, \quad (2.19)$$

при $n \geq 15$ [92, 116] можно использовать стандартный нормальный закон $N(0,1)$.

На рисунке 2.12 демонстрируется близость распределения статистики (2.19) к стандартному нормальному закону при $n = 20$.

Заметим, что различие между распределением статистики (2.19) и $N(0,1)$ прослеживается и при $n=50$, но практического значения при использовании критерия такое расхождение не имеет.

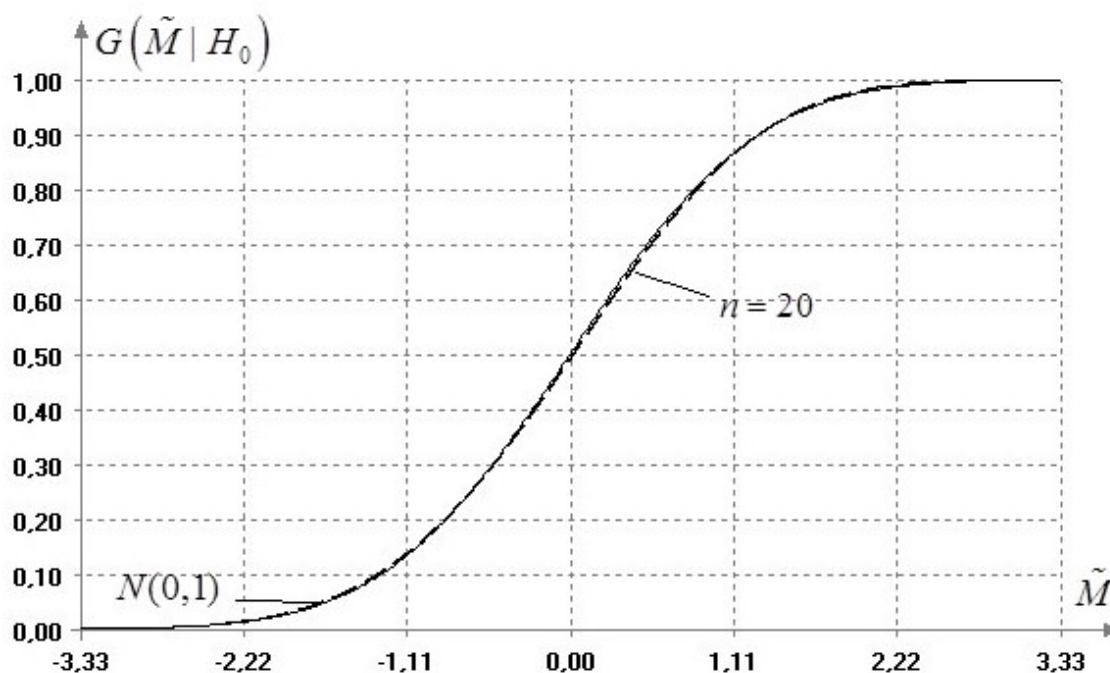


Рисунок 2.12 – Функция распределения стандартного нормального закона и распределение статистики (2.19) критерия Янга при $n = 20$

В [116, стр. 329] утверждается, что более точно распределение статистики (2.17) аппроксимируется бета-распределением 1-го рода (см. соотношение (2.6)

при $\theta_2 = 1, \theta_3 = 0$) с параметрами $\theta_0 = \theta_1 = \frac{3n^2}{2(2n-1)} - \frac{1}{2}$.

Однако на самом деле нормальная аппроксимация всегда лучше данной. В то же время бета-распределение 1-го рода действительно оказывается хорошей моделью для распределения статистики (2.17), но при значениях параметров формы $\theta_0 \neq \theta_1$, отличающихся от значения, задаваемого вышеприведенным соотношением.

Оценки мощности критерия Янга со статистикой (2.17) относительно конкурирующей гипотезы H_1 представлены в таблице Б.19, а относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3 – в таблицах Б.20 и Б.21.

Как можно видеть, при малых n и α относительно гипотезы H_1 критерий оказывается смещённым и обладает очень невысокой мощностью. А гипотезы H_2 и H_3 от H_0 , как показывают приведенные оценки мощности, практически не может отличать.

Всё это характеризует критерий Янга как не очень удачный критерий, способный в какой-то мере отличать от равномерного лишь более далёкие (по сравнению с рассматриваемыми в данной работе) конкурирующие законы.

То, что нормализованная статистика (2.19) хорошо аппроксимируется стандартным нормальным законом, который может использоваться для оценки достигнутого уровня значимости, в данном случае оказывается слабым утешением.

Вследствие низкой мощности критерий Янга способен отличать от H_0 лишь очень далёкие конкурирующие гипотезы. Это не позволяет рекомендовать его для применения.

2.8 Критерий Фросини

В случае проверки равномерности статистика критерия Фросини [29] имеет вид:

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left| U_i - \frac{i-0.5}{n} \right|. \quad (2.20)$$

Критерий правосторонний. Критические значения статистики, полученные методами статистического моделирования, представлены в таблице А.8, которая расширяет таблицу, приведенную в [29] и [116].

Распределения статистики (2.20) при справедливости H_0 в зависимости от объема выборок n показаны на рисунке 2.13.

При $n \geq 50$ критические значения статистики практически не меняются, что говорит о существовании предельного распределения. Мы предлагаем в качестве модели предельного распределения статистики использовать бета-распределение III рода с плотностью:

$$f(x) = \frac{\theta_2^{\theta_0}}{\theta_3 B(\theta_0, \theta_1)} \frac{\left(\frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_0-1} \left(1 - \frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right)^{\theta_1-1}}{\left[1 + (\theta_2 - 1) \frac{x-\theta_4}{\theta_3}\right]^{\theta_0+\theta_1}}$$

и значениями параметров $\theta_0 = 3.6064$, $\theta_1 = 4.0008$, $\theta_2 = 5.4476$, $\theta_3 = 1.33$ и $\theta_4 = 0.095$, которое было построено по результатам статистического моделирования при $n = 1000$.

Данной моделью можно пользоваться для оценки достигнутого уровня значимости (для оценки **p-value**) $P(B_n \geq B_n^* | H_0)$, где B_n^* – значение статистики, вычисленное по выборке, при объёмах выборок $n > 50$.

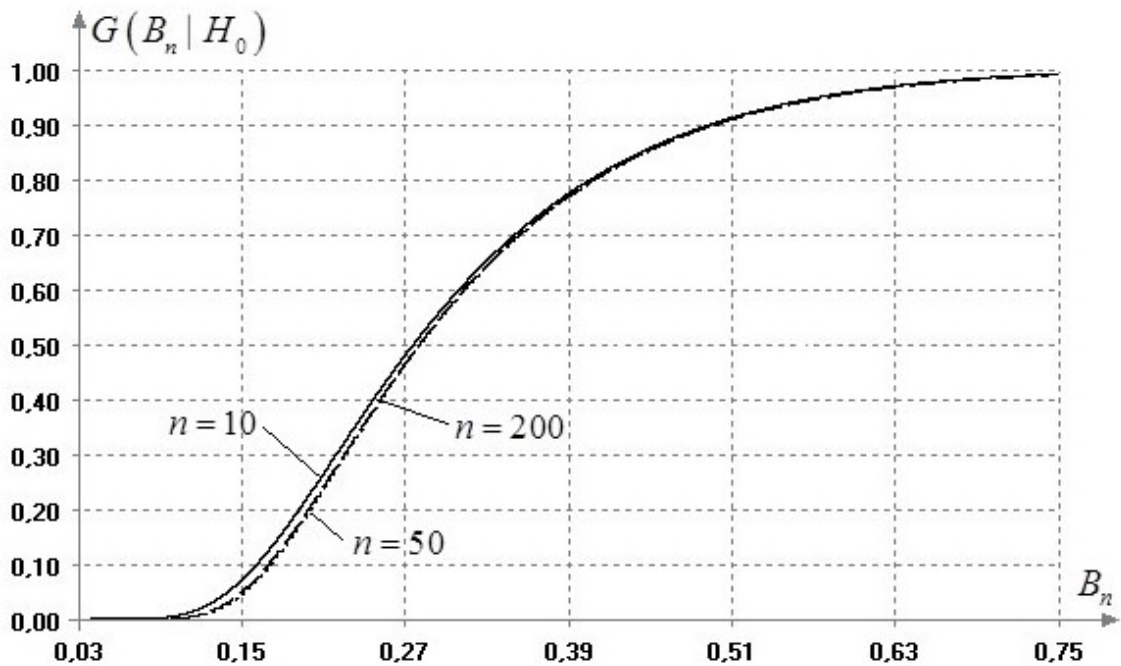


Рисунок 2.13 – Распределения статистики (2.20) критерия Фросини в зависимости от n

Полученные в результате статистического моделирования оценки мощности критерия Фросини при проверке равномерности по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 представлены в таблице Б.22, а по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в таблицах Б.23 и Б.24.

Как видим, по таблице Б.22, при малых n и α относительно конкурирующей гипотезы H_1 критерий оказывается смещённым.

Несмотря на смещённость и невысокую мощность критерия относительно конкурирующей гипотезы H_1 , критерий показывает достаточно высокую мощность относительно H_2 и H_3 .

Положительным фактором является возможность при $n \geq 50$ отказаться от использования таблицы процентных точек и воспользоваться предложенной выше моделью бета-распределения в качестве предельного распределения статистики.

2.9 Критерий Гринвуда

Статистика критерия равномерности Гринвуда имеет вид

$$G = (n+1) \sum_{i=1}^{n+1} (U_i - U_{i-1})^2, \quad (2.21)$$

где, как и ранее, U_i – элементы вариационного ряда, построенного по выборке x_1, x_2, \dots, x_n объёмом n , $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$. Статистика (2.21) отличается от статистики (2.5) только множителем $(n+1)$.

Критерий правосторонний. На рисунке 2.14 показаны распределения статистики при истинной H_0 и конкурирующей гипотезах H_1-H_3 при $n=100$, что подтверждает правосторонность данного критерия.

Критические значения статистики (2.21) для уровней значимости $\alpha = 0.2, 0.15, 0.1, 0.05, 0.01$, полученные в результате статистического моделирования, представлены в таблице А.9. Проверяемая гипотеза H_0 не отклоняется, если $G \leq G_\alpha$.

В [116] говорится, что критические значения статистики (2.21) совпадают с критическими значениями одноименного критерия показательности [13, 81, 116], но с учетом замены n на $n-1$.

Вид распределений $G(G|H_0)$ статистики (2.21) при справедливости проверяемой гипотезы H_0 в зависимости от объёма выборок n демонстрируется

на рисунке 2.15. В [62] показано, что распределение статистики (2.21) медленно сходится к нормальному закону. Однако численные исследования показали, что даже при $n=1000$ распределение статистики настолько существенно отличается от её нормальной аппроксимации, что последней лучше не пользоваться.

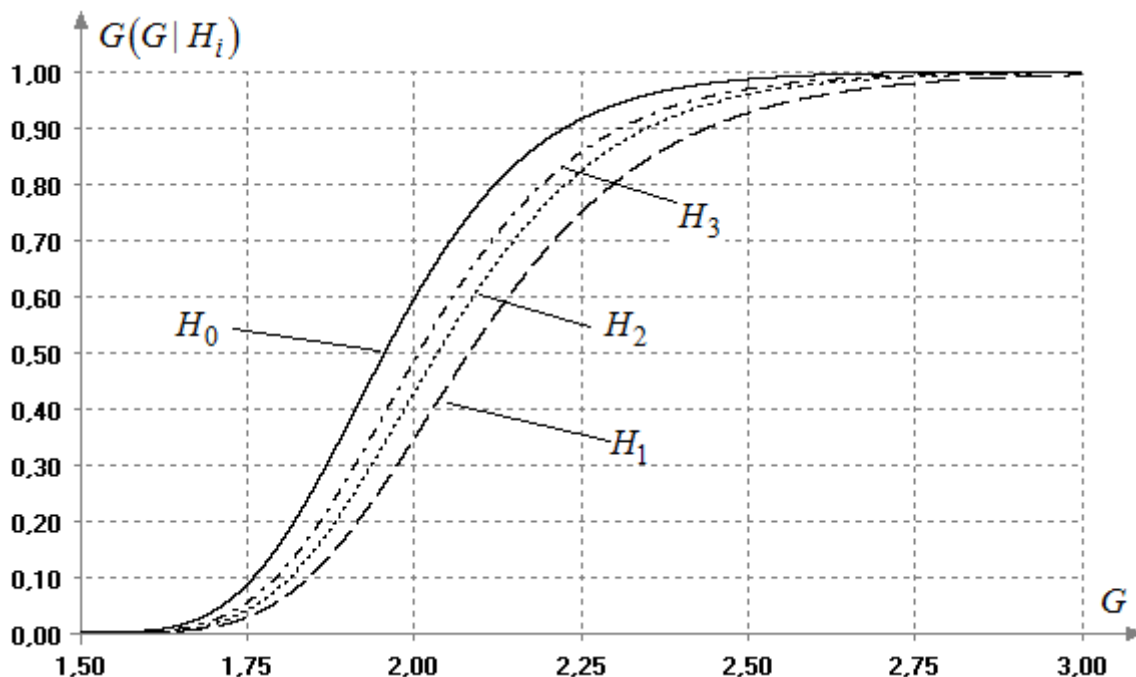


Рисунок 2.14 – Распределения статистики (2.21) при H_0 и конкурирующих гипотезах H_1 , H_2 , H_3 при $n=100$

Естественно, что мощность критерия относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез совпадает с мощностью критерия Морана со статистикой (2.5) и с мощностью критерия Кимбелла со статистикой (2.4). Оценки мощности критерия Гринвуда по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 можно увидеть в соответствующей таблице Б.4 для критерия Кимбелла, а по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в таблицах Б.5 и Б.6.

Как можно заметить ниже, критерий Гринвуда заметно уступает в мощности другому критерию Гринвуда–Кэсенберри–Миллера, а также в некоторых ситуациях приводимой ниже модификации данного критерия.

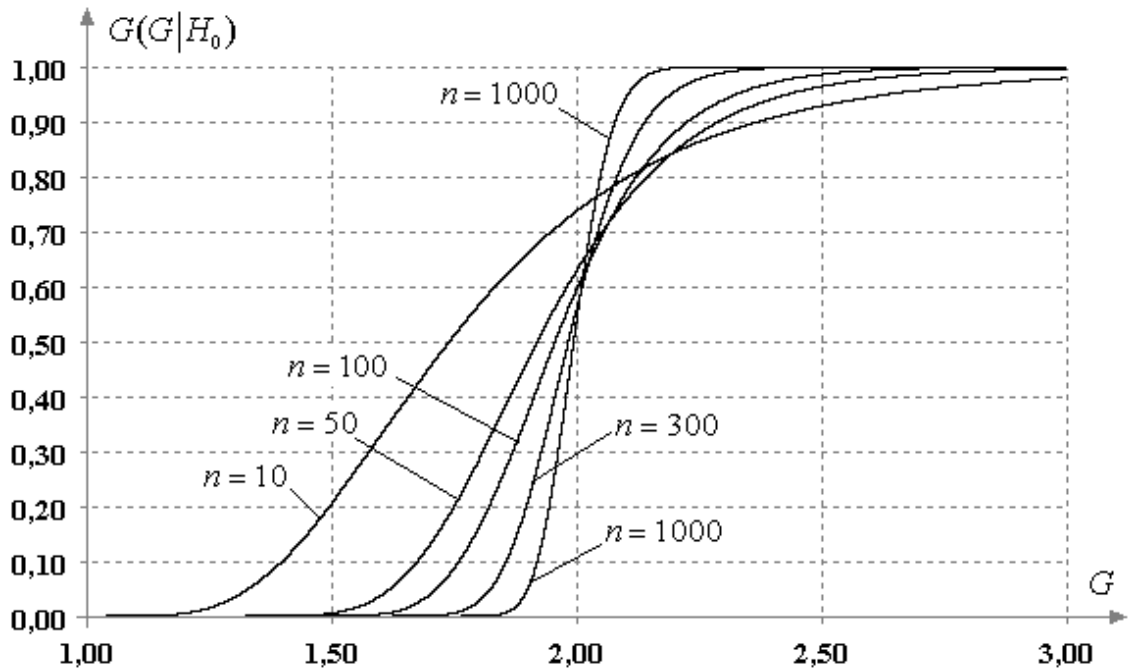


Рисунок 2.15 – Распределения статистики (2.21) критерия Гринвуда
в зависимости от n

2.10 Модификация критерия Гринвуда

В работе [44] упоминаются модификация для критерия Гринвуда, имеющая следующий вид:

$$GM = \sum_{i=0}^k \left(U_{(i+1)m} - U_{im} \right)^2, \quad (2.22)$$

где целое $k = \left[\frac{n+1}{m} - 1 \right]$ – количество слагаемых, m – произвольный параметр, ограничиваемый объёмом выборки n , $U_0 = 0$. На рисунке 2.16 показано, как влияет увеличение параметра m на распределение статистики при справедливости H_0 . Естественно, величина m влияет также и на распределение статистики при справедливости конкурирующих гипотез. Рисунок 2.17 демонстрирует поведение распределений статистики при справедливости проверяемой H_0 и конкурирующей H_1 гипотез для случая $n=100$ и $m=2,5,10$. Как можно заметить, распределение статистики при H_1 с ростом m начинает сдвигаться «влево» относительно распределения статистики при истинной

гипотезе H_0 . Подтверждение этому можно увидеть также по оценкам мощности, представленным в таблице 2.2.

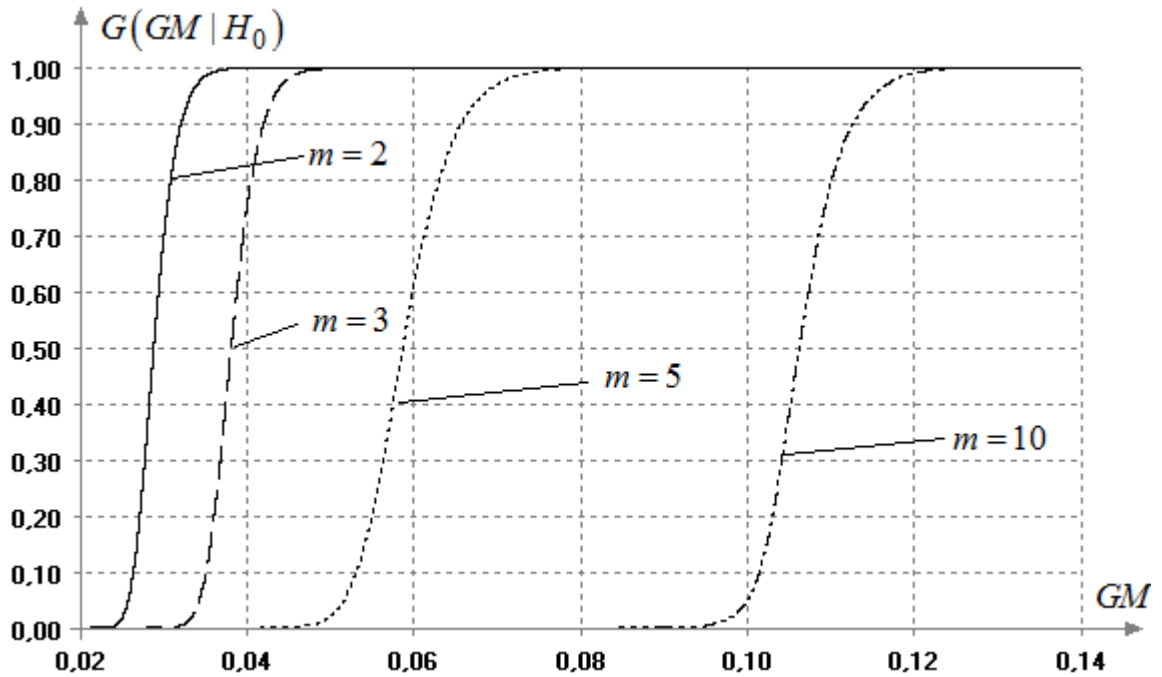


Рисунок 2.16 – Распределения статистики (2.22) при $n=100$ и $m=2,3,5,10$

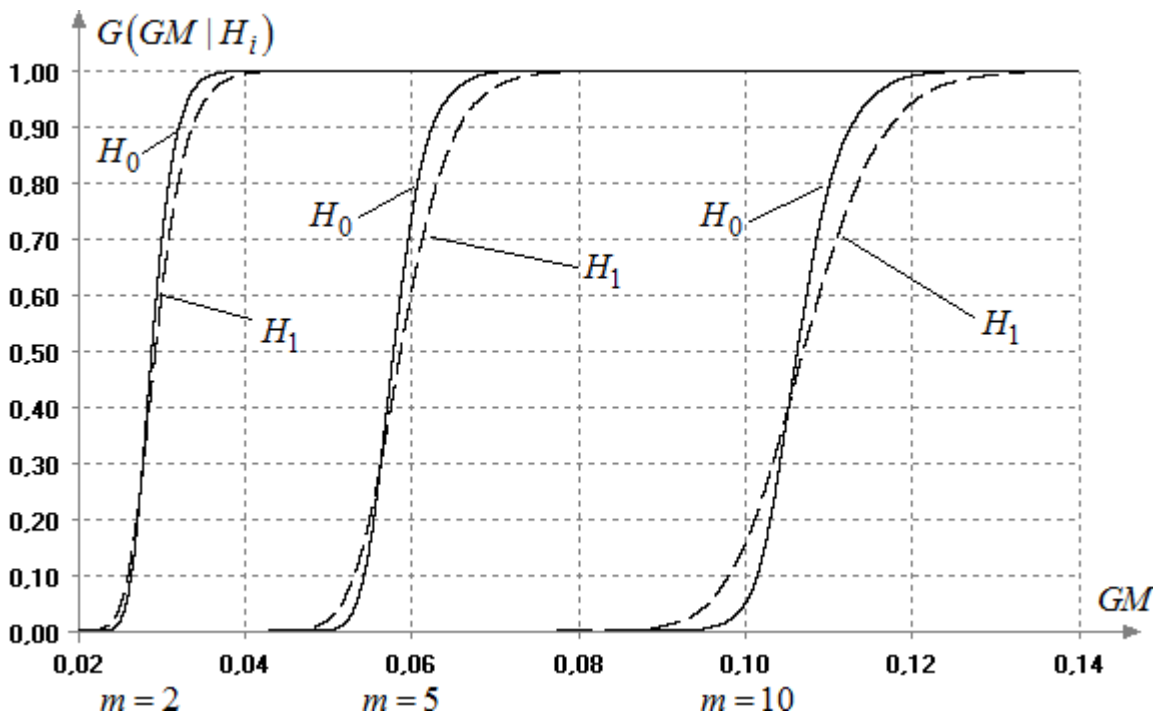


Рисунок 2.17 – Распределения статистики (2.22) при истинной H_0 и конкурирующей H_1 гипотезах для $n=100$ и $m=2,5,10$

Добавление параметра m в статистику ставит вопрос о выборе оптимального значения данного параметра в зависимости от объема выборок n . В [44] предлагается брать максимально возможное значение $m = \left[\frac{n+1}{2} \right]$, в результате чего получаем $k = 1$.

Для частного случая $k = 1$ статистика (2.22) принимает следующий вид:

$$GM_{k=1} = (U_m - U_0)^2 + (U_{2m} - U_m)^2 = U_m^2 + (U_{2m} - U_m)^2. \quad (2.23)$$

Полученные в результате статистического моделирования оценки мощности критерия со статистикой (2.23) при проверке равномерности по отношению к конкурирующей гипотезе H_1 представлены в таблице Б.25, а по отношению к гипотезам H_2 и H_3 – в таблицах Б.26 и Б.27. Стоит заметить, что критерий со статистикой (2.23) не способен отличить гипотезу H_1 , и в данном случае фиксируется минимальная мощность.

В таблице 2.2 представлены оценки мощности критерия со статистикой (2.22) для частого случая $n = 100$ при различных значениях параметра m . Мощность относительно гипотез H_2 и H_3 с ростом m возрастает, а относительно гипотезы H_1 падает.

Таблица 2.2 – Оценки мощности критерия со статистикой (2.22) при $n = 100$ и $\alpha = 0.1$

m	H_1	H_2	H_3
2	0.192	0.217	0.197
3	0.142	0.212	0.223
5	0.231	0.277	0.246
10	0.230	0.328	0.287
20	0.176	0.397	0.368
50	0.009	0.400	0.422

При больших значениях m критерий со статистикой (2.22) при проверке равномерности отдаст предпочтение закону, соответствующему гипотезе H_1 , как “более равномерному” (Рисунок 2.18).

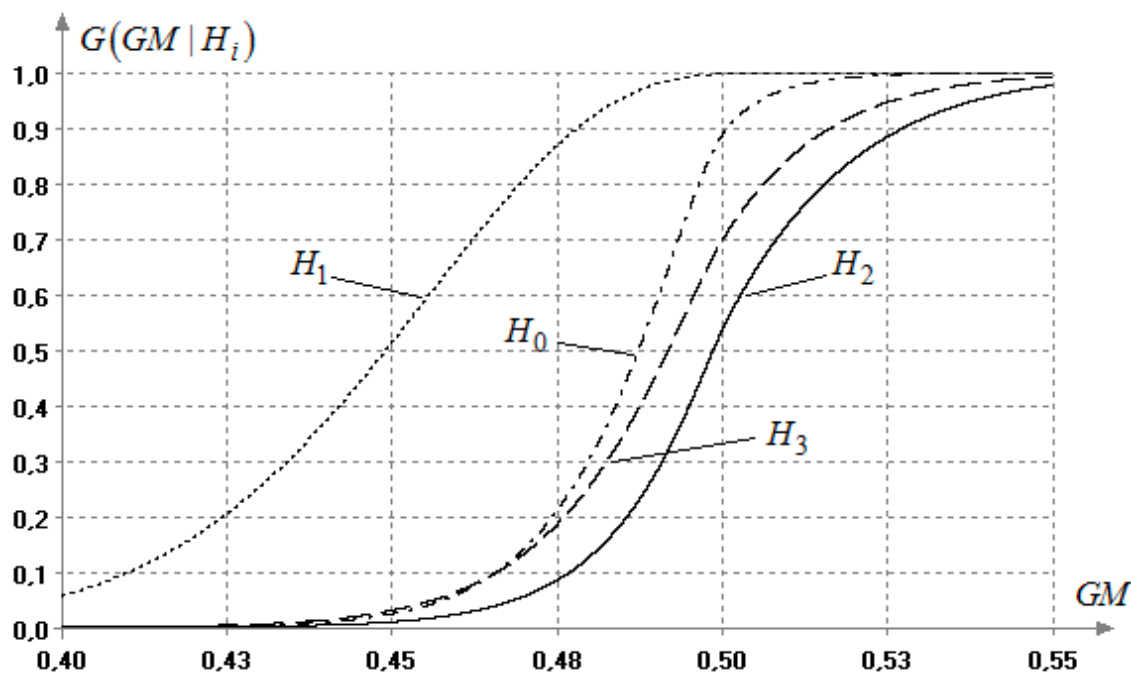


Рисунок 2.18 – Распределения статистики (2.22) при H_0 и конкурирующих гипотезах H_1, H_2, H_3 при $n = 100$ и $m = 50$

В результате проведенных исследований стало очевидным, что применение модификации критерия со статистикой (2.23) нецелесообразно вследствие сильной смещенности критерия относительно конкурирующей гипотезы H_1 . Такая уязвимость ставит под сомнение обоснованность выбора $k = 1$ (для максимально возможного значения m). Однако заметим, что в таблице 2.2 есть другие значения m приемлемые с позиций мощности. В связи с этим в результаты сравнительного анализа мощности (Таблица 2.9) с целью демонстрации потенциала данного критерия добавлены результаты для статистики (2.22) при $m = 10$.

2.11 Критерий Гринвуда–Кэсенберри–Миллера

В [71, 72] предлагается еще одна модификация критерия Гринвуда, которая в [116] именуется как критерий Гринвуда–Кэсенберри–Миллера. Утверждается [116], что данный критерий представляет собой более мощный критерий равномерности.

Статистика критерия имеет вид:

$$Q = \sum_{i=1}^{n+1} (U_i - U_{i-1})^2 + \sum_{i=1}^n (U_{i+1} - U_i)(U_i - U_{i-1}), \quad (2.24)$$

где $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$.

Критерий правосторонний. Зависимость распределений статистики (2.24) от объема выборки n демонстрирует рисунок 2.19.

В таблице А.10 представлены полученные с использованием методов статистического моделирования критические значения статистики Гринвуда-Кэсенберри-Миллера. Она содержит более широкий спектр значений по сравнению с таблицей, приведенной в [116].

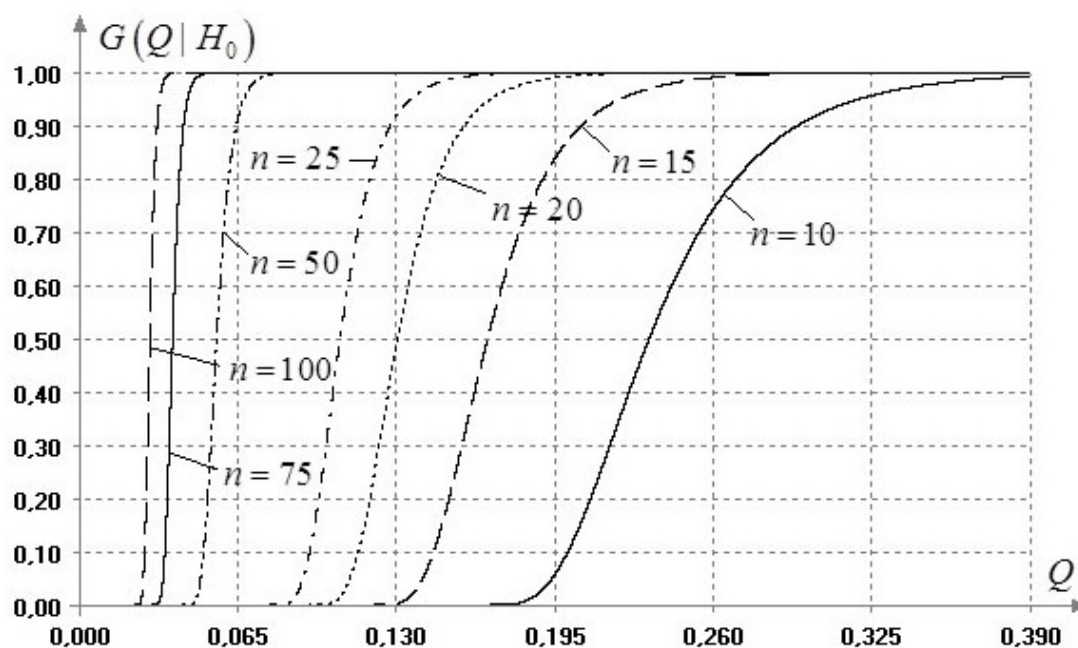


Рисунок 2.19 – Распределения статистики (2.24) критерия Гринвуда–Кэсенберри–Миллера в зависимости от n

При малых n относительно конкурирующей гипотезы H_1 критерий отличается существенным смещением. Критерий не отличается высокой мощностью и по отношению к другим конкурирующим гипотезам, но всё-таки его мощность заметно выше предшествующего критерия Гринвуда.

К недостаткам критерия относятся: зависимость распределений статистики от n и необходимость пользоваться таблицей процентных точек; смещённость критерия относительно конкурирующих гипотез вида H_1 ; невысокая мощность.

2.12 Критерии Неймана-Бартона

Семейство критериев основано на отношении правдоподобия [64]. По элементам U_i вариационного ряда, построенного по выборке x_1, x_2, \dots, x_n , вычисляют величины:

$$V_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \pi_j(U_i - 0.5), \quad (2.25)$$

где $\pi_j(y)$ – полиномы Лежандра, ортогональные на отрезке $[0,1]$.

Как правило, ограничиваются использованием первых 4-х полиномов:

$$\begin{aligned} \pi_1(y) &= 2\sqrt{3}y; \quad \pi_2(y) = \sqrt{5}(6y^2 - 0,5); \\ \pi_3(y) &= \sqrt{7}(20y^3 - 3y); \quad \pi_4(y) = 3(70y^4 - 15y^2 + 0,375). \end{aligned}$$

Статистики критерия имеет вид:

$$N_K = \sum_{j=1}^K V_j^2. \quad (2.26)$$

Проверяемая гипотеза H_0 о равномерности наблюдаемой выборки отклоняется при больших значениях статистик. Вид распределений статистик при $n = 200$ иллюстрирует рисунок 2.20.

Критические значения $N_K(\alpha)$ для $K = 2, 3, 4$ приведены в таблице А.11. Эти таблицы несколько расширяют таблицу процентных точек, приведенную в [116].

При $K = 1$ получается маломощный критерий, поэтому применять его нецелесообразно.

В [19] показано, что при $n > 20$ распределения статистик хорошо аппроксимируется χ^2 – распределениями с K степенями свободы. Действительно,

распределения статистик быстро сходятся к соответствующим χ_K^2 – распределениям и при $n > 20$ отличием реальных распределений статистик Неймана–Бартона от соответствующих χ_K^2 – распределений можно практически пренебречь.

В таблице 2.3 в качестве примера демонстрируется отличие от заданных величин $1 - \alpha$ вероятностей вида $P(N_K \leq \chi_{K,1-\alpha}^2)$, вычисленных в соответствии с действительными распределениями статистик N_K , полученными в результате статистического моделирования при объемах выборок $n = 20, 50$. Это позволяет судить о величине погрешности при вычислении **p**-value по соответствующему χ_K^2 – распределению.

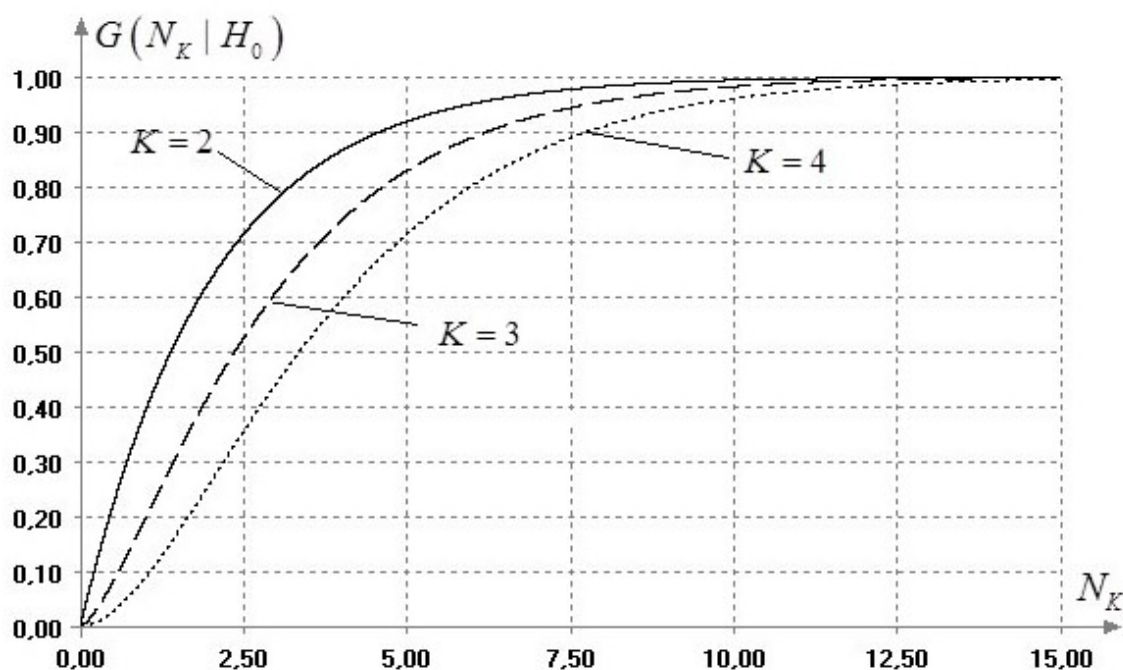


Рисунок 2.20 – Распределения статистик (2.26) Неймана-Бартона при $n = 200$

Полученные в результате статистического моделирования оценки мощности критериев Неймана–Бартона при проверке равномерности по отношению к конкурирующим гипотезам H_1 , H_2 и H_3 представлены в таблицах Б.31, Б.32 и Б.33 соответственно.

Таблица 2.3 – Вероятности $P(N_K \leq \chi_{K,1-\alpha}^2)$, соответствующие заданным $\chi_{K,1-\alpha}^2$ – квантилям χ_K^2 – распределений, вычисленные по реальным распределениям статистик критерия Неймана-Бартона

$1-\alpha$	N_2		N_3		N_4	
	$n=20$	$n=50$	$n=20$	$n=50$	$n=20$	$n=50$
0.85	0.8522	0.8509	0.8547	0.8518	0.8571	0.8534
0.9	0.9027	0.9013	0.9040	0.9016	0.9044	0.9023
0.95	0.9527	0.9511	0.9517	0.9509	0.9506	0.9506
0.975	0.9765	0.9757	0.9751	0.9751	0.9735	0.9746
0.99	0.9903	0.9901	0.9892	0.9897	0.9880	0.9891

При малых n относительно конкурирующей гипотезы H_1 для всех критериев характерно наличие смещения, которое выражено менее заметно по сравнению с некоторыми выше рассмотренными критериями.

Как можно судить по оценкам мощности, наиболее предпочтительно использование критерия Неймана–Бартона со статистикой N_2 .

Хорошая аппроксимация распределений статистик соответствующими χ_K^2 -распределениями и достаточно высокая мощность делают критерии проверки равномерности Неймана–Бартона одними из наиболее перспективных для применения.

2.13 Энтропийный критерий Дудевича–ван дер Мюлена

Для случайной величины X с функцией плотности $f(x)$ энтропия $H(f)$ этой величины, предложенная Шенноном [75], определяется соотношением

$$H(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} \ln(f(x))f(x)dx. \quad (2.27)$$

Используя то, что выражение (2.28) для энтропии можно записать как

$$H(f) = \int_0^1 \ln \left\{ \frac{d}{dp} F^{-1}(p) \right\} dp,$$

в [88] была получена оценка энтропии следующего вида

$$H(m, n) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left\{ \frac{n}{2m} (U_{i+m} - U_{i-m}) \right\}, \quad (2.28)$$

которую было предложено использовать в качестве статистики критерия, предназначенного для проверки нормальности.

В качестве статистики критерия проверки равномерности оценка (2.28) была предложена в работе [22]. При вычислении оценки энтропии (2.28) в качестве размера окна m выбирается целое число $m < \frac{n}{2}$, при этом, если $i + m \geq n$, то $U_{i+m} = U_n$, а если $i - m \leq 1$, то $U_{i-m} = U_1$.

Критерий правосторонний. Проверяемая гипотеза отклоняется при значениях статистики (2.28) $H(m, n) > H_\alpha(m, n)$.

Критические значения статистики (2.28) представлены в таблице А.12. Они несколько уточняют соответствующие значения, приведенные в работе [24].

Зависимость распределений статистики от выбора m при объёме выборок $n = 50$ демонстрирует рисунок 2.21.

В работе [94], для аналогичного критерия (с несколькими другими оценками энтропии) в зависимости от объёмов n анализируемых выборок предложены оптимальные значения m^* для размера окна m , которые приведены в таблице 2.4.

Полученные в результате статистического моделирования оценки мощности критерия Дудевича–ван дер Мюлена при проверке равномерности по отношению к конкурирующим гипотезам H_1 , H_2 и H_3 при таких оптимальных значениях m^* представлены в таблицах Б.34, Б.35 и Б.36 соответственно.

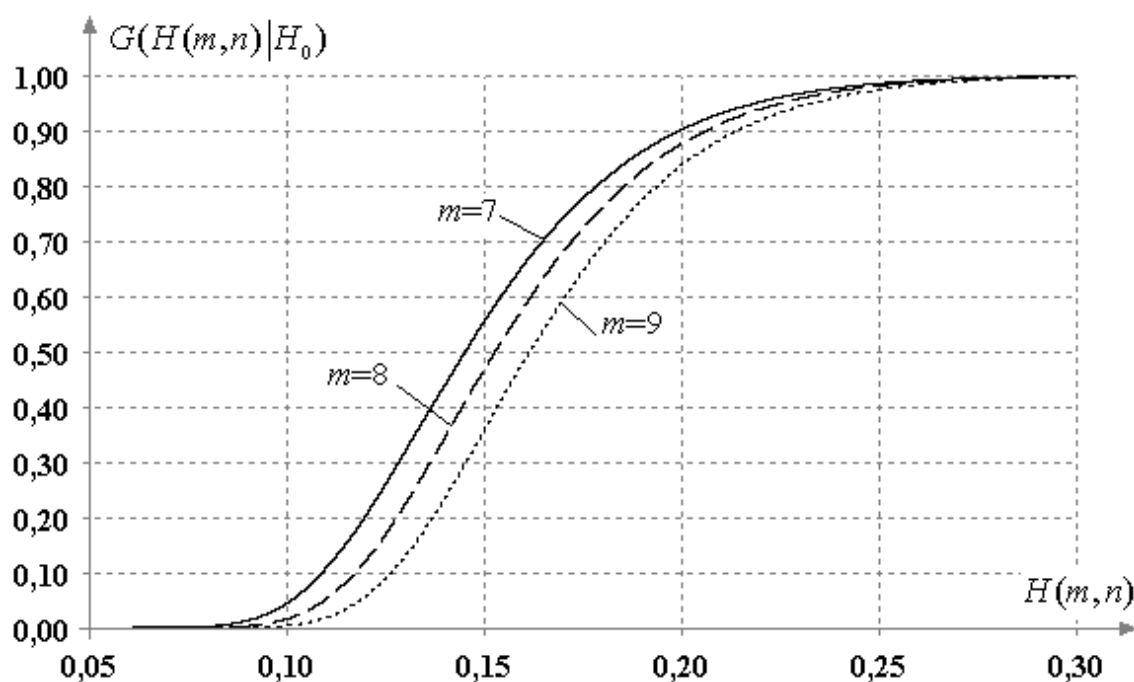


Рисунок 2.21 – Распределения статистики (2.28) критерия Дудевича-ван дер Мюлена в зависимости от выбора m при $n = 50$

Выбор оптимального размера окна m для критериев, в качестве статистик которых используются различные оценки энтропии, представляет собой актуальную проблему. Большинство авторов предлагают использовать такие m (см. таблицу 2.4), при которых значения соответствующих непараметрических оценок энтропии ближе к её теоретическому значению.

Таблица 2.4 – Оптимальные значения m^*

n	m^*	n	m^*
$n \leq 5$	1	$40 \leq n \leq 100$	6
$6 \leq n \leq 8$	2	$101 \leq n \leq 150$	7
$9 \leq n \leq 18$	3	$151 \leq n \leq 200$	8
$19 \leq n \leq 29$	4	$n > 200$	9
$30 \leq n \leq 39$	5		

Следует отметить, что относительно гипотезы H_2 при малых n наблюдается небольшое смещение (Таблица Б.35).

Но размер окна m влияет также на мощность критериев. Причём оптимальное m зависит и от конкурирующей гипотезы. В данном случае нами были получены оптимальные значения m , при которых критерий Дудевича-ван

дер Мюлена (2.28) показывает наибольшую мощность относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 . Полученные результаты относительно гипотез H_2 и H_3 представлены в таблицах 2.5 и 2.6. А относительно гипотезы H_1 мощность всегда возрастает при увеличении m , другими словами, максимальная мощность в этом случае всегда будет при $m = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$.

Критерии, базирующиеся на оценках энтропии, представляют собой достаточно эффективные критерии проверки гипотез о принадлежности наблюдений равномерному закону. В частности, они, как правило, существенно превосходят критерии равномерности, в которых используются разности последовательных порядковых статистик (например, критерии Шермана, Кимбелла, Морана, Янга).

Таблица 2.5 – Оптимальные значения m относительно гипотезы H_2

n	m	n	m
$n < 17$	1	$55 \leq n \leq 68$	4
$17 \leq n \leq 34$	2	$69 \leq n \leq 88$	5
$35 \leq n \leq 54$	3	$89 \leq n \leq 100$	6

Таблица 2.6 – Оптимальные значения m относительно гипотезы H_3

n	m	n	m
$5 \leq n \leq 10$	2	$51 \leq n \leq 60$	7
$11 \leq n \leq 21$	3	$61 \leq n \leq 72$	8
$21 \leq n \leq 30$	4	$73 \leq n \leq 82$	9
$31 \leq n \leq 38$	5	$83 \leq n \leq 97$	10
$39 \leq n \leq 50$	6	98-100	11

Относительно конкурирующих гипотез вида H_2 или H_3 эти критерии несколько уступают в мощности критериям типа Хегази–Грина, Фросини, Неймана–Бартона, но у них отсутствует смещённость относительно конкурирующих гипотез вида H_1 и, даже более того, относительно такого рода гипотез они имеют преимущество в мощности перед большинством критериев, включая непараметрические критерии согласия, особенно при больших размерах окна m .

Недостатками при использовании критерия Дудевича–ван дер Мюлена является зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек, а также некоторая неопределенность с выбором m . В то же время критерий обладает достаточно высокой мощностью относительно конкурирующих гипотез вида H_1 и неплохой мощностью относительно других конкурирующих гипотез.

2.14 Модификации энтропийного критерия

В работе [94] был предложен энтропийный критерий проверки отклонения распределения от нормального закона, базирующийся на использовании двух новых оценок энтропии [24, 67, 93], а в [94] предложены два варианта критерия проверки равномерности, аналогичных критерию Дудевича–ван дер Мюлена.

Используемые в критериях статистики имеют вид [95]:

$$HY_1(m, n) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{U_{i+m} - U_{i-m}}{\hat{F}(U_{i+m}) - \hat{F}(U_{i-m})} \right), \quad (2.29)$$

$$HY_2(m, n) = -\sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{U_{i+m} - U_{i-m}}{\hat{F}(U_{i+m}) - \hat{F}(U_{i-m})} \right) \left(\frac{\hat{F}(U_{i+m}) - \hat{F}(U_{i-m})}{\sum_{j=1}^n (\hat{F}(U_{j+m}) - \hat{F}(U_{j-m}))} \right), \quad (2.30)$$

где

$$\hat{F}(U_i) = \frac{n-1}{n(n+1)} \left(i + \frac{1}{n-1} + \frac{U_i - U_{i-1}}{U_{i+1} - U_{i-1}} \right), \quad i = 2, \dots, n-1,$$

$$\hat{F}(U_1) = 1 - \hat{F}(U_n) = \frac{1}{(n+1)}.$$

Проверяемая гипотеза о равномерности отклоняется при больших значениях статистик (2.29) и (2.30) $HY_i(m, n) > HY_{i,\alpha}(m, n)$. Критические значения статистики (2.29) представлены в таблице А.13, а статистики (2.30) – в таблице А.14. Процентные точки приведены при различных значениях параметра m .

Полученные оценки мощности статистик (2.29) и (2.30) при проверке равномерности по отношению к конкурирующим гипотезам H_1 , H_2 и H_3 представлены соответственно в таблицах Б.37, Б.38 и Б.39. Оценки мощности представлены при оптимальных значениях m^* для параметра m , рекомендуемых в таблице 2.4.

Следует отметить, что, как и у критерия Дудевича–ван дер Мюлена, у обеих модификаций относительно гипотезы H_2 при малых n также наблюдается некоторое смещение.

Аналогичные исследования зависимости мощности от размера окна m были выполнены и для критериев со статистиками (2.29) и (2.30). Для критерия со статистикой (2.29) результаты оказались идентичными полученным для критерия Дудевича–ван дер Мюлена со статистикой (2.28).

Однако для критерия со статистикой (2.30) результаты отличаются. Относительно гипотезы H_1 (как и в случае других критериев) мощность всегда возрастает при увеличении m . Но относительно гипотез H_2 и H_3 мощность достигает максимального значения при других размерах окна m .

Некоторые оценки мощности критерия со статистикой (2.30) относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3 при $\alpha = 0.05$ в зависимости от размера окна m представлены в таблице 2.7.

Модификации энтропийного критерия (2.29), (2.30) наряду с аналогичными достоинствами имеют те же недостатки, что и критерий Дудевича–ван дер Мюлена: зависимость распределений статистик от объема выборки n и необходимость использования таблиц процентных точек, а также имеющаяся неопределенность с выбором m .

Таблица 2.7 – Оценки мощности критерия $HY_2(m, n)$ в зависимости от m

n	Размер окна m						
	1	2	3	4	5	6	7
Относительно H_2							
10	0.057	0.052	0.049	0.046	–	–	–
20	0.072	0.067	0.062	0.056	0.052	0.049	0.046
30	0.085	0.082	0.076	0.070	0.065	0.060	0.056
40	0.097	0.0968	0.092	0.086	0.080	0.074	0.069
50	0.108	0.111	0.108	0.102	0.095	0.089	0.083
100	0.155	0.176	0.1836	0.184	0.180	0.174	0.166
Относительно H_3							
10	0.059	0.060	0.059	0.058	–	–	–
20	0.068	0.071	0.072	0.071	0.069	0.068	0.067
30	0.075	0.081	0.0834	0.0835	0.082	0.081	0.079
40	0.081	0.090	0.094	0.0953	0.0953	0.094	0.093
50	0.087	0.098	0.104	0.1072	0.1075	0.1073	0.106
100	0.111	0.133	0.148	0.159	0.165	0.169	0.171

2.15 Критерий Кресси 1

В ряде критериев при формировании статистики критерия используются разности между порядковыми статистиками, отстоящие друг от друга в вариационном ряду на некотором расстоянии m [17, 18]. Статистика одного из критериев, рассматриваемых в [18], имеет вид:

$$S_n^{(m)} = \sum_{i=0}^{n+1-m} (n(U_{i+m} - U_i))^2,$$

где $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$. При $m=1$ эта статистика отличается от статистики Морана (2.5) только множителем n^2 . Однако исследование свойств критерия при различных размерах окна m показало, что такой критерий крайне неудачен.

Более разумным показалось предложить критерий со статистикой в следующем виде:

$$S_n^{(m)} = \sum_{i=0}^{n+1-m} \left(U_{i+m} - U_i - \frac{m}{n+1} \right)^2. \quad (2.31)$$

При $m=1$ статистика такого критерия совпадает со статистикой критерия Кимбелла. Но следует заметить, что статистика (2.31) уже существенно отличается от вида, предложенного в [18].

Критерий является правосторонним. Распределения статистики сильно зависят от объёма выборок n . Критические значения представлены в таблице А.15. В процессе исследований данного критерия при вычислении статистики (2.31) размер окна $m = m^*$ выбирали в соответствии с рекомендациями таблицы 2.4.

Оценки мощности критерия относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 представлены в таблицах Б.40, Б.41 и Б.42.

При малых n относительно конкурирующей гипотезы H_1 критерий отличается существенным смещением. Причём смещённость сохраняется при больших объёмах выборок, чем она проявляется в случае аналогичных ситуаций с другими критериями. И с ростом n мощность относительно гипотезы H_1 возрастает не очень быстро.

Можно обратить внимание, что и со статистикой (2.31) критерий обладает не очень высокой мощностью. Впрочем, мощность зависит и от выбора размера окна m . Например, при $m=1$, когда статистика критерия совпадает со статистикой Морана (2.5), для $n \leq 200$ мощность критерия относительно гипотезы H_1 выше, чем при $m = m^*$, а смещение меньше (Таблица Б.4 для $m=1$ и Таблица Б.40 для $m = m^*$).

Относительно гипотез вида H_2 критерий имеет мощность ниже среднего (среди рассматриваемых в данной работе критериев) и ещё ниже оказывается мощность относительно гипотезы H_3 . В целом же надо признать, что данный вариант критерия также не является очень удачным. Возможно, это связано с выбором размера окна m .

2.16 Критерий Кресси 2

Предлагаемая в [18] для использования в критерии проверки равномерности вторая статистика может быть представлена в виде

$$L_n^{(m)} = - \sum_{i=0}^{n+1-m} \ln [n(U_{i+m} - U_i)],$$

где аналогично $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$. При $m=1$ и замене под знаком логарифма n на $n+1$ эта статистика сводится к статистике (2.6)

Более логично в таком критерии использовать статистику вида

$$L_n^{(m)} = - \sum_{i=0}^{n+1-m} \ln \left[\frac{(n+1)}{m} (U_{i+m} - U_i) \right] \quad (2.32)$$

или её же в более экономичной для вычислений форме:

$$L_n^{(m)} = -(n+2-m) \ln \left(\frac{n+1}{m} \right) - \sum_{i=0}^{n+1-m} \ln (U_{i+m} - U_i).$$

В процессе исследований при вычислении статистики величина $m = m^*$ выбиралась в соответствии с таблицей 2.4.

Критерий правосторонний, критические значения представлены в таблице А.15.

Оценки мощности критерия относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 представлены в таблицах Б.43, Б.44 и Б.45.

Данный критерий в общем случае не выделяется высокой мощностью, но неожиданно хорошую мощность демонстрирует относительно H_1 . В отличие от первой модификации не отмечено смещённости критерия.

В то же время критерий показывает мощность ниже среднего относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3 .

В то же время следует признать ряд имеющихся недостатков, затрудняющих применение критерия: зависимость распределения статистики от объема выборки n и необходимость использования таблиц процентных точек; неопределенность с выбором m и зависимость от m распределения статистики (и

мощности) критерия. Возможны проблемы с вычислением статистики при наличии в выборке повторяющихся значений.

Применение данного критерия целесообразно контролировать параллельным использованием других критериев.

2.17 Критерий Пардо

Статистика критерия имеет вид [69]:

$$E_{m,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2m}{n(U_{i+m} - U_{i-m})}, \quad (2.33)$$

где также $U_0 = 0$, $U_{n+1} = 1$.

Критерий правосторонний. Зависимость распределений статистики от объёмов выборок демонстрируется на рисунок 2.22. Критические значения представлены в таблице А.16. В данном случае в процессе исследований при вычислении статистики значение $m = m^*$ также выбиралось в соответствии с таблицей 2.4.

Оценки мощности критерия относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 представлены в таблицах Б.46, Б.47 и Б.48.

Данный критерий по мощности относительно всех рассматриваемых конкурирующих гипотез в общем ряду критериев равномерности занимает ровные позиции несколько ниже среднего.

К недостаткам критерия следует отнести зависимость распределения статистики от объёма выборки n , вследствие чего приходится ориентироваться на таблицу процентных точек. Имеется неопределенность с выбором m , от которого зависят распределения статистики и мощность критерия.

Положительным фактором является отсутствие смещения относительно гипотез вида H_1 . В среднем демонстрируется неплохая мощность относительно всех рассмотренных конкурирующих гипотез.

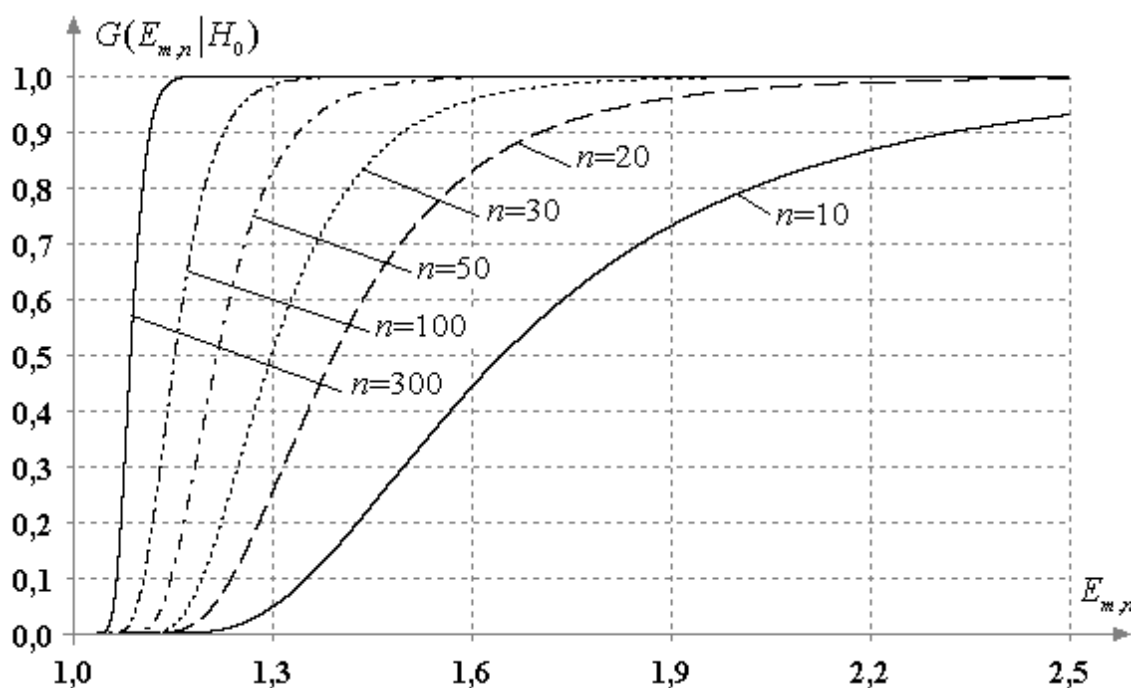


Рисунок 2.22 – Зависимость распределений статистики (2.33)

критерия Пардо от n при m^*

2.18 Критерий Шварца

Статистика критерия имеет вид [85]:

$$A_n^* = \frac{n}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2} - \frac{1}{n} \right)^2, \quad (2.34)$$

где $U_0 = -U_1$, $U_{n+1} = 2 - U_n$.

Критерий правосторонний, критические значения представлены в таблице А.17. На рисунке 2.23 показаны распределения $G(A_n^* | H_0)$ статистики в зависимости от объёма выборки n .

Оценки мощности критерия относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 представлены в таблицах Б.49, Б.50 и Б.51.

Статистика критерия Шварца по виду очень близка к статистике критерия Кимбелла, но благодаря имеющимся отличиям критерий обладает заметным преимуществом в мощности (относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез) по сравнению с группой других критериев, имеющих близкие по виду

статистики с критерием Кимбелла (перед критериями Шермана, Морана, Гринвуда, Гринвуда–Кэсенберри–Миллера, Янга).

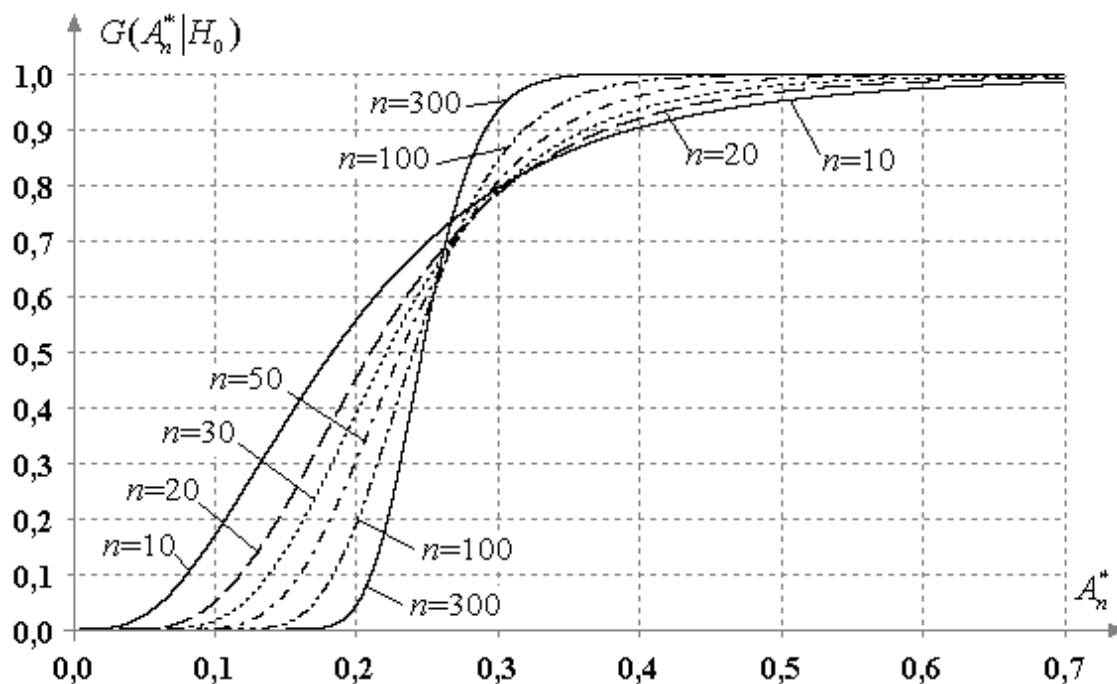


Рисунок 2.23 – Зависимость распределений статистики (2.34) критерия Шварца от n

В данном случае критерий имеет частый недостаток – зависимость распределения статистики от объема выборки n , вследствие чего приходится использовать таблицу процентных точек.

У критерия отсутствует смещение и мощность относительно гипотезы H_1 выше, чем у предшествующего критерия Пардо. В то же время относительно H_2 и H_3 по мощности он значительно уступает последнему.

2.19 Модификация критерия Андерсона-Дарлингга

В [73] была предложена статистика для проверки равномерности, основанная на критерии согласия Андерсона-Дарлингга.

Статистика имеет следующий вид:

$$V^2 = n \left[\frac{(U_1 - c_1)^2}{(1 - c_1)} + \sum_{i=1}^n \frac{(U_i - c_i)^2}{c_i(1 - c_i)} (c_{i+1} - c_i) + \frac{(U_n - c_n)^2}{c_n} \right], \quad (2.35)$$

где $c_i = (i - 0.375) / (n + 0.25)$.

В таблице А.18 представлены уточнённые процентные точки для модификации (2.35), полученные в процессе моделирования 1 660 000 значений статистики при справедливости гипотезы о равномерности анализируемых выборок. Процентные точки, приведенные в таблице А.18 несколько отличаются от результатов авторов [73], которые получены при моделировании с меньшей точностью при числе экспериментов метода Монте–Карло 100 000 выборок. (отличие в 3-м знаке после запятой).

Наши исследования показали, что распределение модифицированной статистики (2.35) сходится к предельному распределению $a_2(s)$ значительно медленнее. В частности, гипотеза о согласии эмпирического распределения (при числе экспериментов $N = 10^6$) с теоретическим распределением $a_2(s)$ не отвергается (при заданном уровне значимости $\alpha = 0.05$) при объёмах выборок $n > 1000$. При числе экспериментов $N = 1.66 \times 10^4$ – гипотеза о согласии не отвергается при $n \geq 300$.

Оценки мощности критерия со статистикой (2.35) относительно конкурирующей гипотезы H_1 представлены в таблице Б.52, относительно гипотез H_2 и H_3 – в таблицах Б.53 и Б.54 соответственно.

Стоит заметить, что в ситуации проверки равномерности относительно конкурирующей гипотезы H_1 смещенность не проявляется, в отличие от непараметрического критерия Андерсона–Дарлинга.

2.20 Энтропийный критерий Корреа

На ряду с рассмотренными ранее энтропийными критериями (пп. 2.13 и 2.14) в [16] предлагается критерий, который также оценивает величину (2.27) энтропии Шэннона.

Статистика данного критерия имеет вид:

$$C(m, n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(b_i), \quad (2.36)$$

$$\text{где } b_i = \frac{\sum_{j=i-m}^{i+m} (U_j - \bar{U}_i)(j/n - i/n)}{\sum_{j=i-m}^{i+m} (U_j - \bar{U}_i)^2}; \quad \bar{U}_i = \frac{\sum_{j=i-m}^{i+m} U_j}{2m+1},$$

Правило выбора размера окна m совпадает с критерием Дудевича-ван Дер Мюлена (2.28): выбирается целое число $m < \frac{n}{2}$, при этом, если $i+m \geq n$, то $U_{i+m} = U_n$, а если $i-m \leq 1$, то $U_{i-m} = U_1$.

В [102] было отмечено, что зависимость мощности от параметра аналогична критерию Дудевича-ван Дер Мюлена (2.28).

Критерий Корреа практически сопоставим по мощности с критерием Дудевича-ван дер Мюлена, но с ростом объема выборок он начинает слегка уступать в мощности относительно конкурирующих гипотез H_2 , H_3 (см. табл. 2.8).

С учетом того, что статистика критерия Корреа более сложна в вычислениях и редко превышает по мощности другие критерии 3 группы, лучше использовать другой энтропийный критерий, например критерий Дудевича-ван дер Мюлена.

Таблица 2.8 – Оценки мощности критериев Корреа и Дудевича-ван Дер Мюлена при некоторых значениях размера окна m и объемов выборок n

n	m	Статистика	H_1	H_2	H_3
20	4	$C(4,20)$	0.376	0.116	0.131
		$H(4,20)$	0.361	0.115	0.134
50	6	$C(6,50)$	0.597	0.180	0.188
		$H(6,50)$	0.601	0.188	0.191
100	6	$C(6,100)$	0.782	0.313	0.267
		$H(6,100)$	0.790	0.327	0.275
300	9	$C(9,300)$	0.993	0.703	0.551
		$H(9,300)$	0.995	0.729	0.568

2.21 Сравнительный анализ множества специальных критериев равномерности

Рассмотренные специальные критерии проверки равномерности в таблице 2.9 упорядочены по убыванию мощности относительно соответствующих конкурирующих гипотез (по величине мощности $1 - \beta$, проявленной при $n = 100$ и уровне значимости $\alpha = 0.1$).

В столбце для H_1 темным тоном выделены критерии, которые показали очень низкую мощность относительно этой гипотезы при малых объемах выборок n (обладают ярко выраженной смещённостью). В меньшей степени смещённость относительно H_1 проявляется у критериев Неймана–Бартона со статистиками N_2 и N_3 . Этот недостаток не отмечен только для некоторых критериев: для энтропийного критерия Дудевича–ван дер Мюлена и его модификаций, для модификации критерия согласия Андерсона–Дарлинга, для критериев Ченга–Спиринга, Шварца и Пардо.

Результаты исследования свойств специальных критериев равномерности кратко можно сформулировать следующим образом.

Критерии, базирующиеся на оценках энтропии, представляют собой достаточно эффективные критерии проверки гипотез о принадлежности наблюдений равномерному закону. В частности, они, как правило, существенно превосходят критерии равномерности, в которых используются разности последовательных порядковых статистик (например, критерии Шермана, Кимбелла, Морана, Янга).

Относительно конкурирующих гипотез вида H_2 или H_3 эти критерии несколько уступают в мощности критериям типа Хегази–Грина, Фросини, Неймана–Бартона, но у них отсутствует смещённость относительно конкурирующих гипотез вида H_1 и, даже более того, относительно такого рода гипотез они имеют преимущество в мощности перед большинством критериев,

включая непараметрические критерии согласия, особенно при больших размерах окна m .

Таблица 2.9 – Упорядоченность специальных критериев по мощности относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3

№ п/п	Относительно H_1	$1-\beta$	Относительно H_2	$1-\beta$	Относительно H_3	$1-\beta$
1	Модификация энтропийного критерия 2	0.883	Хегази-Грина T_1	0.610	Хегази-Грина T_1	0.522
2	Неймана–Бартона N_2	0.837	Фросини	0.603	Фросини	0.522
3	Кресси 2	0.820	Хегази-Грина T_2	0.602	Хегази-Грина T_1^*	0.520
4	Дудевича–ван дер Мюлена	0.790	Неймана–Бартона N_2	0.597	Модификация критерия Андерсона-Дарлингга	0.519
5	Модификация энтропийного критерия 1	0.789	Хегази-Грина T_1^*	0.595	Хегази-Грина T_2	0.508
6	Корреа	0.782	Модификация критерия Андерсона-Дарлингга	0.585	Хегази-Грина T_2^*	0.506
7	Неймана–Бартона N_3	0.766	Хегази-Грина T_2^*	0.585	Неймана–Бартона N_2	0.447
8	Неймана–Бартона N_4	0.739	Неймана–Бартона N_3	0.577	Неймана–Бартона N_3	0.416
9	Модификация критерия Андерсона-Дарлингга	0.730	Неймана–Бартона N_4	0.557	Неймана–Бартона N_4	0.381
10	Ченга-Спиринга	0.722	Пардо	0.463	Пардо	0.291
11	Шварца	0.583	Модификация критерия Гринвуда ($m = 10$)	0.328	Модификация критерия Гринвуда ($m = 10$)	0.287
12	Хегази-Грина T_1^*	0.443	Модификация энтропийного критерия 1	0.328	Дудевича–ван дер Мюлена	0.275
13	Хегази-Грина T_2^*	0.409	Дудевича–ван дер Мюлена	0.327	Модификация энтропийного критерия 1	0.275
14	Пардо	0.408	Кресси 1	0.314	Модификация энтропийного критерия 2	0.267
15	Фросини	0.384	Корреа	0.313	Корреа	0.267
16	Хегази-Грина T_1	0.322	Модификация энтропийного критерия 2	0.266	Кресси 2	0.226
17	Хегази-Грина T_2	0.308	Гринвуда–Кэсенберри–Миллера	0.244	Кресси 1	0.218
18	Гринвуда–Кэсенберри–Миллера	0.290	Шварца	0.226	Шварца	0.206
19	Кимбелла	0.279	Кресси 2	0.217	Гринвуда–Кэсенберри–Миллера	0.186
20	Морана 1	0.279	Шермана	0.204	Кимбелла	0.165
20	Гринвуда	0.279	Кимбелла	0.201	Морана 1	0.165
22	Модификация критерия Гринвуда ($m = 10$)	0.230	Морана 1	0.201	Гринвуда	0.165
23	Шермана	0.215	Гринвуда	0.201	Шермана	0.154
24	Кресси 1	0.187	Морана 2	0.193	Морана 2	0.143
25	Морана 2	0.187	Ченга-Спиринга	0.168	Ченга-Спиринга	0.106
26	Янга	0.115	Янга	0.108	Янга	0.104

Недостатками, затрудняющими использование критерия Дудевича–ван дер Мюлена и других энтропийных критериев, является зависимость распределений статистик этих критериев от объема выборки n и необходимость использования таблицы процентных точек, а также некоторая неопределенность с выбором m .

Критерий Неймана–Бартона со статистикой N_2 показывает высокую мощность относительно H_1 и сравнительно высокие результаты относительно H_2 и H_3 . Использование критерия со статистиками N_3 и N_4 также эффективно, но в связи с тем, что статистика N_2 показывает более высокие мощности и требует меньше вычислений, рекомендуется использовать именно статистику на двух полиномах. Применение статистики на одном полиноме неэффективно в связи с неспособностью отличать гипотезу H_1 от равномерного закона.

Среди специальных критериев стабильно неплохую способность отличать конкурирующие гипотезы от равномерного закона демонстрируют критерии Хегази–Грина и Фросини.

Низкую мощность демонстрируют критерии, в статистиках которых суммируются модули или квадраты разностей $U_i - U_{i-1}$ значений последовательных порядковых статистик (критерии Шермана, Кимбелла, Морана, Гринвуда, Гринвуда–Кэсенберри–Миллера).

Особенно низкую мощность относительно всех трёх рассматриваемых гипотез показал критерий Янга, что свидетельствует о крайней неудачности попытки использования соответствующей статистики в критерии проверки гипотезы о равномерности. Можно предположить, что столь же неудачной идеей окажется применение такой статистики в любом критерии, предназначенном для проверки согласия наблюдаемой выборки с некоторым конкретным законом распределения.

Критерий Ченга–Спиринга, демонстрирующий достаточно высокую мощность относительно H_1 , относительно H_2 и H_3 показывает очень низкую мощность.

Выводы по главе

Методами статистического моделирования исследованы свойства множества критериев, ориентированных на проверку принадлежности выборок равномерному закону. Построены расширенные таблицы критических значений. В случае существования предельных распределений статистик критериев, исследована сходимость к ним эмпирических распределений статистик, оценены объёмы выборок, начиная с которых можно пренебречь отклонением реальных распределений статистик от предельных.

В критериях с оконным параметром m исследовано влияние этого дополнительного параметра. Исходя из полученных оценок мощности, сделаны рекомендации по оптимальному выбору m в соответствующем критерии.

Для рассмотренных критериев построены таблицы с оценками мощности относительно трёх конкурирующих гипотез, рассмотренных в п.1.3.2, для объемов выборок $n = 10, 20, 30, 40, 50, 100, 150, 200$ и 300 .

При относительно небольших объёмах выборок и малых уровнях значимости α обнаружена смещенность большей части исследуемых критериев равномерности относительно близких конкурирующих законов с функциями распределениями, пересекающими функцию распределения равномерного закона (в частности, мощность $1 - \beta$ оказалась меньше заданной вероятности α ошибки первого рода относительно гипотезы H_1).

Проведен сравнительный анализ мощности специальных критериев равномерности относительно 3-х рассмотренных конкурирующих гипотез.

Подготовлены рекомендации [132] по применению данной группы критериев, учитывающие найденные достоинства и недостатки конкретных критериев.

3 ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ КРИТЕРИЕВ ПОКАЗАТЕЛЬНОСТИ

Исследования, описанные в данной главе, являются продолжением исследований А.П. Рогожникова, связанных с исследованием свойств критериев показательности [139]. Настоящие исследования по большей части касаются других критериев показательности, результаты демонстрируются на более разнообразном спектре объемов выборок. И в то же время у А.П. Рогожникова заимствована идея о важности исследования мощности критериев показательности относительно конкурирующих законов с различными интенсивностями отказов.

3.1 Критерий Шапиро-Уилка

Предположим, есть выборка x_1, x_2, \dots, x_n с неизвестной начальной точкой. Плотность вероятностей $f(x) = \frac{1}{v} \exp\left(-\frac{x-\mu}{v}\right)$ с неизвестным параметром μ .

Тогда статистика критерия Шапиро-Уилка описывается формулой [76]:

$$W_E = \frac{n(\bar{x} - x_{(1)})^2}{(n-1) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (3.1)$$

Критерий является двусторонним, гипотеза показательности отклоняется как при больших, так и при малых значениях статистики. Критические значения $W_E(\alpha)$ приведены в приложении В, в таблице В.1.

Если же параметр μ известен, при замене x_i на $x_i - \mu$ статистика (3.1) принимает следующий вид:

$$W_{E0} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}. \quad (3.2)$$

Так же вместо статистики (3.2) можно воспользоваться статистикой следующего вида [80]:

$$\tilde{W}_{E0} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n \left[(n+1) \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right]}. \quad (3.3)$$

В таблицах Г.1-Г.3 приложения Г представлены оценки мощности критерия со статистиками (3.1) и (3.3) относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез (см. п.1.4.2). Критические значения статистики (3.2) совпадают с критическими значениями статистики (3.1) с учетом замены n на $(n+1)$. Критические значения статистики (3.3) приведены в таблице В.2 приложения В.

3.2 Критерий Фросини

Статистика критерия Фросини [116] имеет вид

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left| 1 - \exp \left(-\frac{x_i}{\bar{x}} \right) - \frac{i-0,5}{n} \right|. \quad (3.4)$$

Во многом она схожа с формулой статистики критерия Фросини для проверки равномерности. Критерий правосторонний, гипотеза отвергается при больших значениях статистики.

В таблицах Г.4-Г.6 представлены оценки мощности критерия относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез.

Критические значения, полученные в результате моделирования, показаны в таблице В.3 приложения. Как и в критерии равномерности Фросини критические значения при $n \rightarrow \infty$, приведенные в [116] меньше критических значений, полученных при $n = 100$ и $n = 500$. Однако с ростом объема выборок критические значения практически не меняются, что свидетельствует о наличии предельного распределения. Стоит заметить, что предельные распределения статистик критерия показательности Фросини и одноименного критерия равномерности отличаются.

3.3 Корреляционный критерий экспоненциальности

В [79] рассмотрен критерий экспоненциальности, аналогичный корреляционному критерию проверки принадлежности выборки нормальному закону.

Пусть выборка x_1, x_2, \dots, x_n принадлежит закону распределения вероятностей $F(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x - \mu}{\nu}\right)$, где μ и ν – неизвестные параметры, оценки которых могут быть найдены по формулам:

$$\hat{\nu} = \frac{n(\bar{x} - x_{(1)})}{n-1}; \quad \hat{\mu} = x_{(1)} - \frac{\hat{\nu}}{n}.$$

Статистика критерия основана на коэффициенте корреляции r между нормированной переменной $z_i = \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\nu}}$ и математическим ожиданием i -й порядковой статистики, представленной выборкой объема n из экспоненциального распределения:

$$r(z, m) = \frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})(m_i - \bar{m})}{\left[\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2 \sum_{i=1}^n (m_i - \bar{m})^2 \right]^{1/2}}, \quad (3.5)$$

где $m_i = \sum_{j=1}^i \frac{1}{n-j+1}$, $\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i$.

При объеме выборок $n \geq 20$ используется аппроксимация $\tilde{m}_i = -\ln\left(1 - \frac{i}{n+1}\right)$, а соответствующий коэффициент корреляции обозначается как $r(z, \tilde{m})$.

В критерии используются статистики в форме:

$$K(z, m) = n[1 - r^2(z, m)]; \quad (3.6)$$

$$K(z, \tilde{m}) = n[1 - r^2(z, \tilde{m})]. \quad (3.7)$$

В таблице В.4 приложения представлены критические значения статистик критерия, полученные в результате моделирования. Критерии правосторонние: проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистик.

В таблицах Г.7-Г.9 представлены полученные оценки мощности критерия относительно разных конкурирующих гипотез. Относительно гипотезы H_1 критерий со статистикой (3.7) показывает лучшую мощность, однако с ростом объема выборок разница уменьшается. Относительно гипотезы H_2 всё повторяется с точностью наоборот: теперь преимущество по мощности имеет критерий со статистикой (3.6) до объема выборок $n < 100$. Для гипотезы H_3 у критерия проявляется ярко выраженная смещенность (в таблице Г.9 и далее смещенность выделяется серым тоном), особенно для критерия со статистикой (3.7).

3.4 Критерий Кимбера-Мичела

Кимбер [39] предложил критерий, основанный на линейной зависимости теоретической $F(x)$ и эмпирической $F_n(x) = \frac{i}{n}$ функций распределения вероятностей случайных величин. Для того чтобы стабилизировать зависимость и ослабить влияние неравных дисперсий $F(x)$ и $F_n(x)$ в статистике используется предложенное Мичелом [60] преобразование:

$$s_i = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{F(x)} \quad \text{и} \quad r_i = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{i-0.5}{n}}.$$

Сама статистика критерия имеет форму

$$D = \max_i |s_i - r_i|. \quad (3.8)$$

Критерий правосторонний, проверяемая гипотеза отклоняется при больших значениях статистики.

Критические значения, полученные по результатам статистического моделирования и расширяющие таблицу процентных точек, приведенную в [60]

представлены в таблице В.5 приложениях. Эти значения совпадают с таблицей процентных точек, приведенной в [116].

В таблицах Г.10-Г.12 приведены полученные оценки мощности критерия относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез.

3.5 Критерий Фишера

Если x_1, x_2, \dots, x_n представляет собой (неупорядоченную) выборку независимых случайных величин, принадлежащих экспоненциальному закону, то статистика вида [116]:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{(n-1)x_1} \quad (3.9)$$

при справедливости нулевой гипотезы подчиняется $F_{2n-2,2}$ -распределению Фишера со степенями свободы $f_1 = 2n - 2$ и $f_2 = 2$. О близости распределений статистики при справедливости гипотезы H_0 к соответствующим F -распределениям при различных объемах выборок n можно судить по картине, представленной на рисунке 3.1: распределение статистики $G(F|H_0)$ хорошо описывается соответствующими F -распределениям.

Критерий является двусторонним, проверяемая гипотеза H_0 отклоняется как при больших, так и при малых значениях статистики.

Оценки мощности критерия относительно трех рассматриваемых конкурирующих гипотез представлены в таблицах Г.13-Г.15. Критерий демонстрирует крайне низкую мощность и не способен отличать показательный закон от других. Относительно конкурирующих гипотез H_1 и H_3 даже наблюдается смещенность, которая с ростом объемов выборок до 300 не исчезает. Смещённость наблюдается и относительно более далеких конкурирующих законов с возрастающей интенсивностью отказов (Рисунок 3.2).

На рисунке 3.2 в качестве иллюстрации сказанного показаны распределения статистики критерия при справедливости проверяемой гипотезы H_0 , а также при

справедливости двух достаточно далеких от H_0 конкурирующих гипотез H_4 , которой соответствует распределение Вейбулла с параметром формы 1.5 (сдвиг 0, масштаб 1), и H_5 , соответствующей распределению Вейбулла с параметром формы 2. Как видим, распределения $G(F|H_4)$ и $G(F|H_5)$ смещены влево от $G(F|H_0)$

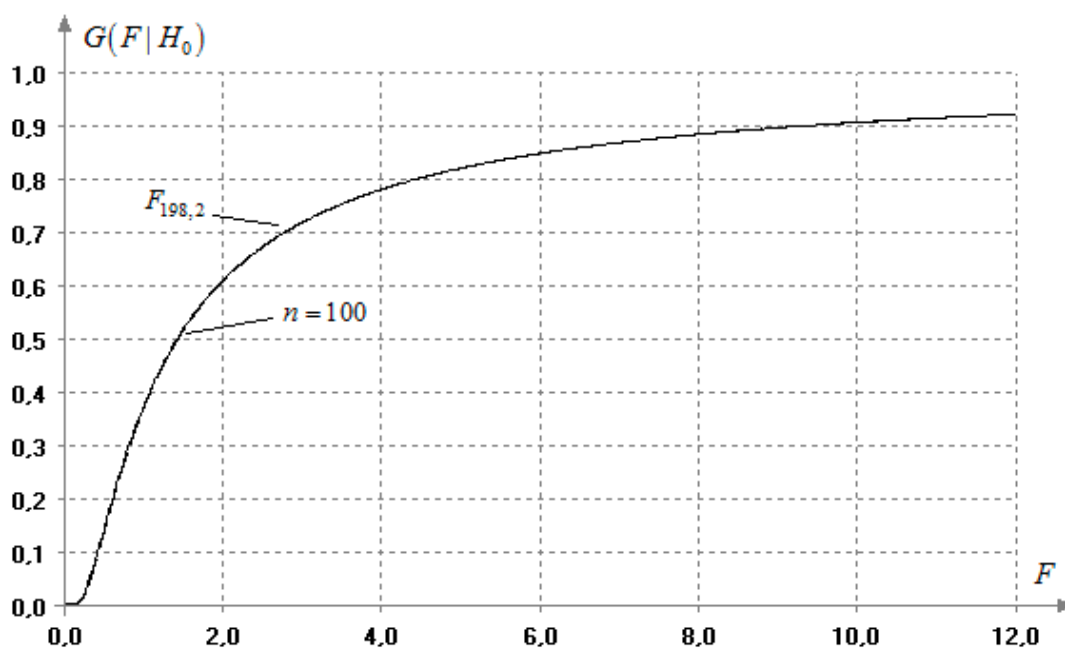


Рисунок 3.1 – Распределение статистики (3.9) Фишера при $n = 100$ и соответствующее F –распределение

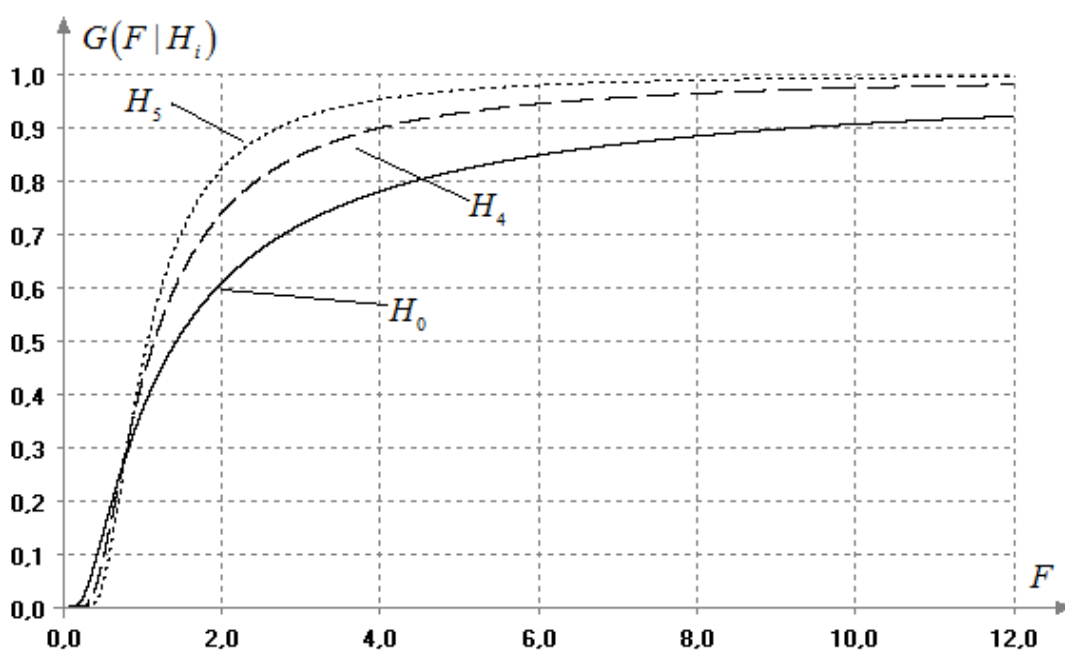


Рисунок 3.2 – Распределение статистики (3.9) Фишера при H_0 и конкурирующих гипотезах H_4 и H_5 при $n = 100$

3.6 Критерий Бартлетта-Морана

Статистика критерия, описывается формулой [116]:

$$B = \frac{2n \left[\ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i \right]}{1 + \frac{n+1}{6n}} = \frac{12n^2}{7n+1} \left[\ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i \right]. \quad (3.10)$$

Основой для критерия послужили ранние работы Бартлетта [4,5], поэтому в некоторых публикациях этот критерий именуется как критерий Бартлетта [27, 28].

На рисунке 3.3 представлены распределения статистики (3.10) при H_0 и при конкурирующих гипотезах $H_1 - H_3$ при объеме выборок $n = 50$. Можно увидеть, что распределения статистики при конкурирующих гипотезах могут сдвигаться как в область малых, так и больших значений статистики относительно распределения при справедливости гипотезы H_0 . В связи с этим критерий был рассмотрен как двусторонний.

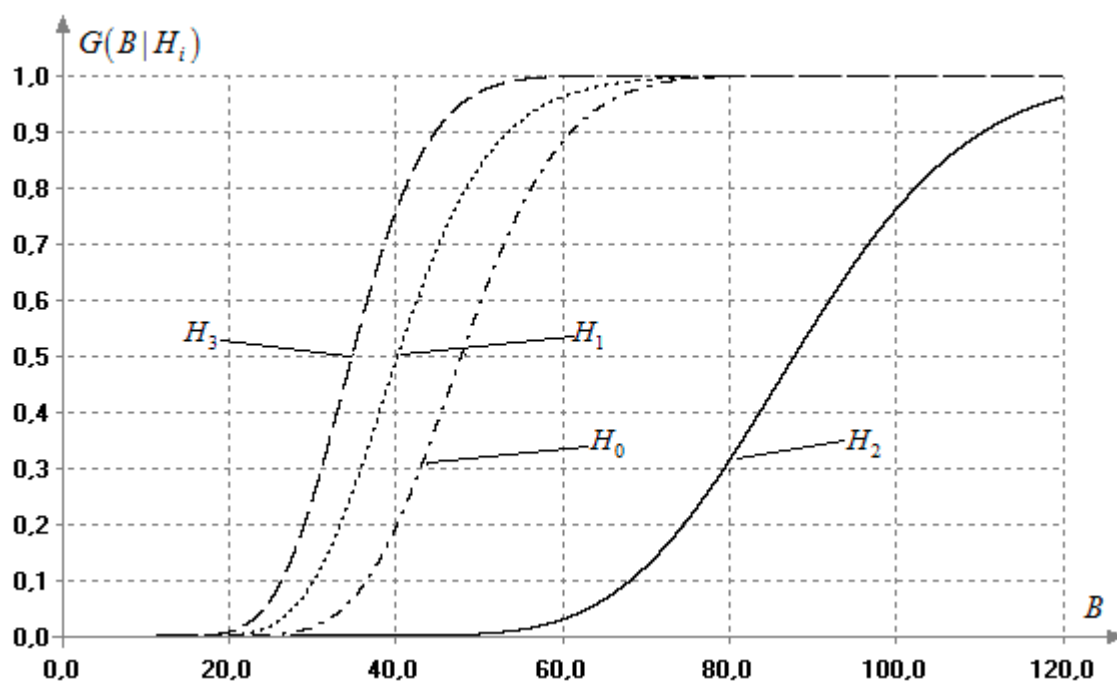


Рисунок 3.3 – Распределения статистики (3.10) при H_0 и конкурирующих гипотезах H_1, H_2, H_3 при $n = 50$

В [116] говорится о том, что распределение статистики $G(B|H_0)$ является χ^2 -распределением с $(n-1)$ степенями свободы. На рисунке 3.4 демонстрируется близость функции распределения статистики и χ^2 -распределения при $n=50$. Однако стоит заметить, что в некоторых случаях более близким оказывается χ^2 -распределение с другой степенью свободы.

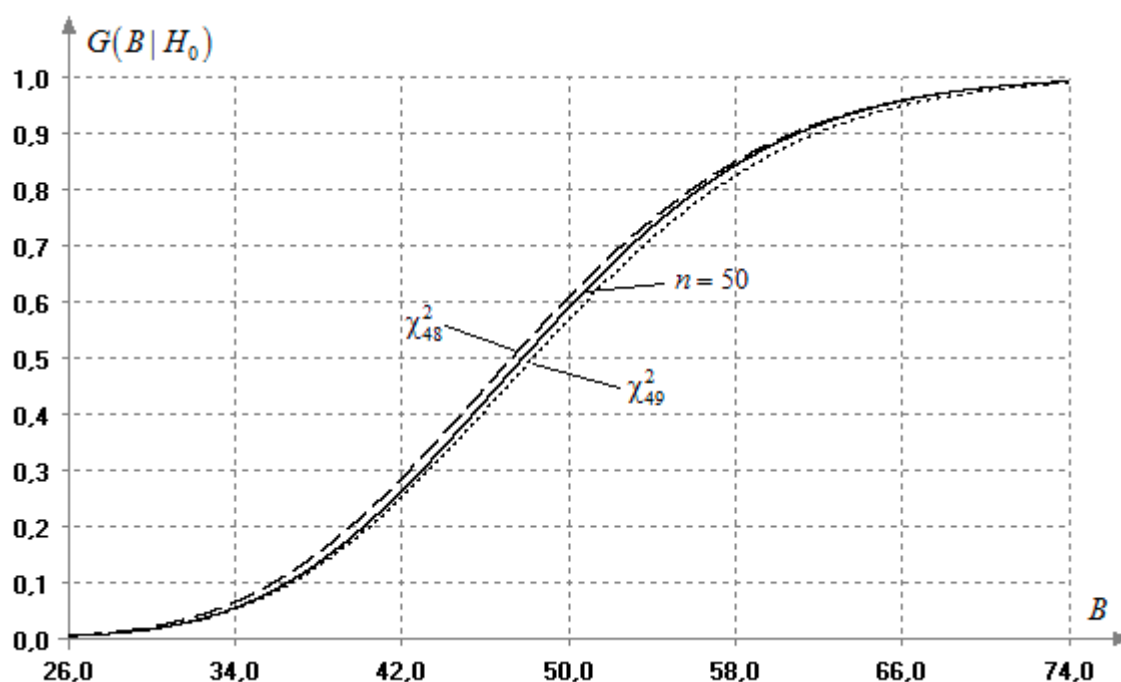


Рисунок 3.4 – Распределение статистики (3.10) при $n=50$ и ближайшие χ^2 -распределения

В таблицах Г.16-Г.18 представлены полученные оценки мощности критерия относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез.

3.7 Критерий Пиэтра

Этот критерий именуется в разных источниках по-разному. Так в [3, 30, 74] он называется критерием Пиэтра, а в [116] критерием проверки показательности Шермана. Статистика критерия имеет вид

$$\omega_n = \frac{1}{2n} \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{\bar{x}}. \quad (3.11)$$

По мнению некоторых источников [116], критические значения статистики (3.11) совпадают с критическими значениями статистики (2.1) критерия

равномерности Шермана. Однако это не совсем верно, критические значения статистики (2.1) при объеме выборок n совпадают с критическими значениями статистики (3.11) при объеме выборок $n+1$. Но этим различием можно пренебречь уже при объемах выборок $n \geq 20$.

В [116] критерий рассматривается в качестве правостороннего критерия, однако результаты наших исследований показали, что данный критерий следует использовать как двусторонний. Это следует из картины, представленной на рисунке 3.5, где показаны распределения статистики (3.11) при справедливости H_0 и при справедливости рассматриваемых конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 при $n = 50$.

Критические значения для двустороннего критерия Пиэтра представлены в приложении В.6.

Поскольку распределения статистики (2.1) критерия равномерности Шермана и статистики (3.11) критерия Пиэтра при определенных условиях совпадают, то очевидно, что в критерии Пиэтра можно применять и нормализованные статистики (2.2) и (2.3).

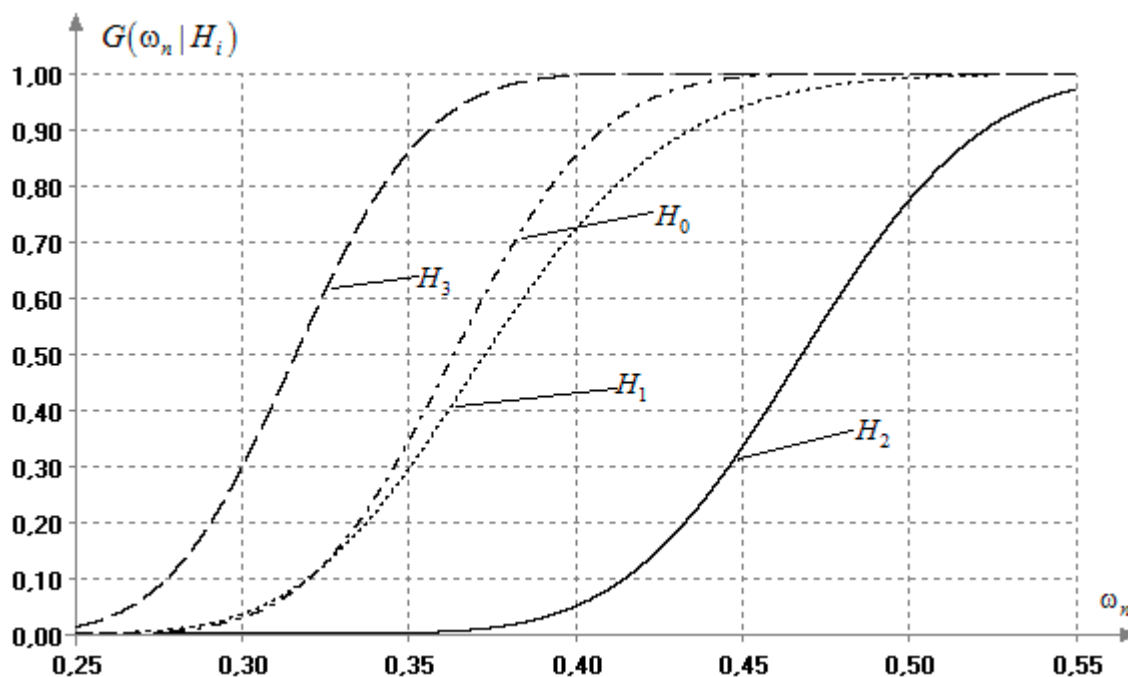


Рисунок 3.5 – Распределения статистики (3.11) при H_0 и конкурирующих гипотезах H_1 , H_2 , H_3 при $n = 50$

Как и в случае с критерием равномерности Шермана, нормализация (2.3), применяемая к статистике (3.11) критерия Пиэтра быстрее сходится к стандартному нормальному закону чем нормализация (2.2). О близости распределения $G(\tilde{\omega}_n | H_0)$ нормализованной статистики вида (2.3) для критерия Пиэтра к стандартному нормальному закону при $n = 50$ можно судить по картине на рисунке 3.6.

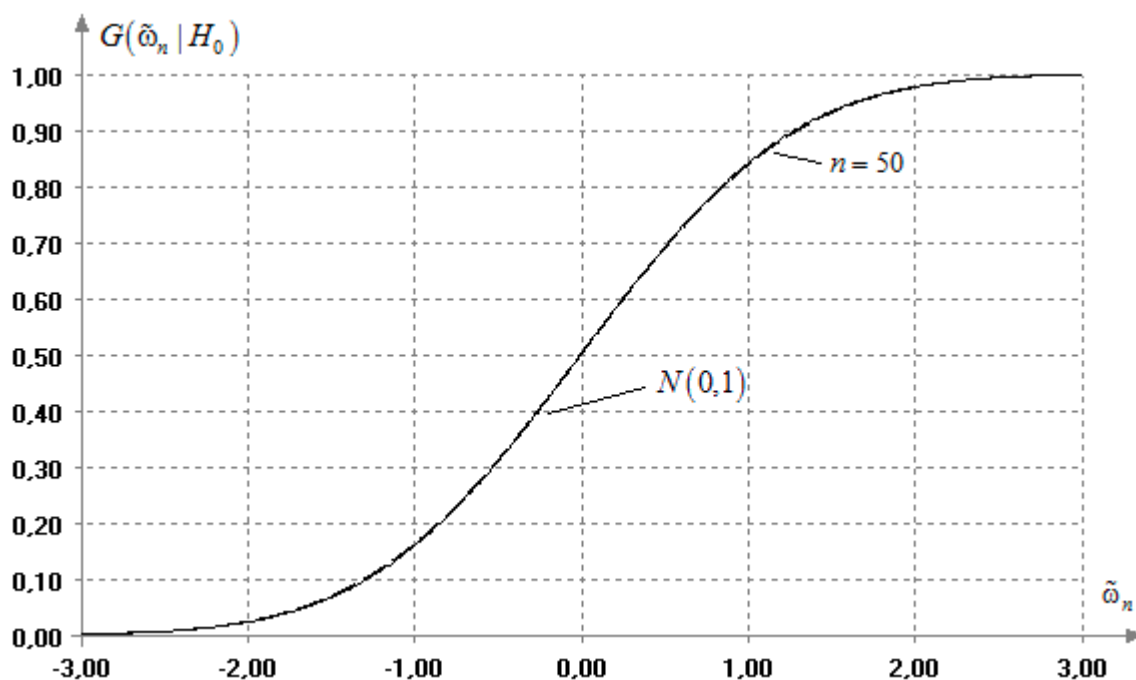


Рисунок 3.6 – Распределение статистики (2.3) для критерия Пиэтра при $n = 50$ и стандартное нормальное распределение

Полученные оценки мощности критерия относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 представлены в таблицах Г.19-Г.21.

3.8 Критерий Эппса-Палли

Статистика критерия имеет вид [26]:

$$c = \sqrt{48n} \left(\frac{1}{n} \exp\left(-\frac{x_i}{\bar{x}}\right) - \frac{1}{2} \right). \quad (3.12)$$

Критерий является двусторонним, гипотеза показательности отклоняется как при больших, так и при малых значениях статистики. Критические значения, полученные при моделировании, представлены в таблице Б.8 в приложениях.

С ростом объема выборок распределение статистики стремится к стандартному нормальному закону, однако эта сходимость довольно медленная. На рисунке 3.7 приведены распределения статистики при различных объемах выборок, а также предположительный предельный закон распределения.

В таблицах Г.22-Г.24 представлены оценки мощности критерия относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез.

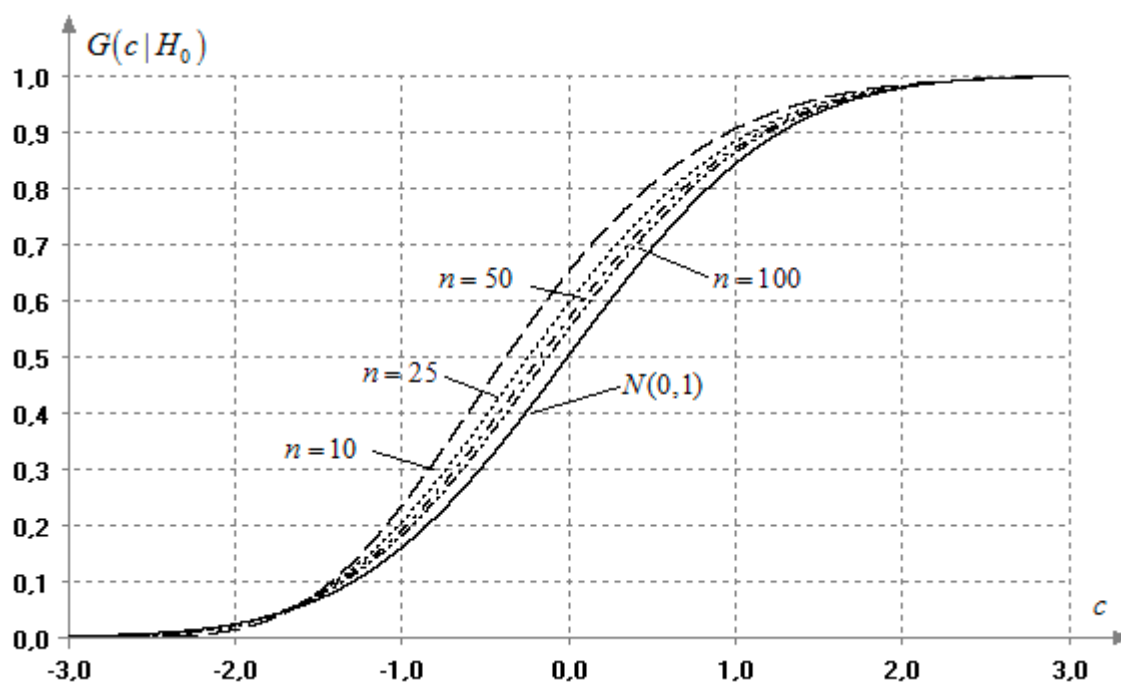


Рисунок 3.7– Распределения статистики (3.12) при H_0 при различных n

3.9 Критерий Холландера-Прошана

Статистика критерия, предложенного в [35], задается выражением:

$$T = \sum_{i>j>k} \varphi(x_i, x_j + x_k), \quad (3.13)$$

$$\text{где } \varphi(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{если } a > b; \\ 0 & \text{если } a < b. \end{cases}$$

Критерий является двусторонним, гипотеза H_0 отклоняется как при больших, так и при малых значениях статистики. Нормализованная статистика имеет вид:

$$T^* = \frac{T - E[T]}{\sqrt{D[T]}}; \quad (3.14)$$

$$\text{где } E[T] = \frac{n(n-1)(n-2)}{8};$$

$$D[T] = \frac{3n(n-1)(n-2)}{2} \left[\frac{5(n-3)(n-4)}{2592} + \frac{7(n-3)}{432} + \frac{1}{48} \right].$$

При справедливости проверяемой гипотезы H_0 и при $n \rightarrow \infty$ статистика T^* распределена асимптотически нормально со средним 0 и дисперсией 1. На основании исследований [138, 139] выявлено, что при $n \geq 400$ использование нормальной модели уже оправданно.

Поскольку статистика (3.13), и как следствие статистика (3.14), делает полный перебор сочетаний элементов проверяемой выборки, количество операций возрастает в геометрической прогрессии при росте объемов выборок. Это затрудняет применение инженерами данного критерия для данных большого объема, что является значительным недостатком.

В связи с этой трудозатратностью задача моделирования была ограничена для критерия Холландера-Прошана, критические значения и мощности для данного критерия получены до объема выборок $n = 150$. Критические значения представлены в таблице В.7. В таблицах Г.25-Г.27 представлены оценки мощности критерия относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез.

3.10 Критерий наибольшего интервала

Критерий имеет простую статистику следующего вида [110]:

$$\eta_n = \frac{\max(x_i - x_{i-1})}{\sum x_i}; \quad i = \overline{1, n}; \quad x_0 = 0. \quad (3.15)$$

Не смотря сказанное в [116], критерий является двусторонним. На рисунке 3.8 на примере с объемом выборок $n = 50$ показано, что распределения статистики при конкурирующих гипотезах могут сдвигаться как в область малых, так и больших значений статистики относительно распределения при справедливости гипотезы H_0 .

Критические значения статистики для двустороннего критерия, полученные при моделировании, представлены в таблице В.9. В таблицах Г.28-Г.30 представлены оценки мощности критерия относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез.

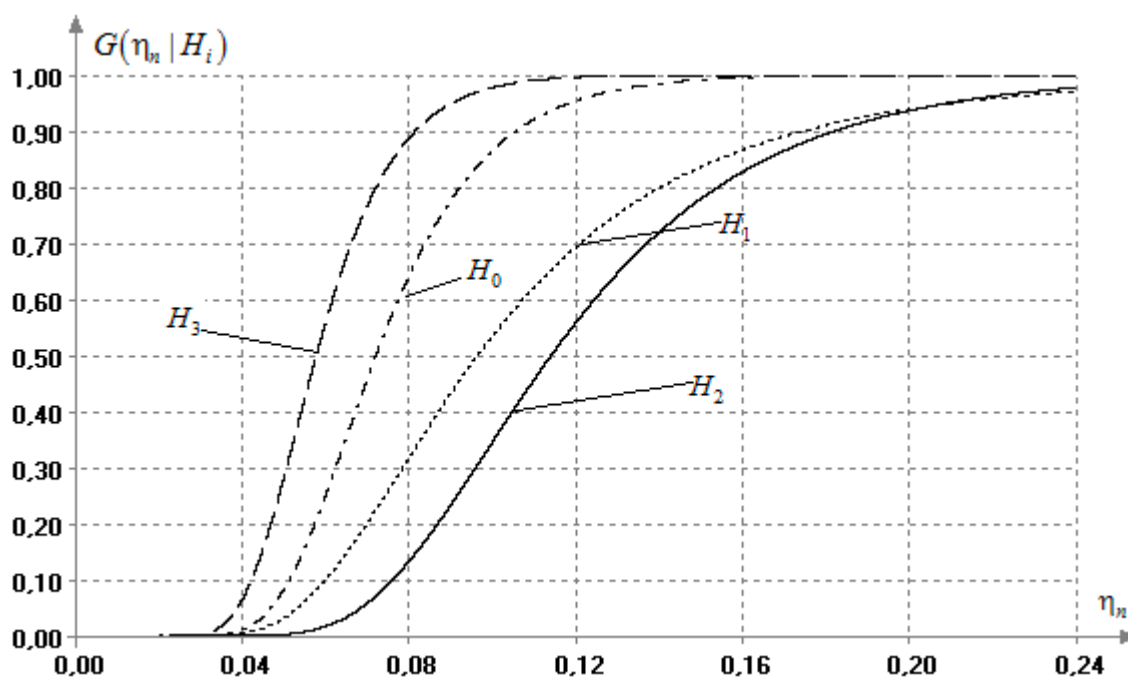


Рисунок 3.8 – Распределения статистики (3.15) при H_0 и конкурирующих гипотезах H_1 , H_2 , H_3 при $n = 50$

3.11 Критерий Кочара

Статистика критерия, предложенного Кочаром, имеет вид [41]:

$$T_n = \sqrt{\frac{108}{n}} \frac{\sum_{i=1}^n J\left(\frac{i}{n+1}\right)}{\sum_{i=1}^n x_i}; \quad (3.16)$$

$$\text{где } J\left(\frac{i}{n+1}\right) = 2\left(\frac{n+1-i}{n+1}\right) \left[1 - \ln\left(\frac{n+1-i}{n+1}\right)\right] - 1.$$

Данный критерий, как и с критерием наибольшего интервала, в [116] описан как правосторонний. Однако на самом деле данный критерий все-таки является двусторонним. На рисунке 3.9 можно увидеть, что распределения статистики при конкурирующих гипотезах могут от распределения при справедливости гипотезы H_0 в обе стороны.

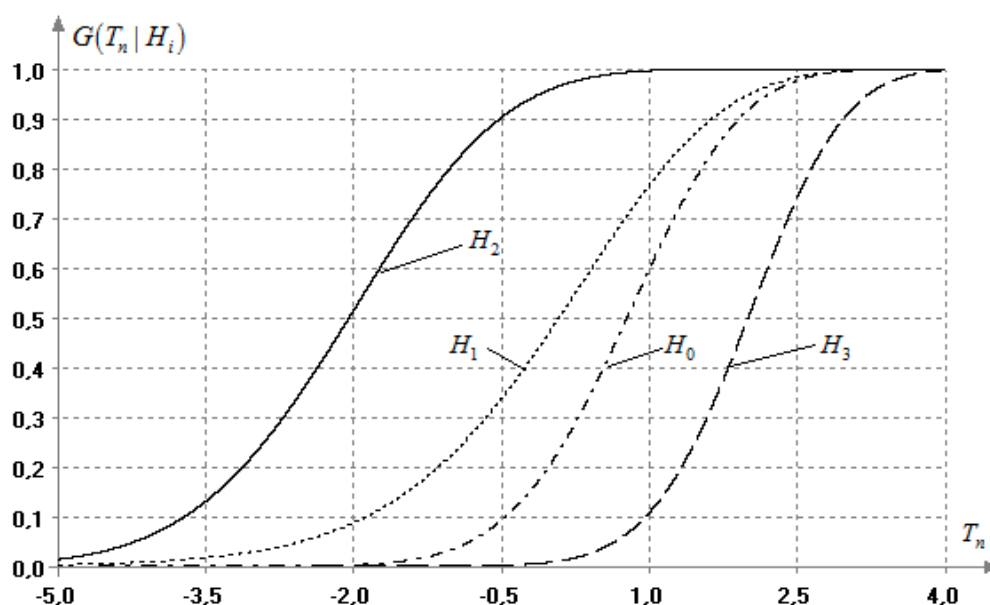


Рисунок 3.9 – Распределения статистики (3.16) при H_0 и конкурирующих гипотезах H_1 , H_2 , H_3 при $n = 50$

Критические значения статистики для двустороннего критерия, полученные при моделировании, представлены в таблице В.10 приложения.

В таблицах Г.31-Г.33 представлены оценки мощности критерия относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез.

3.12 Критерий Клишко-Антла-Радемакера-Рокетта

В [40] рассмотрен критерий экспоненциальности, основанный на проверке равенства единице коэффициента формы в распределении Вейбулла. Статистика критерия имеет вид:

$$c = \sqrt{n}(\tilde{c} - 1). \quad (3.17)$$

Для лучшего оценивания параметра формы распределения Вейбулла в [86] предложена аппроксимация вида:

$$\tilde{c} \approx v^{-1.075}, \quad (3.18)$$

$$\text{где } v = \frac{\sqrt{\left\{ \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right\}}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ x_i - \left[x_{(1)} - \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{(1)}) \right] \right\}},$$

$x_{(1)}$ – первый элемент упорядоченной выборки или минимальный элемент.

На рисунке 3.10 показаны распределения статистики при истинной гипотезе H_0 (экспоненциальная гипотеза) и конкурирующих гипотезах H_i при объеме выборок $n = 50$. Так как распределения при конкурирующей гипотезах отклоняются от распределения истинной гипотезы как влево, так вправо, то можно сделать вывод, что данный критерий двусторонний. Критические значения статистики для двустороннего критерия, полученные при моделировании, представлены в таблице В.11, которая является расширенной версией таблицы представленной в [116]. В таблицах Г.34-Г.36 приложения представлены оценки мощности критерия относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез.

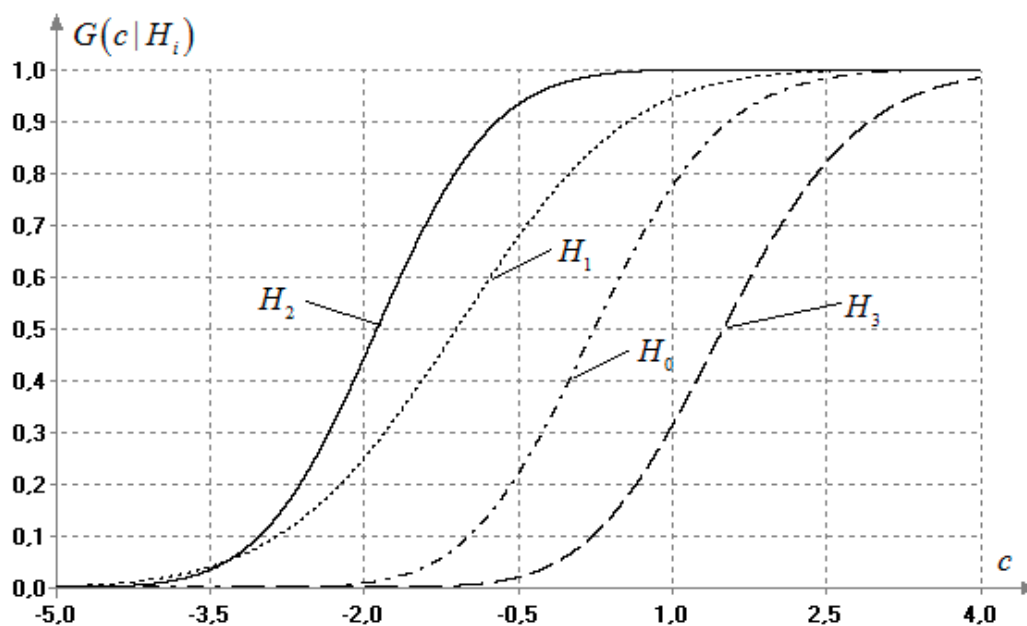


Рисунок 3.10 – Распределения статистики (3.17) при H_0 и конкурирующих гипотезах H_1, H_2, H_3 при $n = 50$

3.13 Критерий Гринвуда

Статистика критерия Гринвуда для проверки гипотезы показательности имеет следующий вид [33, 116]:

$$G = \frac{E[X^2]}{(E[X])^2} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right)^2} = n \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}. \quad (3.19)$$

Критерий является двусторонним, гипотеза показательности отклоняется как при больших, так и при малых значениях статистики. В приложении В.12 представлена расширенная версия таблиц [13, 81, 116] процентных точек статистики критерия Гринвуда. В [116] сказано, что критические значения критерия показательности Гринвуда совпадают с критическими значениями одноименного критерия равномерности (2.21), если взять $n + 1$ вместо n .

В таблицах Г.37-Г.39 представлены оценки мощности критерия относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез.

3.14 Критерий Лоулесса

В [45] и [25] рассмотрен критерий проверки гипотезы относительно значения параметра формы гамма-распределения, основанный на статистике:

$$W = \frac{\tilde{x}}{\bar{x}}, \quad (3.20)$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ и $\tilde{x} = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n}$ — арифметическое и геометрическое средние ряда

x_1, x_2, \dots, x_n , соответственно.

Данный критерий является двусторонним, гипотеза о показательности отвергается как при больших, так и при малых значениях статистики. Критические значения, представленные в таблице В.13, являются расширенной версией таблиц из [37] и [116].

Статистика (3.20) является обобщением ранее рассмотренной нами статистики Бартлетта-Морана (3.10). Исследования показали, что по мощности данные критерии эквивалентны.

3.15 Критерий Дешпанде

Дешпанде [20] было предложено семейство критериев показательности, где в качестве альтернативы рассматривались законы распределения с возрастающей интенсивностью отказов. Статистики критериев Дешпанде описывается формулой:

$$J = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} \varphi(x_i; bx_j), \quad (3.21)$$

$$\text{где } \varphi(x_i, bx_j) = \begin{cases} 1 & \text{если } x_i > bx_j; \\ 0 & \text{если } x_i \leq bx_j. \end{cases}$$

Данный критерий является двусторонним, гипотеза о показательности отвергается как при больших, так и при малых значениях статистики.

Дискретность распределения хорошо заметна при $n = 20$, однако становится несущественной при $n \geq 50$.

Автором критерия предложена нормализация статистики в виде:

$$J^* = \frac{J - E[J]}{\sqrt{D[J]}}; \quad (3.22)$$

где $E[J] = \frac{1}{b+1}$, $D[J] = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{b}{b+2} + \frac{1}{2b+1} + \frac{2(1-b)}{b+1} - \frac{2b}{b^2+b+1} - \frac{4}{(b+1)^2} \right)^2$,

распределение которой достаточно хорошо аппроксимируется стандартным нормальным законом.

На рисунке 3.11 можно видеть распределения статистики (3.22) критерия Дешпанде при $b = 0.1$ и объеме выборок $n = 100$ и стандартное нормальное распределение. Распределения довольно близки, в то же время стоит отметить, что сходимость к нормальному закону зависит от величины параметра b .

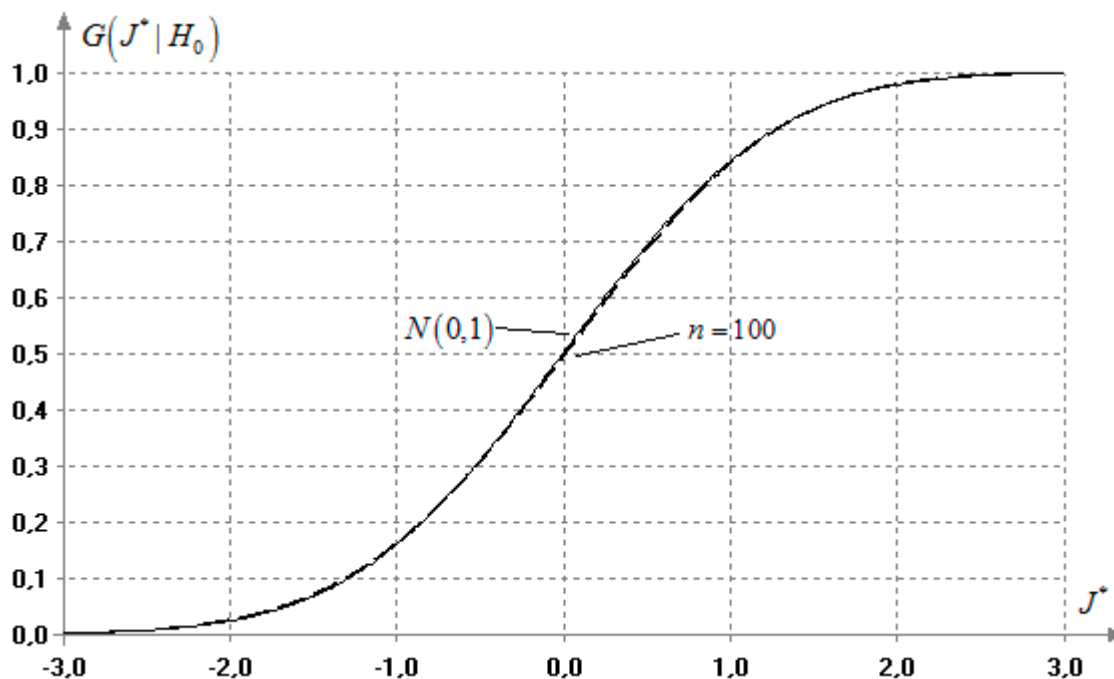


Рисунок 3.11 – Распределения статистики (3.22) при $n = 100$ и стандартный нормальный закон

От выбора параметра b зависит эффективность критерия против различных альтернатив. В различных работах предлагаются различные оптимальные

значения для параметра b . Так, например, в [21] предлагается использовать значение 0.44, которое предпочтительнее против альтернативы, соответствующей распределению Вейбулла. Автор критерия [20] предлагает использовать значения 0.5 или 0.9. Однако наше исследование указывает на эффективность применения других значений параметра b .

Для выбора оптимального значения параметра было проведено исследование мощности критерия при размере входных выборок $n = 50$. Оценки мощности представлены в таблице 3.1. Максимальные значения мощности по столбцу выделены жирным шрифтом.

В дальнейших исследованиях мощность критерия рассматривалась лишь для статистики с двумя значениями параметров $b = 0.1$ и $b = 0.3$, так как именно при этих значениях достигалась максимальная мощность критерия относительно альтернатив H_1 и $H_2 - H_3$, соответственно.

В таблицах Г.40-Г.42 приведены полученные оценки мощности относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез для различных объемов выборок от $n = 10$ до $n = 300$.

Таблица 3.1. Мощности критерия Дешпанде при различных значениях b

$J(b)$	H_1			H_2			H_3		
	α			α			α		
	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01	0.1	0.05	0.01
$J(0.1)$	0.482	0.329	0.110	0.874	0.807	0.621	0.355	0.241	0.089
$J(0.2)$	0.371	0.243	0.080	0.891	0.829	0.663	0.398	0.275	0.106
$J(0.3)$	0.309	0.194	0.059	0.890	0.831	0.669	0.408	0.284	0.109
$J(0.4)$	0.265	0.164	0.048	0.888	0.830	0.659	0.402	0.280	0.106
$J(0.5)$	0.243	0.144	0.040	0.881	0.816	0.646	0.399	0.272	0.100
$J(0.6)$	0.224	0.132	0.035	0.865	0.798	0.624	0.387	0.264	0.096
$J(0.7)$	0.210	0.123	0.031	0.835	0.767	0.579	0.371	0.252	0.086
$J(0.8)$	0.193	0.114	0.027	0.788	0.709	0.481	0.341	0.231	0.075
$J(0.9)$	0.170	0.094	0.024	0.641	0.552	0.310	0.287	0.179	0.058

3.16 Критерий Эпштейна

Статистика критерия имеет следующий вид [27, 28]:

$$EPS_n = \frac{2n \left(\ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i \right) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(D_i) \right)}{1 + (n+1)/(6n)}, \quad (3.23)$$

$$\text{где } D_i = (n-i+1)(x_{(i)} - x_{(i-1)}), \quad x_{(0)} = 0.$$

В формуле $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ являются элементами вариационного ряда (упорядоченных выборок). Статистика критерия (3.23) представляет собой статистику Бартлетта-Морана (3.10) при замене x_i на D_i .

Критерий является двусторонним. На рисунке 3.12 можно видеть, что при объеме выборок $n = 50$ распределения статистики при конкурирующих гипотезах H_i отклоняются от распределения статистики при H_0 (экспоненциальная гипотеза) как влево, так и вправо.

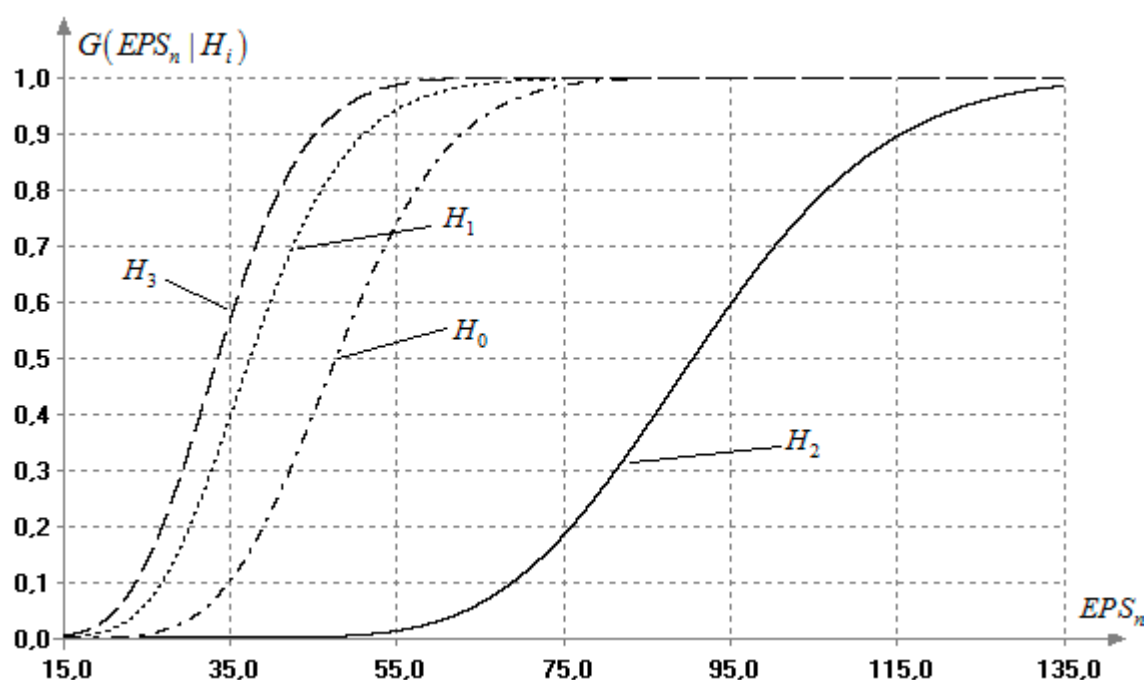


Рисунок 3.12 – Распределения статистики (3.23) при H_0 и конкурирующих гипотезах H_1, H_2, H_3 при $n = 50$

В [74] говорится о том, что распределение статистики $G(EPS_n | H_0)$ представляет собой χ^2 -распределение с $(n-1)$ степенями свободы. На рисунке 3.13 демонстрируется близость функции распределения статистики (3.23) к χ^2 -распределению при $n = 100$.

Критические значения статистики для двустороннего критерия, полученные в результате моделирования, представлены в таблице В.14.

В таблицах Г.43-Г.45 приведены полученные оценки мощности критерия относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез для различных объемов выборок от $n = 10$ до $n = 300$.

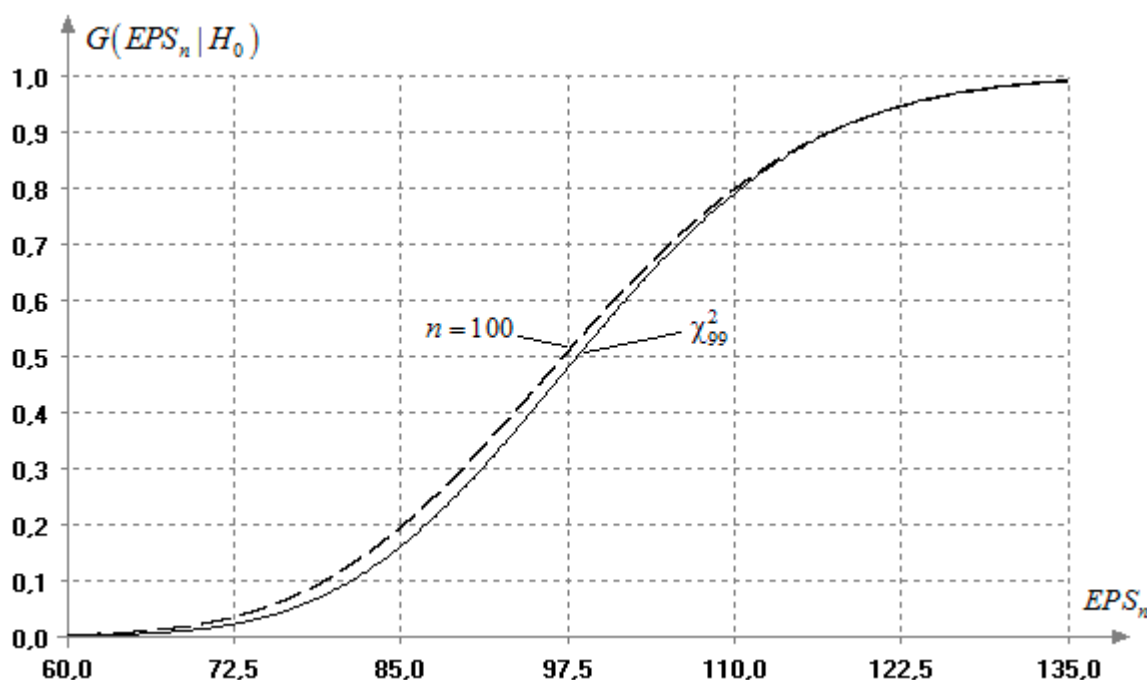


Рисунок 3.13 – Распределение статистики (3.22) при $n = 100$ и χ^2 -распределение

3.17 Критерий Морана

Статистика критерия имеет следующий вид [74]:

$$T_n^+ = \gamma + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{\bar{x}}; \quad (3.24)$$

где $\gamma = 0.577215$ константа Эйлера. Критерий является двусторонним.

Для критерия в [87] предложена нормализация статистики в виде:

$$T_n^{+,*} = \frac{T_n^+ - E[T_n^+]}{\sqrt{D[T_n^+]}}; \quad (3.25)$$

$$\text{где } E[T_n^+] = 0, D[T_n^+] = \frac{1}{n} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right)^2.$$

Сходимость распределения статистики (3.25) к стандартному нормальному закону довольно медленная. И только при очень больших объемах выборок распределение статистики хорошо описывается стандартным нормальным законом. На рисунке 3.14 показаны распределения статистики (3.25) при $n = 100$ и $n = 500$, а также стандартное нормальное распределение.

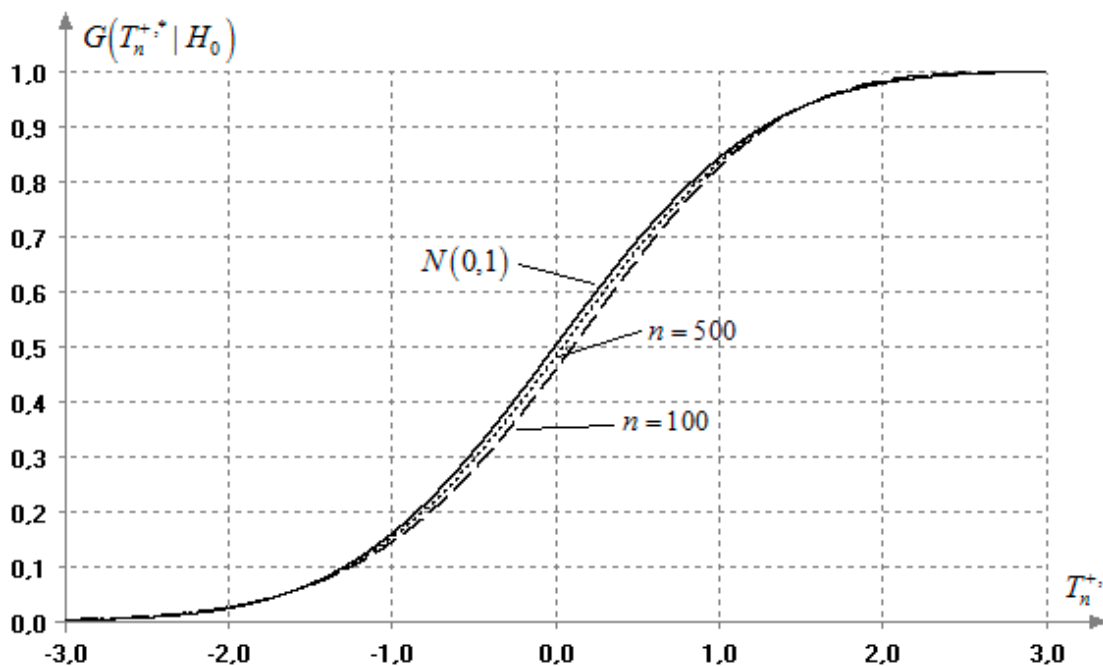


Рисунок 3.14 – Распределение статистики (3.25) при $n = 100, 500$ и стандартный нормальный закон

В работе [114] упоминается другая статистика критерия Морана:

$$T_n = \left| \gamma + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{\bar{x}} \right|. \quad (3.26)$$

Используя статистику (3.26) для подстановки в нормализацию (3.25), автор статьи [114] получил распределение статистики, подчиняющееся полунормальному закону, что подтверждает корректность статистики (3.25).

Критические значения статистики для двустороннего критерия, полученные при моделировании, представлены в таблице В.15. Как показали исследования, данный критерий эквивалентен по мощности критериям Лоулесса и Бартлетта-Морана.

3.18 Критерии Хегази-Грина

Статистики критерия имеет следующий вид [34, 74]:

$$T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| x_{(i)} + \ln \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) \right|; \quad (3.27)$$

$$T_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(x_{(i)} + \ln \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) \right)^2. \quad (3.28)$$

Критерий правосторонний, как и одноименные критерии равномерности (см. раздел 2.6.) и нормальности [133]. Критические значения статистик, полученные при моделировании, представлены в таблице В.16. В таблицах Г.46-Г.48 приведены полученные оценки мощности относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез для различных объемов выборок от $n = 10$ до $n = 300$.

Стоит обратить особое внимание на проблемы критерия, отраженные в таблице Г.48: при ограниченных объёмах выборок проявляется сильная смещенность относительно гипотезы H_3 . В работе [74] при исследовании мощности этого критерия также зафиксированы крайне низкие оценки мощности относительно несколько отличающихся конкурирующих гипотез с возрастающей интенсивностью отказов до объема выборок равного 28. Причём там рассматриваются конкурирующие законы более далекие от показательного распределения, но смещенность все еще присутствует.

На рисунках 3.15 и 3.16 представлены распределения, соответственно, статистик T_1 и T_2 при справедливости проверяемой H_0 и при справедливости конкурирующей гипотезы H_3 , соответствующей закону с возрастающей интенсивностью отказов. Как можно видеть, смещённость относительно H_3 характерна для критерия с обеими статистиками, особенно, для критерия со

статистикой T_2 . С ростом объема выборок данная проблема исчезает. Но для того, чтобы критерий мог отличать H_0 от конкурирующей гипотезы H_3 , необходим объем выборок $n > 200$ в случае T_1 и $n > 200$ в случае T_2 .

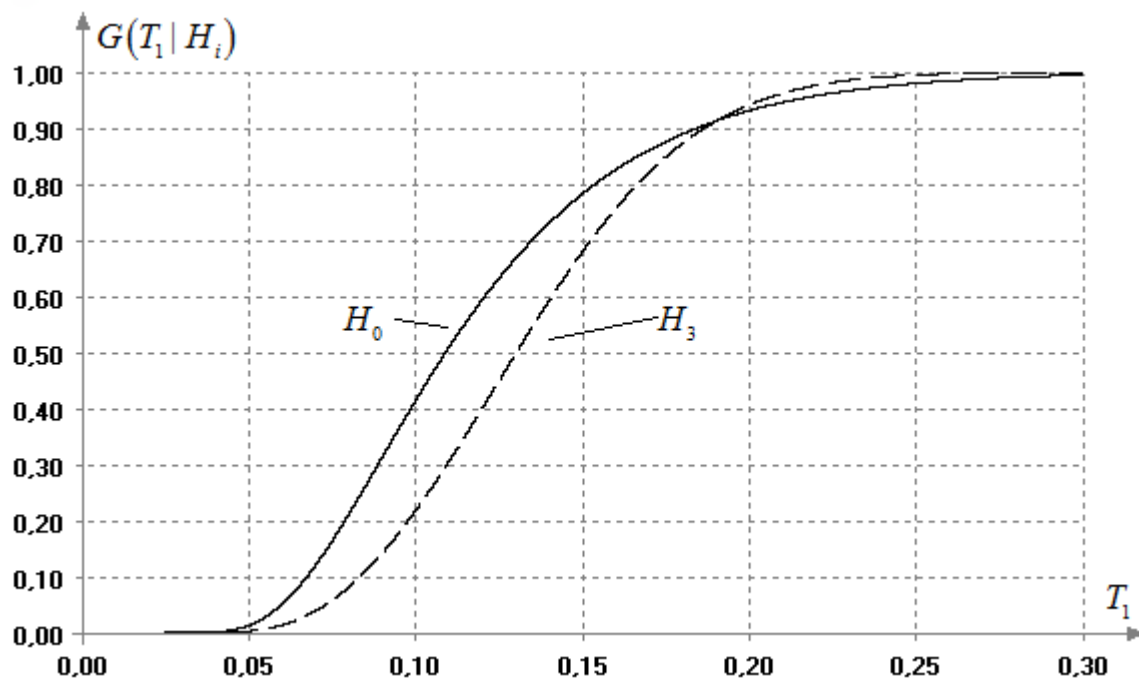


Рисунок 3.15 – Распределения статистики (3.27) при H_0 и конкурирующей гипотезе H_3 при $n = 100$

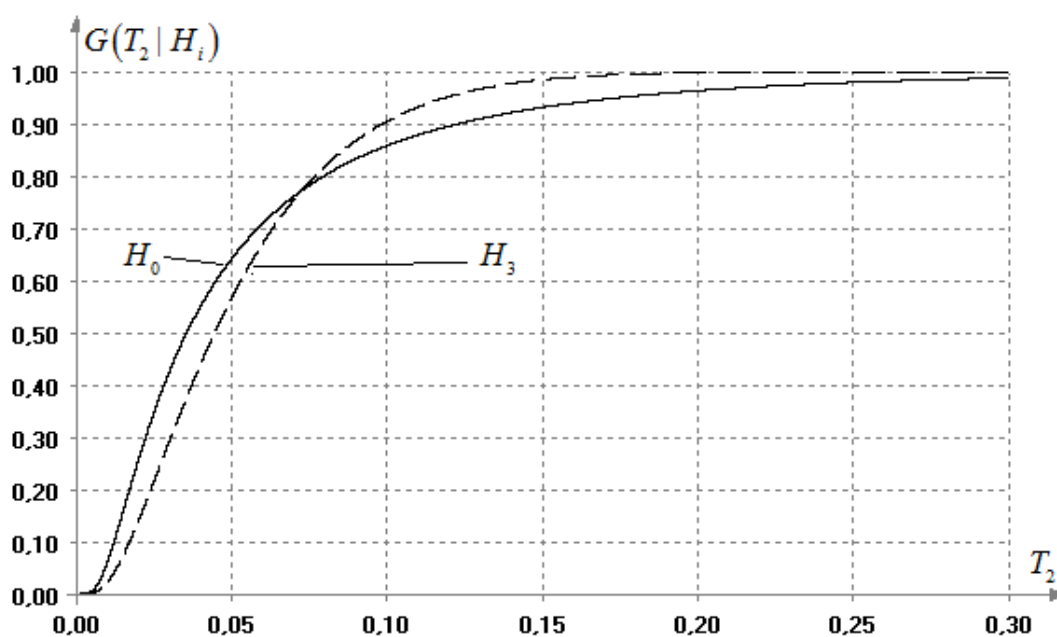


Рисунок 3.16 – Распределения статистики (3.28) при H_0 и H_3 при $n = 100$

Для того, чтобы отличать более далекие конкурирующие законы, достаточно меньшего объема выборок. На рисунке 3.17 демонстрируются распределения статистики T_2 критерия, более подверженной смещенности, при $n=100$ и справедливости конкурирующих гипотез H_4 и H_5 , соответствующих распределению Вейбулла с параметрами формы 1.5 и 2, соответственно.

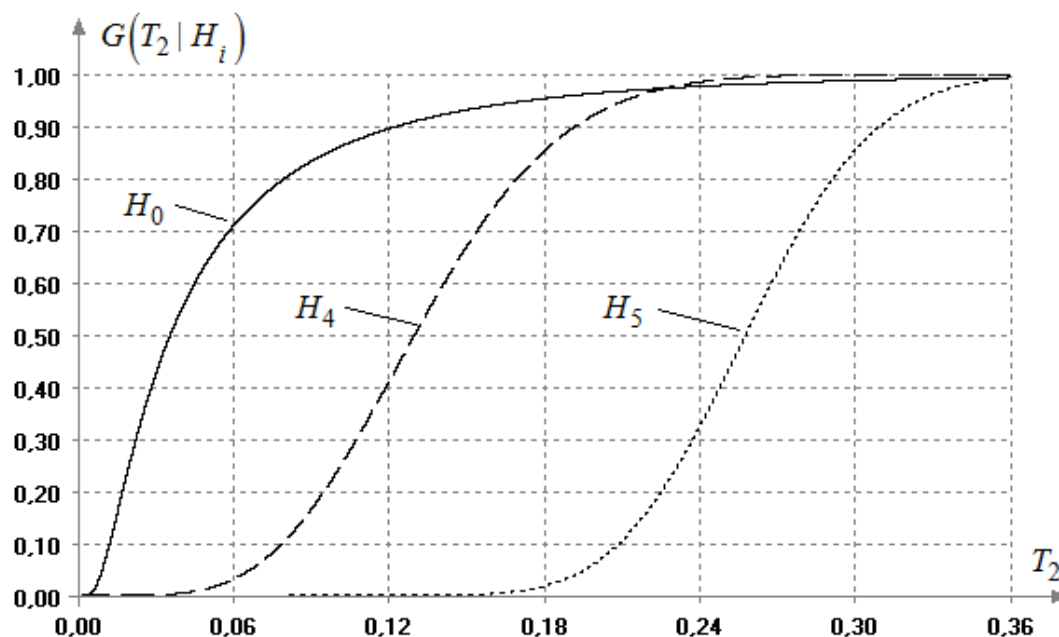


Рисунок 3.17 – Распределения статистики (3.28) при H_0 и конкурирующих гипотезах H_4 , H_5 при $n=100$

3.19 Сравнительный анализ критериев показательности

В таблицах 3.2 и 3.3 рассмотренные критерии проверки показательности упорядочены по убыванию мощности относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 , H_3 (по величине мощности $1-\beta$, проявленной критериями при $n=50$ и $n=100$, и заданном уровне значимости $\alpha=0.05$). Серым цветом отмечены ситуации, при которых проявляется смещенность.

Среди специальных критериев относительно гипотезы H_1 наилучшие результаты показывают критерии Хегази-Грина и критерий Кимбера–Мичела, значительно опережая другие критерии по мощности, особенно критерий Хегази-

Грина. Однако критерии Хегази-Грина демонстрируют сильную смещенность относительно гипотезы H_3 .

Таблица 3.2 – Упорядоченность специальных критериев показательности по мощности ($n = 50$ и $\alpha = 0.05$) относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 , H_3

№ п/п	Относительно H_1	$1-\beta$	Относительно H_2	$1-\beta$	Относительно H_3	$1-\beta$
1	Хегази-Грина 1	0.925	Бартлетта-Морана	0.890	Бартлетта-Морана	0.315
2	Хегази-Грина 2	0.882	Лоулесса	0.890	Лоулесса	0.315
3	Кимбера-Мичела	0.516	Морана	0.890	Морана	0.315
4	Корреляционный критерий 2	0.377	Эпштейн	0.863	Эпса-Палли	0.304
5	Климко-Антла-Радемакера-Рокетта	0.359	Эпса-Палли	0.831	Фросини	0.291
6	Шапиро-Уилка 1	0.359	Дешпанде (0.3)	0.831	Эпштейна	0.288
7	Корреляционный критерий 1	0.344	Холландера-Прошана	0.818	Дешпанде (0.3)	0.284
8	Дешпанде (0.1)	0.329	Дешпанде (0.1)	0.807	Холландера-Прошана	0.280
9	Фросини	0.310	Пиэтра	0.804	Кимбера-Мичела	0.279
10	Шапиро-Уилка 2	0.290	Фросини	0.804	Пиэтра	0.277
11	Гринвуда	0.290	Кочара	0.772	Кочара	0.268
12	Макс интервал	0.254	Хегази-Грина 2	0.772	Гринвуда	0.267
13	Кочара	0.218	Хегази-Грина 1	0.761	Шапиро-Уилка 2	0.266
14	Дешпанде (0.3)	0.194	Кимбера-Мичела	0.706	Дешпанде (0.1)	0.241
15	Эпса-Палли	0.171	Шапиро-Уилка 2	0.657	Климко-Антла-Радемакера-Рокетта	0.223
16	Эпштейна	0.166	Гринвуда	0.657	Шапиро-Уилка 1	0.223
17	Бартлетта-Морана	0.143	Климко-Антла-Радемакера-Рокетта	0.621	Макс интервал	0.125
18	Лоулесса	0.143	Шапиро-Уилка 1	0.621	Корреляционный критерий 1	0.053
19	Морана	0.143	Макс интервал	0.347	Фишера	0.023
20	Пиэтра	0.140	Корреляционный критерий 2	0.311	Корреляционный критерий 2	0.016
21	Холландера-Прошана	0.109	Корреляционный критерий 1	0.276	Хегази-Грина 1	0.009
22	Фишера	0.037	Фишера	0.140	Хегази-Грина 2	0.001

Критерий Кимбера-Мичела показал неплохие результаты также относительно других конкурирующих гипотез. Критерии Дешпанде и критерий

Фросини хоть и уступают предшествующим, все-таки показывают неплохие мощности относительно этой гипотезы, особенно, при $n = 100$. К этому можно добавить, что критерий Фросини и критерии Дешпанде обладают более высокой мощностью относительно двух других гипотез.

Таблица 3.3 – Упорядоченность критериев показательности по мощности ($n = 100$ и $\alpha = 0.05$) относительно конкурирующих гипотез H_1, H_2, H_3

№ п/п	Относительно H_1	$1-\beta$	Относительно H_2	$1-\beta$	Относительно H_3	$1-\beta$
1	Хегази-Грина 1	0.996	Бартлетта-Морана	0.993	Бартлетта-Морана	0.582
2	Хегази-Грина 2	0.985	Лоулесса	0.993	Лоулесса	0.582
3	Кимбера-Мичела	0.879	Морана	0.993	Морана	0.582
4	Дешпанде (0.1)	0.669	Эпштейна	0.990	Эпса-Палли	0.570
5	Фросини	0.585	Дешпанде (0.3)	0.983	Эпштейна	0.552
6	Корреляционный критерий 2	0.548	Эпса-Палли	0.982	Фросини	0.533
7	Шапиро-Уилка 1	0.541	Холландера-Прошана	0.980	Холландера-Прошана	0.530
8	Климко-Антла-Радемакера-Рокетта	0.541	Фросини	0.977	Дешпанде (0.3)	0.527
9	Корреляционный критерий 1	0.525	Дешпанде (0.1)	0.976	Пиэтра	0.520
10	Шапиро-Уилка 2	0.440	Пиэтра	0.974	Кочар	0.510
11	Гринвуда	0.440	Кочара	0.963	Шапиро-Уилка 2	0.489
12	Дешпанде (0.3)	0.386	Хегази-Грина 1	0.948	Гринвуда	0.489
13	Макс интервал	0.366	Кимбера-Мичела	0.947	Кимбера-Мичела	0.472
14	Кочара	0.320	Хегази-Грина 2	0.938	Дешпанде (0.1)	0.449
15	Эпштейна	0.258	Шапиро-Уилка 2	0.906	Шапиро-Уилка 1	0.438
16	Бартлетта-Морана	0.218	Гринвуда	0.906	Климко-Антла-Радемакера-Рокетта	0.438
17	Лоулесса	0.218	Шапиро-Уилка 1	0.893	Макс интервал	0.185
18	Морана	0.218	Климко-Антла-Радемакера-Рокетта	0.893	Корреляционный критерий 1	0.060
19	Эпса-Палли	0.214	Макс интервал	0.462	Хегази-Грина 1	0.033
20	Холландера-Прошана	0.202	Корреляционный критерий 2	0.442	Фишера	0.023
21	Пиэтра	0.167	Корреляционный критерий 1	0.422	Корреляционный критерий 2	0.019
22	Фишера	0.037	Фишера	0.139	Хегази-Грина 2	0.006

Относительно гипотез H_2 и H_3 наибольшую мощность показывает критерий Батлетта–Морана, Лоулесса и Морана, которые одинаковы по мощности. Множество критериев в этих ситуациях показывают неплохие результаты. В то же время некоторые критерии значительно отстают от “лидеров”. Причем относительно гипотезы H_3 ряд критериев проявляет ярко выраженную смещенность.

Среди рассмотренных специальных критериев предпочтительней использовать критерий Фросини, поскольку он показывает довольно большие мощности относительно всех трёх конкурирующих гипотез. К преимуществам этого критерия стоит отнести еще и тот факт, что статистика этого критерия довольно быстро сходится к предельному распределению.

Вполне обоснованным может быть выбор критерия Кимбера–Мичела. Несмотря на то, что он уступает нескольким из рассмотренных критериев при конкурирующих гипотезах H_2 и H_3 , мощность его в этих случаях довольно высока. С учетом того, что при конкурирующей гипотезе H_1 с немонотонной интенсивностью отказов закона распределения он показал высокую мощность, этот критерий можно рекомендовать к применению для проверки показательности.

Критерий Дешпанде можно использовать наравне с предыдущими критериями. Он обладает высокой мощностью относительно всех трёх конкурирующих гипотез, а асимптотическим распределением его нормализованной статистики при справедливости H_0 является стандартный нормальный закон. Недостатком критерия является необходимость выбора значения параметра b в зависимости от ситуации.

Не рекомендуется использовать корреляционные критерии и критерий Фишера из-за смещенности в некоторых ситуациях.

Применение критериев Пиэтра и Бартлетта–Морана весьма «рискованно», поскольку мощности относительно гипотезы H_1 весьма невелики. И если

применять эти критерии как правосторонние (как предложено авторами), у этих критериев тоже наблюдается смещенность. Однако у критериев есть преимущество: распределение статистики критерия Бартлетта–Морана хорошо аппроксимируется χ^2 -распределением, а статистики критерия Пиэтра – стандартным нормальным законом.

Также стоит воздерживаться от применения критерия Хегази-Грина, несмотря на его высокую мощность относительно гипотезы H_1 (с немонотонной интенсивностью отказов закона распределения), в связи со смещенностью критерия относительно конкурирующих гипотез с возрастающей интенсивностью отказов.

Выводы по главе

Исследованы свойства множества критериев, ориентированных на проверку принадлежности выборок экспоненциальному закону. Построены расширенные таблицы критических значений. В случае существования предельных распределений статистик критериев, исследована сходимость к ним эмпирических распределений статистик, оценены объёмы выборок, начиная с которых можно пренебречь отклонением реальных распределений статистик от предельных.

Для критерия Дешпанде исследовано влияние дополнительного параметра b на эффективность данного критерия при проверке показательности.

Для рассмотренных критериев показательности построены таблицы с оценками мощности относительно трёх конкурирующих гипотез, рассмотренных в п.1.4.2, для объемов выборок $n = 10, 20, 30, 40, 50, 100, 150, 200$ и 300 .

Проведен сравнительный анализ мощности критериев показательности относительно трёх рассмотренных конкурирующих гипотез.

Сделаны некоторые рекомендации по применению данной группы критериев, учитывающие достоинства критериев и обнаруженные недостатки. Отмечены критерии, существенные недостатки которых делают их применение в приложениях весьма рискованными.

4 КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ ПРИ ПРОВЕРКЕ РАВНОМЕРНОСТИ И ПОКАЗАТЕЛЬНОСТИ

Естественно, что при проверке гипотез о принадлежности выборок равномерному и показательному законам можно использовать совокупность непараметрических критериев согласия и критерии типа χ^2 . Отметим, что в условиях проверки рассматриваемых гипотез о равномерности и показательности критерии согласия также проявляют и свои достоинства, и свои недостатки. В частности, некоторые непараметрические критерии согласия обладают тем же серьёзным недостатком, что и многие специальные критерии равномерности: проявляют смещённость относительно той же конкурирующей гипотезы H_1 (см. п.1.3.2 и раздел 2). Подробные результаты исследований совокупности непараметрических критериев согласия в условиях проверки равномерности представлены в разработанном нами руководстве [132]. В тексте данной главы ограничиваемся лишь описанием результатов сравнительного анализа и полученными оценками мощности, позволяющими сопоставить критерии согласия со специальными критериями равномерности и показательности.

4.1 Непараметрические критерии согласия

4.1.1 Критерий Колмогорова

При проверке гипотез о принадлежности выборки равномерному или показательному закону в критерии Колмогорова [42] целесообразно использовать статистику с поправкой Большева [107, 108] в форме [106]

$$S_K = \sqrt{n}D_n + \frac{1}{6\sqrt{n}} = \frac{6nD_n + 1}{6\sqrt{n}} \quad (4.1)$$

где $D_n = \max(D_n^+, D_n^-)$, $D_n^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{i}{n} - F(x_i) \right\}$, $D_n^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ F(x_i) - \frac{i-1}{n} \right\}$.

Заметим что, при проверке равномерности на интервале $[0,1]$ значения $F(x_i)$ эквивалентны U_i – элементам вариационного ряда $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$, построенного по исходной выборке x_1, x_2, \dots, x_n .

Пределным распределением статистики (4.1) является распределение Колмогорова с функцией распределения

$$K(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 s^2}. \quad (4.2)$$

Все непараметрические критерии согласия являются правосторонними. Проверяемую гипотезу H_0 отклоняют при больших значениях статистики.

Зависимостью распределения статистики (4.1) от объема выборки можно практически пренебречь при $n > 25$ и вычислять достигнутый уровень значимости (p-value) $P(S_K > S_K^* | H_0) = 1 - K(S_K^*)$ в соответствии с распределением Колмогорова, где S_K^* – значение статистики критерия, вычисленное по анализируемой выборке. Менее предпочтительно принимать решение, сравнивая значение S_K^* с критическим при заданном α . Тогда можно воспользоваться процентными точками распределения Колмогорова, представленными в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Процентные точки распределения Колмогорова

Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$K(S)$	1.1379	1.2238	1.3581	1.4802	1.6276

Среди непараметрических критериев согласия критерий Колмогорова относится к наименее мощным критериям.

С вопросами применения критерия Колмогорова при проверке различных сложных гипотез можно ознакомиться в [127, 131, 133].

4.1.2 Критерий Купера

В критерии Купера [43] в качестве расстояния между эмпирическим и теоретическим законом рассматривается величина, вычисляемая в соответствии с выражением

$$V_n = D_n^+ + D_n^-,$$

где D_n^+ , D_n^- определены выше в пункте 4.1.1.

При проверке простой проверяемой гипотезы H_0 предельным распределением $G(\sqrt{n}V_n|H_0)$ статистики $\sqrt{n}V_n$ является распределение [43, 82]:

$$Kuiper(s) = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} 2(4m^2s^2 - 1)e^{-2m^2s^2}. \quad (4.3)$$

Для снижения зависимости распределения статистики от n в [83] предложена модификация статистики

$$V = V_n \left(\sqrt{n} + 0.155 + \frac{0.24}{\sqrt{n}} \right). \quad (4.4)$$

Зависимостью распределения статистики (4.4) от объема выборки можно пренебречь при $n \geq 20$.

В [52, 124] предложено применять в критерии Купера статистику в следующей модификации

$$V_n^{mod} = \sqrt{n}V_n + \frac{1}{3\sqrt{n}}, \quad (4.5)$$

где идея использования поправки вытекает из выражения для статистики критерия согласия Смирнова [106, стр. 81]. Зависимостью распределения статистики (4.5) от объема выборки можно практически пренебречь при $n \geq 30$ и вычислять достигнутый уровень значимости $P(S > S^* | H_0) = 1 - Kuiper(S^*)$ по распределению (4.3), где S^* – значение статистики критерия, вычисленное по анализируемой выборке в соответствии с (4.4) или (4.5). Менее обосновано принимать решение о результатах проверки гипотезы, сравнивая значение S^* с

критическим при заданном α . В последнем случае можно воспользоваться процентными точками распределения (4.3), приведенными в таблице 4.2.

Таблица 4.2 – Процентные точки распределения статистики (4.3) критерия Купера

Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
<i>Kuiper(S)</i>	1.53692	1.61960	1.74726	1.86243	2.00092

С вопросами применения критерия Купера при проверке различных сложных гипотез можно ознакомиться в [52, 54, 129-131, 133].

4.1.3 Критерий Крамера-Мизеса-Смирнова

Статистика критерия ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова при проверке равномерности имеет вид

$$S_{\omega} = n\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left\{ F(x_i) - \frac{2i-1}{2n} \right\}^2. \quad (4.6)$$

При справедливости H_0 статистика (4.6) в пределе подчиняется закону с функцией распределения $a1(s)$, имеющей вид [106]

$$a1(s) = \frac{1}{\sqrt{2s}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+1/2)\sqrt{4j+1}}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)} \exp\left\{-\frac{(4j+1)^2}{16s}\right\} \times \left\{ I_{-\frac{1}{4}}\left[\frac{(4j+1)^2}{16s}\right] - I_{\frac{1}{4}}\left[\frac{(4j+1)^2}{16s}\right] \right\}, \quad (4.7)$$

где $I_{-\frac{1}{4}}(\cdot), I_{\frac{1}{4}}(\cdot)$ – модифицированные функции Бесселя вида

$$I_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1)}, |z| < \infty, |\arg z| < \pi.$$

Зависимостью распределения статистики (4.6) от объема выборки можно пренебречь при $n \geq 25$, так как отклонение реального распределения статистики

от предельного (4.7) незначительно и практически не влияет на результаты статистического вывода.

Проверяемая гипотеза о равномерности закона не отвергается, если достигнутый уровень значимости $P\{S_{\omega} > S_{\omega}^*\} = 1 - a1(S_{\omega}^*)$ не превышает заданного α , где S_{ω}^* – вычисленное по выборке значение статистики (4.6). Принять решение о результатах проверки можно, сравнив S_{ω}^* с соответствующим критическим значением из таблицы 4.3. Но в этом случае обоснованность вывода менее информативна.

С вопросами применения критерия Крамера–Мизеса–Смирнова при проверке различных сложных гипотез можно ознакомиться в [127, 131, 133].

Таблица 4.3 – Процентные точки распределения (4.7) $a1(S)$

Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$a1(S)$	0.2841	0.3473	0.4614	0.5806	0.7434

4.1.4 Критерий Ватсона

Статистика критерия Ватсона [90, 91] при проверке равномерности принимает вид

$$U_n^2 = \sum_{i=1}^n \left(F(x_i) - \frac{i - \frac{1}{2}}{n} \right)^2 - n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(x_i) - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{12n}, \quad (4.8)$$

При справедливости H_0 статистика (4.8) в пределе подчиняется закону с функцией распределения [90, 91] вида

$$Watson(s) = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} e^{-2m^2\pi^2 s}. \quad (4.9)$$

Следует подчеркнуть, что зависимость распределения статистики (4.8) от объема выборки выражена слабо. Однако в [7] предлагается модифицированная статистика

$$U_n^{2*} = (U_n^2 - 0.1/n + 0.1/n^2)(1 + 0.8/n), \quad (4.10)$$

зависимость, которой от n выражена ещё меньше. При объемах выборок $n \geq 20$ отличием распределения статистики (4.10) от предельного распределения можно пренебречь. То же самое можно сказать относительно распределения статистики (4.8), так как зависимость распределения статистики (4.8) от объема выборки выражена слабо.

Достигнутый уровень значимости $P(S > S^* | H_0) = 1 - \text{Watson}(S^*)$ можно вычислять по распределению (4.9), где S^* – значение статистики критерия, вычисленное по анализируемой выборке в соответствии с (4.8) или (4.10). Принимать решение о результатах проверки гипотезы можно также, сравнивая значение S^* с критическим при заданном α . В этом случае можно воспользоваться процентными точками распределения (4.9), приведенными в таблице 4.4.

С вопросами применения критерия Ватсона при проверке различных сложных гипотез можно ознакомиться в [52, 54, 129-131, 133].

Таблица 4.4 – Процентные точки распределения (4.9) статистики критерия

Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
<i>Watson(S)</i>	0.131203	0.151759	0.186880	0.221996	0.268426

4.1.5 Критерий Андерсона-Дарлингга

Статистика критерия согласия Ω^2 Андерсона–Дарлингга [1, 2] при проверке равномерности принимает вид

$$S_{\Omega} = -n - 2 \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{2i-1}{2n} \ln F(x_i) + \left(1 - \frac{2i-1}{2n} \right) \ln(1 - F(x_i)) \right\}. \quad (4.11)$$

При справедливости простой проверяемой гипотезы H_0 статистика (4.11) в пределе подчиняется закону с функцией распределения $a_2(s)$, имеющей вид [106]

$$a_2(s) = \frac{\sqrt{2\pi}}{s} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\Gamma(j+1/2)(4j+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(j+1)} \exp\left\{-\frac{(4j+1)^2 \pi^2}{8s}\right\} \times \\ \times \int_0^{\infty} \exp\left\{\frac{s}{8(y^2+1)} - \frac{(4j+1)^2 \pi^2 y^2}{8s}\right\} dy. \quad (4.12)$$

Зависимостью распределения статистики (4.11) от объема выборки можно пренебречь при $n \geq 25$. При таких объемах выборок отклонение реального распределения статистики от предельного (4.12) незначительно и не влияет на результаты статистического вывода.

Проверяемая гипотеза H_0 о равномерности закона не отвергается, если достигнутый уровень значимости $P\{S_{\Omega} > S_{\Omega}^*\} = 1 - a_2(S_{\Omega}^*)$ не превышает заданной вероятности ошибки 1-го рода α , где S_{Ω}^* – вычисленное по выборке значение статистики (4.11). Менее обосновано судить о результатах проверки можно, сравнивая S_{Ω}^* с критическими значениями из таблицы 4.5.

Таблица 4.5 – Процентные точки распределения (4.12) $a_2(S)$

Функция распределения	Верхние процентные точки				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
$a_2(S)$	1.6212	1.9330	2.4924	3.0775	3.8781

В общем случае непараметрический критерий Андерсона–Дарлинга представляет собой один из наиболее мощных критериев согласия [46, 48, 49, 122, 124-127, 131].

4.1.6 Критерии Жанга

В [96] и в последующих работах [97-99] были предложены непараметрические критерии согласия, статистики которых принимают вид:

$$Z_A = - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\ln F(x_i)}{n-i+\frac{1}{2}} + \frac{\ln\{1-F(x_i)\}}{i-\frac{1}{2}} \right], \quad (4.13)$$

$$Z_C = \sum_{i=1}^n \left[\ln \left\{ \frac{F^{-1}(x_i) - 1}{\left(n - \frac{1}{2}\right) / \left(i - \frac{3}{4}\right) - 1} \right\} \right]^2, \quad (4.14)$$

$$Z_K = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\left(i - \frac{1}{2}\right) \ln \left\{ \frac{i - \frac{1}{2}}{nF(x_i)} \right\} + \left(n - i + \frac{1}{2}\right) \ln \left[\frac{n - i + \frac{1}{2}}{n(1 - F(x_i))} \right] \right). \quad (4.15)$$

Критерии Жанга являются развитием соответственно критериев Андерсона–Дарлинга, Крамера–Мизеса–Смирнова и Колмогорова.

Справедливость утверждений автора о более высокой мощности предлагаемых критериев по сравнению с критериями Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга в общем случае была подтверждена проведенными исследованиями [52, 54, 117, 128, 130, 131].

Применение критериев со статистиками (4.13) – (4.15) осложняет сильная зависимость распределений статистик от объема выборки n .

Процентные точки статистик (4.13) – (4.15) при справедливости простой проверяемой гипотезы H_0 о принадлежности анализируемой выборки полностью известному закону можно найти в [96].

В целом критерии Жанга при проверке равномерности обладают хорошей мощностью относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез.

Недостатком критериев следует считать необходимость при проверке гипотез опираться на таблицы процентных точек.

4.1.7 Упорядоченность непараметрических критериев согласия по мощности при проверке равномерности

В данном случае имеются в виду рассматриваемые конкурирующие гипотезы $H_1 \div H_3$ (см. п.1.3.2).

Используемые при проверке равномерности непараметрические критерии согласия относительно конкурирующей гипотезы H_1 можно расположить по убыванию мощности следующим образом:

Z_A Жанга \succ Z_C Жанга \succ *Ватсона* \succ *Купера* \succ Z_K Жанга \succ *Андерсона-Дарлинга* \succ *Крамера-Мизеса-Смирнова* \succ *Колмогорова*.

При этом следует подчеркнуть, что для критериев Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга впервые отмечен факт “смещённости” этих критериев [132] при малых объёмах выборок n и малых значениях уровня значимости α . Наличие смещённости отмечено также у критериев Жанга со статистиками Z_K и Z_C , и в меньшей степени – у критерия со статистикой Z_A .

Исследования мощности критериев согласия Жанга относительно различных пар конкурирующих гипотез в работах [52-54, 117, 128, 130, 131] подтвердили, что критерии со статистиками Z_A и Z_C , как правило, имеют преимущество в мощности перед критериями Андерсона–Дарлинга и Крамера–Мизеса–Смирнова, развитием которых они являются. В то же время, при использовании критериев Жанга для проверки отклонения от нормального закона в [133] была отмечена заметная “смещённость” критериев со статистиками Z_A и Z_C , относительно некоторых конкурирующих гипотез.

Относительно конкурирующей гипотезы H_2 совокупность непараметрических критериев согласия по убыванию мощности располагается в другом порядке:

Андерсона–Дарлинга \succ Z_C Жанга \succ *Крамера–Мизеса–Смирнова* \succ Z_A Жанга \approx Z_K Жанга \succ *Колмогорова* \succ *Купера* \succ *Ватсона*.

Примерно в том же порядке критерии согласия по убыванию мощности располагаются относительно конкурирующей гипотезы H_3 :

Андерсона–Дарлинга \succ *Крамера–Мизеса–Смирнова* \succ Z_C Жанга \succ Z_A Жанга \succ *Колмогорова* \succ Z_K Жанга \succ *Купера* \succ *Ватсона*.

В общем случае непараметрический критерий Андерсона–Дарлинга представляет собой один из наиболее мощных критериев согласия [52-54, 48, 49, 118, 121-123, 126, 127], который оказывается наиболее мощным относительно гипотез H_2 и H_3 .

Подробнее о проблеме смещенности критериев согласия при проверке равномерности можно найти в [132].

4.1.8 Упорядоченность непараметрических критериев согласия по мощности при проверке показательности

При проверке показательности рассматриваемые конкурирующие гипотезы $H_1 - H_3$ приведены в п. 1.4.2. В данном случае непараметрические критерии согласия были проранжированы при объемах выборок $n=100$ в соответствии с представленной далее общей таблицей мощностей 4.10. Для ситуации, представленной в таблице 4.9, порядок критериев слегка отличается.

Относительно конкурирующей гипотезы H_1 совокупность непараметрических критериев согласия по убыванию мощности располагается следующим образом:

$$Z_A \text{ Жанга} \succ Z_C \text{ Жанга} \succ Z_K \text{ Жанга} \succ \text{Андерсона–Дарлинга} \succ \text{Ватсона} \succ \\ \text{Купера} \succ \text{Крамера–Мизеса–Смирнова} \succ \text{Колмогорова}.$$

Отметим, что критерии Жанга в данном случае существенно опережают другие непараметрические критерии в данной ситуации.

Несколько в ином порядке критерии согласия по убыванию мощности располагаются относительно конкурирующей гипотезы H_2 :

$$\text{Андерсона–Дарлинга} \succ \text{Крамера–Мизеса–Смирнова} \approx Z_C \text{ Жанга} \succ Z_A \text{ Жанга} \succ \\ Z_K \text{ Жанга} \succ \text{Колмогорова} \succ \text{Ватсона} \succ \text{Купера}.$$

Лучшим критерием в данном случае является критерий Андерсона–Дарлинга. Среди критериев Жанга большую мощность демонстрирует критерий Z_C , превосходя критерий Z_A , который в совокупности является лучшим

критерием Жанга при проверке показательности.

Относительно конкурирующей гипотезы H_3 совокупность непараметрических критериев согласия по убыванию мощности располагается в таком порядке:

$$Z_A \text{ Жанга} \succ \text{Андерсона–Дарлинга} \succ \text{Крамера–Мизеса–Смирнова} \succ Z_C \text{ Жанга} \succ \\ \text{Колмогорова} \succ \text{Ватсона} \succ Z_K \text{ Жанга} \succ \text{Купера}.$$

Относительно конкурирующих гипотез H_2 и H_3 наиболее предпочтительными являются критерии Андерсона-Дарлинга и Крамера-Мизеса-Смирнова. Также довольно мощным является критерий Z_A Жанга, который относительно гипотезы H_3 показал себя наиболее мощным критерием согласия. С другой стороны, критерий Z_K Жанга относительно последней конкурирующей гипотезы уступает практически всем непараметрическим критериям согласия.

4.2 Критерий хи-квадрат Пирсона

Процедура проверки гипотез с использованием критериев типа χ^2 предусматривает группирование исходной выборки x_1, x_2, \dots, x_n объемом n . Область определения случайной величины разбивают на k непересекающихся интервалов граничными точками

$$x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k,$$

где x_0 – нижняя грань области определения случайной величины; x_k – верхняя грань. В соответствии с заданным разбиением подсчитывают количество наблюдений n_i , попавших в i -й интервал, и вероятности попадания в интервал

$$P_i(\theta) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, \theta) dx,$$

соответствующие теоретическому закону с функцией

плотности $f(x, \theta)$. При этом $n = \sum_{i=1}^k n_i$, $\sum_{i=1}^k P_i(\theta) = 1$. В основе статистик, используемых в критериях согласия типа χ^2 лежит измерение отклонений n_i / n от $P_i(\theta)$.

Статистику критерия согласия χ^2 Пирсона вычисляют по формуле:

$$X_n^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(n_i / n - P_i(\theta))^2}{P_i(\theta)}. \quad (4.16)$$

При справедливости простой проверяемой гипотезы H_0 (когда известны все параметры теоретического закона) при $n \rightarrow \infty$ эта статистика подчиняется χ_r^2 -распределению с $r = k - 1$ степенями свободы. Плотность χ_r^2 -распределения описывается соотношением:

$$g(s) = \frac{1}{2^{r/2} \Gamma(r/2)} s^{r/2-1} e^{-s/2}.$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Проверяемая гипотеза H_0 не отклоняется, если достигнутый уровень значимости превышает заданный уровень α , то есть выполняется неравенство:

$$P\{X_n^2 > X_n^{2*}\} = \frac{1}{2^{r/2} \Gamma(r/2)} \int_{X_n^{2*}}^{\infty} s^{r/2-1} e^{-s/2} ds > \alpha, \quad (4.17)$$

где X_n^{2*} – вычисленное в соответствии с формулой (4.16) значение статистики.

4.2.1 Проверка равномерности по критерию хи-квадрат Пирсона

При проверке равномерности мы имеем дело с простой проверяемой гипотезой H_0 . В случае проверки принадлежности выборки равномерному закону на интервале $[0,1]$ $x_0 = 0$, $x_k = 1$, $P_i = x_i - x_{i-1}$, при проверке равномерности на интервале $[a,b]$ имеем $P_i = (x_i - x_{i-1}) / (b - a)$, $x_0 = a$, $x_k = b$.

Следует иметь в виду, что статистика (4.16) представляет собой дискретную случайную величину, и её действительное распределение $G(X_n^2 | H_0)$ при справедливости проверяемой гипотезы H_0 может существенно отличаться от асимптотического χ_r^2 -распределения. Например, на рисунке 4.1 демонстрируется

зависимость распределения статистики критерия (при справедливости H_0) от объёма выборок n при разбиении области определения на интервалы равной вероятности (при числе интервалов $k=4$). При проверке равномерности использование равновероятного группирования представляется вполне логичным.

Так как действительное распределение статистики является дискретным, то оценка достигнутого уровня значимости, вычисляемая в соответствии с соотношением (4.17) по предельному χ_r^2 -распределению, обладает определённой погрешностью. Справедливости ради следует отметить, что дискретность распределения статистики в большей степени проявляется, как правило, при равновероятном группировании.

С ростом числа интервалов дискретное распределение статистики быстрее сходится к соответствующему непрерывному χ_r^2 -распределению. Но это не означает, что при этом будет увеличиваться мощность критерия. Мощность критерия χ^2 зависит от рассматриваемой альтернативы (от законов, соответствующих проверяемой и конкурирующей гипотезам), а также от способа разбиения на интервалы и от числа интервалов [32, 111-113, 118-120, 127].

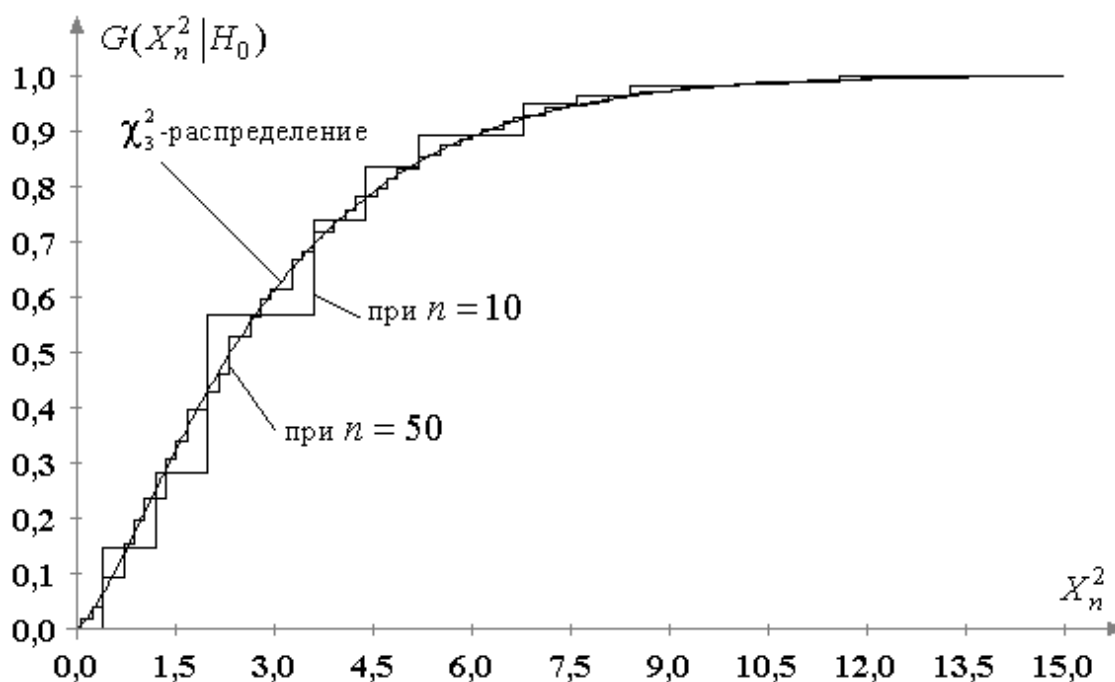


Рисунок 4.1 – Распределения статистики χ_n^2 в зависимости от b при $k=4$

Например, в таблице 4.6 представлены оценки мощности критерия при проверке равномерности относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 при разбиении области определения на различное число k равновероятных интервалов группирования. Результаты приведены для объёма выборок $n=100$ и заданной вероятности ошибки 1-го рода (уровня значимости) $\alpha=0.1$. Относительно H_1 мощность оказывается максимальной при $k=6$, относительно H_2 – при $k=4$, относительно H_3 – при $k=3$ (Рисунок 4.2).

Таблица 4.6 – Зависимость мощности критерия χ^2 от числа интервалов k

k	Относительно H_1	Относительно H_2	Относительно H_3
3	0.436	0.444	0.374
4	0.549	0.448	0.358
5	0.584	0.438	0.339
6	0.593	0.427	0.321
7	0.588	0.414	0.306
8	0.575	0.401	0.291
9	0.573	0.400	0.288

Сравнивая мощность критерия χ^2 с мощностью непараметрических критериев согласия при проверке равномерности, относительно конкурирующей гипотезы H_1 , критерий χ^2 Пирсона можно расположить в цепочке предпочтения после критерия Z_K Жанга:

$$Z_A \text{ Жанга} \succ Z_C \text{ Жанга} \succ \text{Ватсона} \succ \text{Купера} \succ Z_K \text{ Жанга} \succ \chi^2 \text{ Пирсона} \succ \text{Андерсона-Дарлинга} \succ \text{Крамера-Мизеса-Смирнова} \succ \text{Колмогорова}.$$

В цепочке предпочтения относительно конкурирующей гипотезы H_2 он оказывается впереди критериев Купера и Ватсона:

$$\text{Андерсона-Дарлинга} \succ Z_C \text{ Жанга} \succ \text{Крамера-Мизеса-Смирнова} \succ Z_A \text{ Жанга} \approx Z_K \text{ Жанга} \succ \text{Колмогорова} \succ \chi^2 \text{ Пирсона} \succ \text{Купера} \succ \text{Ватсона}.$$

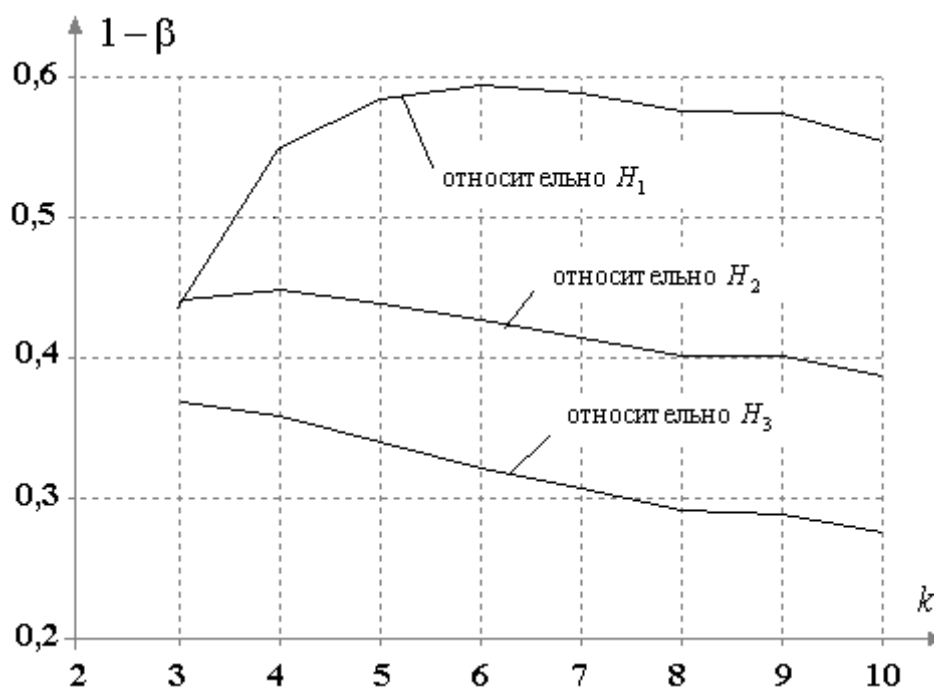


Рисунок 4.2 – Мощность критерия Пирсона относительно H_1 , H_2 и H_3 в зависимости от числа интервалов

Аналогично, в цепочке предпочтения относительно конкурирующей гипотезы H_3 критерий χ^2 Пирсона находится на той же позиции:

Андерсона–Дарлинга > Крамера–Мизеса–Смирнова > Z_C Жанга > Z_A Жанга > Колмогорова > Z_K Жанга > χ^2 Пирсона > Купера > Уатсона.

В общем перечне критериев, включающем все специальные критерии и непараметрические критерии согласия, критерий χ^2 Пирсона находится в середине (Таблица 4.8).

4.2.2 Проверка показательности по критерию хи-квадрат Пирсона

При проверке показательности мощность критерия хи-квадрата Пирсона оценивалась при равновероятном и при асимптотически оптимальном группировании (АОГ).

В таблице 4.7 представлены оценки мощности критерия при проверке показательности относительно рассматриваемых конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 при разбиении области определения на различное число k интервалов

группирования. Результаты приведены для объёма выборок $n=50$ и заданной вероятности ошибки 1-го рода (уровня значимости) $\alpha=0.1$. Для равновероятного группирования мощность относительно H_1 оказывается максимальной при $k=7$, относительно H_2 – при $k=5$, относительно H_3 – при $k=3$. В случае АОГ мощность относительно конкурирующих гипотез H_1 и H_2 увеличивается с ростом числа интервалов вплоть до $k=7$, но относительно гипотезы H_3 с увеличением количества интервалов группирования наблюдается падение мощности.

В этой связи для общего сравнительного анализа взята ситуация с равновероятным группированием при количестве интервалов $k=6$.

Сравнивая критерия χ^2 с непараметрическими критериями согласия при проверке показательности, в цепочке предпочтения по убыванию мощности относительно конкурирующей гипотезы H_1 критерий χ^2 Пирсона можно расположить сразу после критерия Купера:

$$Z_A \text{ Жанга} \succ Z_C \text{ Жанга} \succ Z_K \text{ Жанга} \succ \text{Андерсона–Дарлинг} \succ \text{Ватсона} \succ \\ \text{Купера} \succ \text{Крамера–Мизеса–Смирнова} \succ \chi^2 \text{ Пирсона} \succ \text{Колмогорова}.$$

Таблица 4.7 – Зависимость мощности критерия χ^2 Пирсона от числа интервалов k и метода группирования

Метод группирования	Равновероятное			АОГ		
	H_1	H_2	H_3	H_1	H_2	H_3
k						
3	0.182	0.494	0.156	0.134	0.275	0.152
4	0.221	0.504	0.155	0.136	0.371	0.131
5	0.247	0.513	0.153	0.157	0.446	0.124
6	0.261	0.510	0.152	0.169	0.487	0.116
7	0.262	0.508	0.148	0.211	0.532	0.097

В цепочке предпочтения относительно конкурирующей гипотезы H_2 он оказывается ниже всех непараметрических критериев согласия:

Андерсона–Дарлинга \succ *Крамера–Мизеса–Смирнова* $\approx Z_C$ *Жанга* $\succ Z_A$ *Жанга* $\succ Z_K$ *Жанга* \succ *Колмогорова* \succ *Ватсона* \succ *Купера* $\succ \chi^2$ *Пирсона*.

Аналогично, в цепочке предпочтения относительно конкурирующей гипотезы H_3 критерий χ^2 Пирсона находится на той же позиции:

Z_A *Жанга* \succ *Андерсона–Дарлинга* \succ *Крамера–Мизеса–Смирнова* $\succ Z_C$ *Жанга* \succ *Колмогорова* \succ *Ватсона* $\succ Z_K$ *Жанга* \succ *Купера* $\succ \chi^2$ *Пирсона*.

В общем перечне используемых при проверке показательности критериев, включающем все специальные критерии и непараметрические критерии согласия, критерий χ^2 Пирсона находится в начале списка в случае гипотезы H_1 и в конце списка в случае гипотез H_2 и H_3 (таблицы 4.9 и 4.10).

4.3 Сравнительный анализ множества всех критериев равномерности

Все рассмотренные критерии, включая критерии согласия и критерии, описанные в главе 2, упорядочены в таблице 4.8 по убыванию мощности относительно соответствующих конкурирующих гипотез (по величине мощности $1 - \beta$, проявленной при $n = 100$ и уровне значимости $\alpha = 0.1$).

Аналогично, как и в таблице 2.10, темным цветом выделены критерии, которые относительно H_1 при малых n обладают ярко выраженной смещённостью. Среди непараметрических критериев согласия в меньшей степени смещённость относительно H_1 проявляется у критерия Жанга со статистикой Z_A . Этот недостаток отсутствует только у непараметрических критериев согласия Ватсона и Купера и у критерия χ^2 Пирсона.

Критерии Ватсона и Купера, не показывающие признаков смещённости и имеющие преимущество в мощности относительно H_1 (по сравнению с

критериями Андерсона–Дарлинга и Крамера–Мизеса–Смирнова), теряют это преимущество в случае конкурирующих гипотез H_2 и H_3 .

Таблица 4.8 – Упорядоченность всех критериев равномерности по мощности, проявленной относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3

№ п/п	Относительно H_1	$1-\beta$	Относительно H_2	$1-\beta$	Относительно H_3	$1-\beta$
1	Модификация энтропийного критерия 2	0.883	Андерсона–Дарлинга	0.648	Андерсона–Дарлинга	0.526
2	Жанга Z_A	0.850	Хегази-Грина T_1	0.610	Хегази-Грина T_1	0.522
3	Неймана–Бартона N_2	0.837	Жанга Z_C	0.606	Фросини	0.522
4	Кресси 2	0.820	Фросини	0.603	Хегази-Грина T_1^*	0.520
5	Жанга Z_C	0.819	Хегази-Грина T_2	0.602	Модификация критерия Андерсона–Дарлинга	0.519
6	Дудевича–ван дер Мюлена	0.790	Неймана–Бартона N_2	0.597	Хегази-Грина T_2	0.508
7	Модификация энтропийного критерия 1	0.789	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.595	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.507
8	Корреа	0.782	Хегази-Грина T_1^*	0.595	Хегази-Грина T_2^*	0.506
9	Ватсона	0.779	Жанга Z_K	0.590	Жанга Z_C	0.463
10	Неймана–Бартона N_3	0.766	Модификация критерия Андерсона–Дарлинга	0.585	Жанга Z_A	0.459
11	Неймана–Бартона N_4	0.739	Хегази-Грина T_2^*	0.585	Колмогорова	0.450
12	Купера	0.736	Неймана–Бартона N_3	0.577	Неймана–Бартона N_2	0.447
13	Модификация критерия Андерсона–Дарлинга	0.730	Жанга Z_A	0.574	Жанга Z_K	0.438
14	Ченга–Спиринга	0.722	Неймана–Бартона N_4	0.557	Неймана–Бартона N_3	0.416
15	Жанга Z_K	0.617	Колмогорова	0.542	Неймана–Бартона N_4	0.381
16	χ^2 Пирсона	0.593	Пардо	0.463	χ^2 Пирсона	0.374
17	Шварца	0.583	χ^2 Пирсона	0.448	Пардо	0.291
18	Андерсона–Дарлинга	0.505	Купера	0.364	Модификация критерия Гринвуда ($m = 10$)	0.287
19	Хегази-Грина T_1^*	0.443	Ватсона	0.356	Дудевича–ван дер Мюлена	0.275
20	Хегази-Грина T_2^*	0.409	Модификация критерия Гринвуда ($m = 10$)	0.328	Модификация энтропийного критерия 1	0.275
21	Пардо	0.408	Модификация энтропийного критерия 1	0.328	Модификация энтропийного критерия 2	0.267

Продолжение таблицы 4.8

№ п/п	Относительно H_1	$1-\beta$	Относительно H_2	$1-\beta$	Относительно H_3	$1-\beta$
22	Фросини	0.384	Дудевича–ван дер Мюлена	0.327	Корреа	0.267
23	Крамера–Мизеса–Смирнова	0.358	Кресси 1	0.314	Ватсона	0.257
24	Хегази–Грина T_1	0.322	Корреа	0.313	Купера	0.254
25	Колмогорова	0.322	Модификация энтропийного критерия 2	0.266	Кресси 2	0.226
26	Хегази–Грина T_2	0.308	Гринвуда–Кэсенберри–Миллера	0.244	Кресси 1	0.218
27	Гринвуда–Кэсенберри–Миллера	0.290	Шварца	0.226	Шварца	0.206
28	Кимбелла	0.279	Кресси 2	0.217	Гринвуда–Кэсенберри–Миллера	0.186
29	Морана 1	0.279	Шермана	0.204	Кимбелла	0.165
30	Гринвуда	0.279	Кимбелла	0.201	Морана 1	0.165
31	Модификация критерия Гринвуда ($m = 10$)	0.230	Морана 1	0.201	Гринвуда	0.165
32	Шермана	0.215	Гринвуда	0.201	Шермана	0.154
33	Кресси 1	0.187	Морана 2	0.193	Морана 2	0.143
34	Морана 2	0.187	Ченга–Спиринга	0.168	Ченга–Спиринга	0.106
35	Янга	0.115	Янга	0.108	Янга	0.104

В общем случае предпочтение среди критериев согласия следует отдать критериям Андерсона–Дарлинга, Жанга со статистиками Z_C и Z_A и Крамера–Мизеса–Смирнова. Однако следует иметь в виду, что относительно некоторых конкурирующих гипотез можно столкнуться с ситуацией, когда при малых n и α критерии не будут способны отличать от равномерного некоторые конкурирующие законы.

Когда для проверки гипотезы о принадлежности анализируемой выборки некоторому конкретному закону распределения разработано множество специальных критериев, то среди этого множества, как правило, находятся критерии, применение которых при ограниченных объемах выборок связано с заметными преимуществами в мощности по сравнению с общими критериями согласия. В данном случае (при проверке равномерности) такого преимущества относительно непараметрических критериев согласия не наблюдается: очень

неплохо показывают себя критерии Жанга со статистиками Z_A и Z_C и критерий Андерсона–Дарлинга.

Можно так же отметить, что модификация критерия Андерсона–Дарлинга, предложенная в [73] для проверки равномерности, является весьма эффективной процедурой для проверки гипотезы равномерности относительно рассмотренных конкурирующих гипотез. В качестве недостатка критерия в сравнении с критерием согласия Андерсона–Дарлинга следует указать медленную сходимость распределения статистики к предельному закону. А в качестве преимущества – отсутствия смещённости относительно конкурирующей гипотезы H_1 .

4.4 Сравнительный анализ всего множества критериев показательности

В таблицах 4.9 и 4.10 представлены как специальные критерии, описанные в главе 3, так и критерии согласия, описанные в данной главе. Все рассмотренные критерия упорядочены по убыванию мощности относительно конкурирующих гипотез $H_1 - H_3$ при уровне значимости $\alpha = 0.05$ и объемах выборок $n = 50$ и $n = 100$ (таблицы 4.9 и 4.10, соответственно).

Среди критериев согласия наиболее предпочтительными для применения является критерии Андерсона–Дарлинга, Крамера–Мизеса–Смирнова и критерии Жанга. Они показывают стабильно хорошую мощность относительно всех трех конкурирующих гипотез.

Все три критерия согласия Жанга показали высокие мощности относительно гипотезы H_1 (с немонотонной интенсивностью отказов) и хорошие мощности относительно гипотезы H_2 (с убывающей интенсивностью отказов), но относительно гипотезы H_3 (с возрастающей интенсивностью отказов) результаты критериев Жанга сильно разнятся. Лучшим среди критериев Жанга является критерий со статистикой Z_A , значительно выделяющийся по мощности относительно гипотез H_1 и H_3 , но слегка уступающий критерию со статистикой Z_C в мощности относительно конкурирующей гипотезы H_2 .

Таблица 4.9 – Упорядоченность по мощности критериев показательности относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 ($n = 50$ и $\alpha = 0.05$)

№ п/п	Относительно H_1	$1-\beta$	Относительно H_2	$1-\beta$	Относительно H_3	$1-\beta$
1	Хегази-Грина 1	0.925	Бартлетта-Морана	0.890	Жанга Z_A	0.328
2	Хегази-Грина 2	0.882	Лоулесса	0.890	Бартлетта-Морана	0.315
3	Жанга Z_A	0.661	Морана	0.890	Лоулесса	0.315
4	Жанга Z_C	0.538	Андерсона-Дарлингга	0.871	Морана	0.315
5	Кимбера-Мичела	0.516	Эпштейн	0.863	Эпса-Палли	0.304
6	Жанга Z_K	0.412	Эпса-Палли	0.831	Фросини	0.291
7	Корреляционный критерий 2	0.377	Дешпанде (0.3)	0.831	Жанга Z_C	0.289
8	Ватсона	0.371	Холландера-Прошана	0.818	Эпштейна	0.288
9	Климко-Антла-Радемакера-Рокетта	0.359	Дешпанде (0.1)	0.807	Дешпанде (0.3)	0.284
10	Шапиро-Уилка 1	0.359	Жанга Z_C	0.807	Крамера-Мизеса-Смирнова	0.284
11	Корреляционный критерий 1	0.344	Жанга Z_K	0.806	Холландера-Прошана	0.280
12	Купера	0.339	Пиэтра	0.804	Кимбера-Мичела	0.279
13	Андерсона-Дарлингга	0.338	Фросини	0.804	Пиэтра	0.277
14	Дешпанде (0.1)	0.329	Крамера-Мизеса-Смирнова	0.801	Андерсона-Дарлингга	0.268
15	Фросини	0.310	Жанга Z_A	0.788	Кочара	0.268
16	Крамера-Мизеса-Смирнова	0.297	Кочара	0.772	Гринвуда	0.267
17	Шапиро-Уилка 2	0.290	Хегази-Грина 2	0.772	Шапиро-Уилка 2	0.266
18	Гринвуда	0.290	Хегази-Грина 1	0.761	Дешпанде (0.1)	0.241
19	χ^2 Пирсона	0.261	Колмогорова	0.735	Колмогорова	0.236
20	Макс интервал	0.254	Кимбера-Мичела	0.706	Ватсона	0.224
21	Колмогорова	0.250	Шапиро-Уилка 2	0.657	Климко-Антла-Радемакера-Рокетта	0.223
22	Кочара	0.218	Гринвуда	0.657	Шапиро-Уилка 1	0.223
23	Дешпанде (0.3)	0.194	Ватсона	0.649	Жанга Z_K	0.216
24	Эпса-Палли	0.171	Купера	0.621	Купера	0.203
25	Эпштейна	0.166	Климко-Антла-Радемакера-Рокетта	0.621	χ^2 Пирсона	0.152
26	Бартлетта-Морана	0.143	Шапиро-Уилка 1	0.621	Макс интервал	0.125
27	Лоулесса	0.143	χ^2 Пирсона	0.510	Корреляционный критерий 1	0.053
28	Морана	0.143	Макс интервал	0.347	Фишера	0.023
29	Пиэтра	0.140	Корреляционный критерий 2	0.311	Корреляционный критерий 2	0.016
30	Холландера-Прошана	0.109	Корреляционный критерий 1	0.276	Хегази-Грина 1	0.009
31	Фишера	0.037	Фишера	0.140	Хегази-Грина 2	0.001

Таблица 4.10 – Упорядоченность по мощности критериев показательности относительно конкурирующих гипотез H_1 , H_2 и H_3 ($n=100$ и $\alpha=0.05$)

№ п/п	Относительно H_1	$1-\beta$	Относительно H_2	$1-\beta$	Относительно H_3	$1-\beta$
1	Хегази-Грина 1	0.996	Бартлетта-Морана	0.993	Бартлетта-Морана	0.582
2	Хегази-Грина 2	0.985	Лоулесса	0.993	Лоулесса	0.582
3	Жанга Z_A	0.964	Морана	0.993	Морана	0.582
4	Жанга Z_C	0.920	Эпштейна	0.990	Эппса-Палли	0.570
5	Кимбера-Мичела	0.879	Андерсона-Дарлинга	0.990	Жанга Z_A	0.554
6	Жанга Z_K	0.822	Дешпанде (0.3)	0.983	Эпштейна	0.552
7	Андерсона-Дарлинга	0.702	Эппса-Палли	0.982	Фросини	0.533
8	Ватсона	0.701	Холландера-Прошана	0.980	Холландера-Прошана	0.530
9	Дешпанде (0.1)	0.669	Фросини	0.977	Дешпанде (0.3)	0.527
10	Купера	0.669	Крамера-Мизеса-Смирнова	0.977	Андерсона-Дарлинга	0.526
11	Фросини	0.585	Жанга Z_C	0.977	Крамера-Мизеса-Смирнова	0.522
12	Крамера-Мизеса-Смирнова	0.564	Дешпанде (0.1)	0.976	Пиэтра	0.520
13	Корреляционный критерий 2	0.548	Пиэтра	0.974	Жанга Z_C	0.516
14	Шапиро-Уилка 1	0.541	Жанга Z_A	0.974	Кочара	0.510
15	Климко-Антла-Радемакера-Рокетта	0.541	Жанга Z_K	0.973	Шапиро-Уилка 2	0.489
16	Корреляционный критерий 1	0.525	Кочара	0.963	Гринвуда	0.489
17	χ^2 Пирсона	0.501	Колмогорова	0.956	Кимбера-Мичела	0.472
18	Колмогорова	0.456	Хегази-Грина 1	0.948	Дешпанде (0.1)	0.449
19	Шапиро-Уилка 2	0.440	Кимбера-Мичела	0.947	Шапиро-Уилка 1	0.438
20	Гринвуда	0.440	Хегази-Грина 2	0.938	Климко-Антла-Радемакера-Рокетта	0.438
21	Дешпанде (0.3)	0.386	Ватсона	0.921	Колмогорова	0.434
22	Макс интервал	0.366	Купера	0.909	Ватсона	0.410
23	Кочара	0.320	Шапиро-Уилка 2	0.906	Жанга Z_K	0.401
24	Эпштейна	0.258	Гринвуда	0.906	Купера	0.373
25	Бартлетта-Морана	0.218	Шапиро-Уилка 1	0.893	χ^2 Пирсона	0.266
26	Лоулесса	0.218	Климко-Антла-Радемакера-Рокетта	0.893	Макс интервал	0.185
27	Морана	0.218	χ^2 Пирсона	0.846	Корреляционный критерий 1	0.060
28	Эппс-Палли	0.214	Макс интервал	0.462	Хегази-Грина 1	0.033
29	Холландера-Прошана	0.202	Корреляционный критерий 2	0.442	Фишера	0.023
30	Пиэтра	0.167	Корреляционный критерий 1	0.422	Корреляционный критерий 2	0.019
31	Фишера	0.037	Фишера	0.139	Хегази-Грина 2	0.006

Параметрический критерий χ^2 Пирсона при проверке показательности показал себя наименее эффективным критерием согласия. Если относительно гипотезы H_1 (с немонотонной интенсивностью отказов) его мощность можно считать средней, то относительно гипотез H_2 и H_3 (с монотонной интенсивностью отказов) критерий демонстрирует сравнительно низкие оценки мощности. И если относительно гипотезы H_2 мощность критерия можно считать еще приличной, то относительно гипотезы H_3 неудачный выбор количества интервалов и метода группирования может приводить к смещенности критерия, и, как следствие, к некорректности выводов.

Выводы по главе

Рассмотрено применения для проверки гипотез о принадлежности выборок равномерному и показательному закону непараметрических критериев согласия и критерия χ^2 Пирсона.

Получены оценки мощности непараметрических критериев согласия и критерия χ^2 Пирсона относительно рассматриваемых в диссертации конкурирующих гипотез при проверке равномерности и при проверке показательности, соответственно.

Отмечена смещённость (относительно гипотезы H_1), проявленная некоторыми критериями согласия при проверке равномерности.

Проведен сравнительный анализ мощности всех критериев, используемых при проверке равномерности, и всех критериев, применяемых при проверке показательности.

В качестве наиболее предпочтительных при проверке равномерности и показательности следует выделить критерий Андерсона–Дарлинга и критерии Жанга, особенно, критерий со статистикой Z_A . Хорошие результаты также демонстрирует критерий Крамера–Мизеса–Смирнова, как правило, уступающий критерию Андерсона–Дарлинга и критериям Жанга.

Можно отметить, что непараметрические критерии согласия (Андерсона–Дарлинга, Крамера–Мизеса–Смирнова и критерии Жанга) при проверке равномерности и показательности оказываются достаточно конкурентоспособными по сравнению со специальными критериями, рассмотренными в главах 2 и 3, соответственно, что не умаляет имеющихся достоинств некоторых специальных критериев.

И в то же время, результаты всех проведенных исследований можно подытожить следующим образом. Корректного использования какого-то одного из критериев для формирования “надежного” статистического вывода может оказаться недостаточно. Для большей объективности статистических выводов предпочтительней воспользоваться некоторым рядом критериев, обладающих определёнными достоинствами. Применение совокупности критериев, статистики которых представляют собой различные меры для оценки отклонения эмпирического распределения от теоретического, повышает обоснованность статистических выводов.

5 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ

5.1 Интерактивный режим проверки гипотез

Принятие решения о результатах проверки гипотезы H_0 на основании достигнутого уровня значимости (p -value) всегда более обосновано, чем в результате сравнения полученного значения статистики с заданным критическим значением, извлекаемым из соответствующей таблицы процентных точек. В последнем случае остаётся не ясным, насколько далеко на самом деле истинное распределение, которому принадлежит анализируемая выборка (и которое в действительности всегда остается неизвестным), от проверяемого закона.

Вычисление достигнутых уровней значимости в соответствии с соотношениями (1.2) для правостороннего критерия или (1.3) для двустороннего не вызывает труда при известном распределении статистики критерия. Если информация о распределении статистики соответствующего критерия отсутствует и представлена лишь таблицей процентных точек, либо объёмы выборок относительно невелики и таковы, что распределение статистики существенно отличается от предельного (асимптотического), то корректное вычисление достигнутого уровня значимости (p -value) представляет собой некоторую проблему.

К сожалению, распределения большинства специальных критериев как проверки равномерности, так и проверки экспоненциальности существенно зависят от объёмов выборок, в связи с чем при формировании решения о результатах проверки гипотезы H_0 (отклонять – не отклонять) опираются на таблицы процентных точек. Редким исключением являются критерии со статистиками, распределения которых описываются некоторыми теоретическими законами с параметрами, каким-то образом зависящими от объёма выборки.

Аналогичная проблема связана с применением непараметрических критериев согласия Жанга со статистиками Z_A , Z_C и Z_K , распределения которых

и при проверке простых, и при проверке сложных гипотез зависят от объёма выборки и неизвестны.

В настоящее время в связи с резким увеличением возможностей вычислительной и информационной техники существенно возрастает роль использования компьютерных технологий анализа данных в программных системах статистического анализа. Например, когда распределение статистики критерия, используемого для проверки некоторой гипотезы, к моменту начала проверки (в силу разных причин) оказывается неизвестным (при данном объёме выборки n), появляется возможность исследования распределения статистики в реальном времени проверки гипотезы (в интерактивном режиме) [50, 51, 53-55, 130, 131, 133]. Например, в интерактивном режиме можно исследовать неизвестное распределение статистики любого критерия равномерности, зависящее от объёма выборки, при том значении n , которое соответствует анализируемой выборке, и оценить по найденному в результате моделирования эмпирическому распределению статистики достигнутый уровень значимости.

При таком подходе необходимое для проверки гипотезы эмпирическое распределение $G_N(S_n|H_0)$ статистики соответствующего критерия строится в результате статистического моделирования с точностью, зависящей от числа экспериментов N в методе Монте-Карло [121]. Затем по эмпирическому распределению $G_N(S_n|H_0)$ и вычисленному по анализируемой выборке значению статистики S^* критерия в соответствии с соотношением (1.2) для правостороннего критерия или по соотношению (1.3) для двустороннего критерия определяется оценка достигнутого уровня значимости (**p-value**).

При проведении статистического моделирования в интерактивном режиме (в ходе осуществляемого статистического анализа) его результаты могут использоваться при формировании вывода по итогам проверки гипотезы.

В рамках данной работы в программном обеспечении «ISW — интервальная статистика для Windows» [137] были реализованы модули для проверки в интерактивном режиме равномерности и показательности данных. Эти формы

позволяют в процессе проверки гипотезы вычислить значение статистики соответствующего критерия, с заданной точностью, зависящей от числа имитационных экспериментов N , смоделировать распределение $G_N(S_n|H_0)$ статистики критерия при n , соответствующим объёму анализируемой выборки, и по этому распределению найти оценку достигнутого уровня значимости (**p-value**).

На рисунке 5.1 на примере модуля «Проверка на равномерность» иллюстрируется интерфейс соответствующих форм. Перейти к формам «Проверка на равномерность» и «Проверка на показательность» можно через всплывающее меню «Действия» в главном окне программы ISW.

На рисунке 5.1 отражены следующие обозначения:

1 – клавиша для добавления в систему выборок из файловой системы (проверяемые выборки должны быть формата .dat);

2 – текстовое сообщение, отражающее содержание комментария в первой строке файла с выборкой;

3 – чекбокс для *выделения/снятия выделения* всех критериев из полного списка критериев равномерности;

4 – список критериев с возможностью выбора группы конкретных критериев из полного списка для использования при проверке гипотезы;

5 – клавиша запуска проверки гипотезы по заданной выборке выбранными критериями;

6 – клавиша для удаления всех выборок, подгруженных в систему.

После нажатия клавиши 5 появляется следующее окно (Рисунок 5.2).

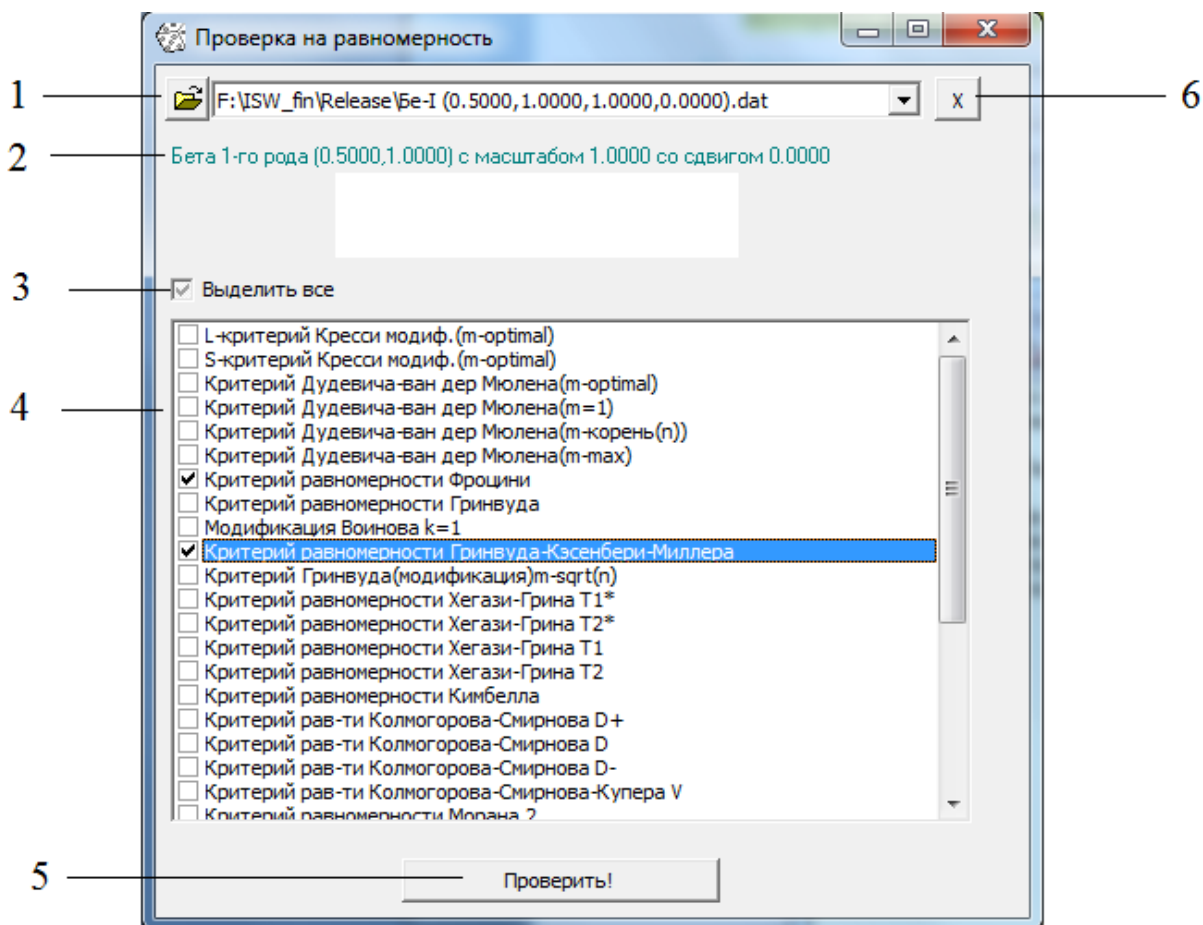


Рисунок 5.1 – Интерфейс «Проверки на равномерность»

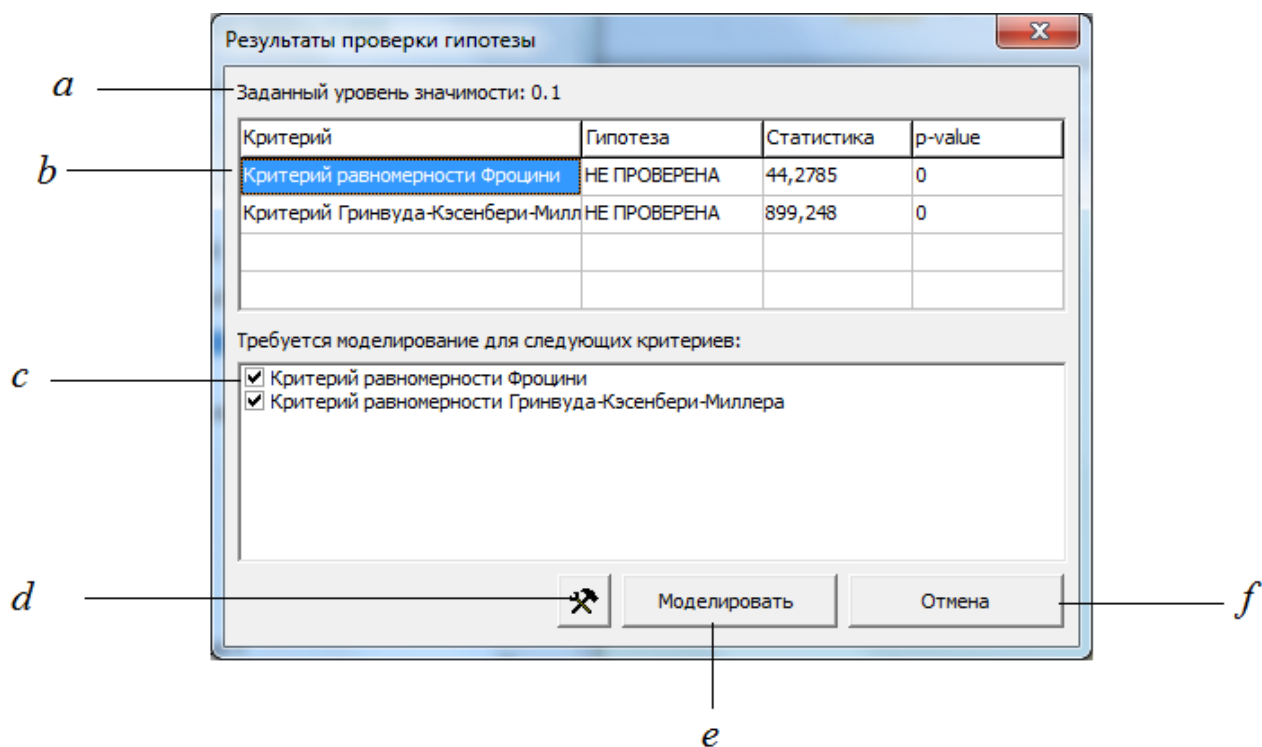



Рисунок 5.2 – Интерфейс «Результаты проверки гипотезы»

На рисунке 5.2 отражены:

a – Заданный уровень значимости, с которым будет сравниваться полученная оценка p -value при формировании статуса о результатах проверки гипотезы (*отклоняется/не отклоняется*). Изменить данное значение можно через опцию «Параметры» (раздел «Критерии», снизу окна), на которую можно попасть через кнопку  на главном окне программы или пункт меню «Действия» → «Параметры».

b – Список критериев, используемых для проверки гипотезы. На данном этапе уже вычислены статистики критериев, и для изменения статуса «гипотезы» и вычисления оценки p -value по соответствующим критериям необходимо провести моделирование распределений статистик.

c – Список критериев с чекбоксами для выбора критериев, для которых будут моделироваться распределения статистик.

d – Клавиша открытия вспомогательного окна «Параметры моделирования» (Рисунок 5.3). Данная форма позволяет менять количество имитационных экспериментов при моделировании эмпирических распределений статистик, по которым будет оцениваться p -value, и число используемых потоков при распараллеливании процесса моделирования. Эта форма дает также возможность сохранить в отдельные файлы выборки, полученные в результате моделирования эмпирических распределений статистик $G_N(S_n|H_0)$ соответствующих критериев.

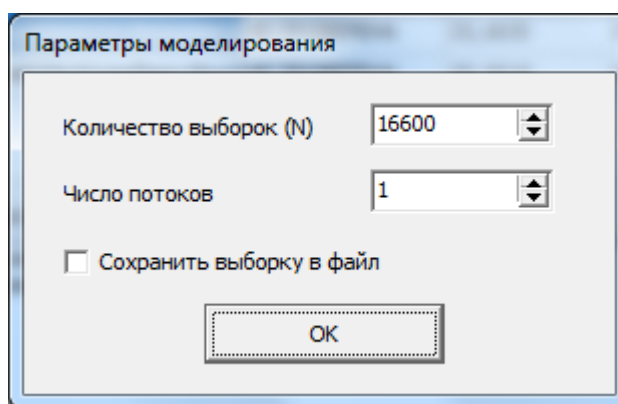
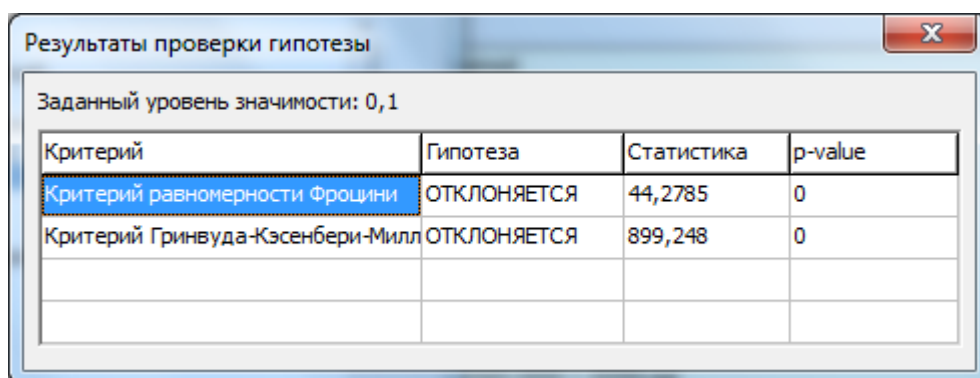


Рисунок 5.3 – «Параметры моделирования»

e – клавиша запуска моделирования распределений статистик для выбранных критериев. После нажатия клавиши появится сообщение на главном окне и спустя некоторое время появляется новое окно с результатами проверок (Рисунок 5.4). Моделирование распределений статистик представляет собой достаточно трудоемкий процесс и может занимать значительное время, которое возрастает с ростом N и уменьшается с увеличением числа используемых потоков.

f – клавиша для отмены/закрытия окна.



Критерий	Гипотеза	Статистика	p-value
Критерий равномерности Фроцини	ОТКЛОНЯЕТСЯ	44,2785	0
Критерий Гринвуда-Кэсенбери-Милл	ОТКЛОНЯЕТСЯ	899,248	0

Рисунок 5.4 – Результат проверки гипотезы

В качестве примера для рассмотренных критериев проверки продемонстрируем зависимость точности оценивания достигнутых уровней значимости от величины выборки N моделируемых в интерактивном режиме эмпирических распределений статистик критериев проверки равномерности.

Пример 5.1. В данном случае проверялась простая гипотеза о принадлежности равномерному закону на интервале $[0, 1]$ следующей выборки объемом $n = 25$, представленной вариационным рядом:

0.03 0.07 0.16 0.17 0.18 0.19 0.30 0.32 0.38 0.41
 0.49 0.50 0.51 0.59 0.62 0.68 0.73 0.74 0.78 0.88
 0.89 0.94 0.97 0.98 0.99

Напомним, что для того чтобы погрешность оценивания достигнутого уровня значимости (**p-value**) с доверительной вероятностью 0.99 не превышала величины 0.01, количество экспериментов имитационного моделирования N должно быть порядка 16 600, для того, чтобы не превышала 0.001 – количество экспериментов должно быть порядка 1 660 000 (по формуле (1.10)).

В таблице 5.1 приведены значения статистик, вычисленные в соответствии с приведенной выборкой, и достигнутые уровни значимости, полученные по смоделированным распределениям статистик соответствующих критериев при количестве экспериментов $N=10^3, 10^4, 10^5, 10^6$.

Таблица 5.1 – Достигнутые уровни значимости, полученные при проверке равномерности при различных N

Критерий, статистика	Значение статистики	Оценка p-value			
		$N = 10^3$	$N = 10^4$	$N = 10^5$	$N = 10^6$
Шермана (2.1)	0.33692	0.698	0.681	0.683	0.686
Кимбелла (2.4)	0.02494	0.803	0.808	0.809	0.811
Морана 1 (2.5)	0.06340	0.803	0.808	0.809	0.811
Морана 2 (2.6)	9.30475	0.934	0.915	0.918	0.917
Ченга–Спиринга (2.9)	0.46839	0.596	0.633	0.629	0.634
Хегази–Грина (2.10)	0.04548	0.704	0.695	0.691	0.691
Хегази–Грина (2.11)	0.00286	0.735	0.725	0.720	0.721
Хегази–Грина (2.14)	0.04227	0.791	0.783	0.784	0.784
Хегази–Грина (2.15)	0.00221	0.871	0.856	0.856	0.856
Янга (2.17)	0.49000	0.876	0.926	0.925	0.920
Фросини (2.20)	0.2120	0.754	0.748	0.746	0.746
Гринвуда (2.21)	1.6484	0.803	0.808	0.809	0.811
Гринвуда–Кэсенберри–Миллера (2.24)	0.0953	0.884	0.885	0.884	0.884
Неймана–Бартона N_2 (2.26)	0.98893	0.618	0.620	0.617	0.615
Неймана–Бартона N_3 (2.26)	2.11458	0.548	0.554	0.550	0.552
Неймана–Бартона N_4 (2.26)	2.56396	0.667	0.641	0.636	0.637
Дудевича–ван дер Мюлена (2.28)	0.15048	0.855	0.8595	0.858	0.857
Модификация энтропийного 1 (2.29)	-0.02255	0.855	0.857	0.855	0.854
Модификация энтропийного 2 (2.30)	-0.04873	0.920	0.922	0.921	0.921
Кресси 1 (2.31)	0.03727	0.961	0.964	0.965	0.966
Кресси 2 (2.32)	-0.01514	0.960	0.969	0.966	0.969
Пардо (2.33)	1.26344	0.718	0.742	0.745	0.744
Шварца (2.34)	0.11000	0.952	0.956	0.955	0.955
Модификация Андерсона-Дарлингга (2.35)	0.41317	0.803	0.799	0.791	0.792
Колмогорова (4.1)	0.63333	0.842	0.820	0.820	0.821
Купера (4.3)	0.91667	0.904	0.919	0.919	0.918
Крамера-Мизеса- Смирнова (4.6)	0.06373	0.802	0.797	0.795	0.795
Ватсона (4.8)	0.02053	0.974	0.979	0.977	0.976
Андерсона-Дарлингга (4.11)	0.57833	0.677	0.672	0.666	0.667
Z_A Жанга (4.13)	3.36593	0.746	0.744	0.738	0.739
Z_C Жанга (4.14)	6.22722	0.758	0.762	0.758	0.760
Z_K Жанга (4.15)	1.32465	0.612	0.612	0.592	0.593
χ^2 Пирсона (4.16)	1.20000	0.900	0.889	0.888	0.888

Вид эмпирической функции распределения, соответствующей анализируемой выборке, и функции равномерного на $[0,1]$ закона представлены на рисунке 5.5.

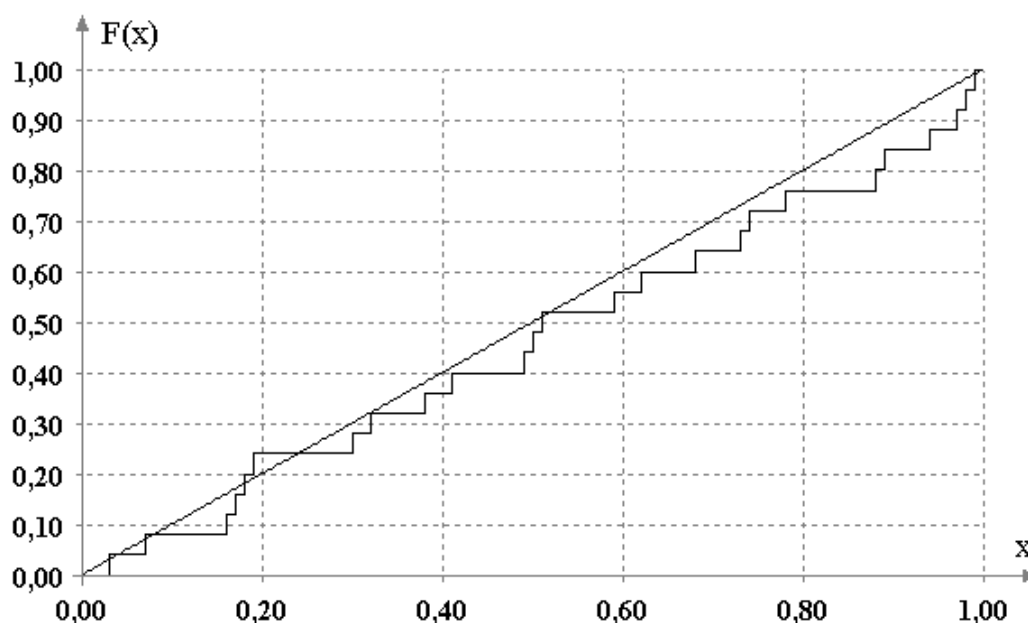


Рисунок 5.5 – Эмпирическая и теоретическая функции распределения, соответствующие примеру 5.1

Для большинства непараметрических критериев согласия известны предельные распределения статистик, имеющие место при справедливости проверяемой гипотезы H_0 . В таблице 5.2 представлены оценки достигнутых уровней значимости для этих критериев, вычисленные в соответствии с предельными распределениями.

Отличие оценок, представленных таблице 5.2, от оценок, полученных в результате моделирования распределений статистик непараметрических критериев согласия связано с тем, что при $n = 25$ эти распределения ещё заметно отличаются от предельных.

В случае критерия χ^2 Пирсона это отличие усиливается ещё одним фактором. При проверке по критерию χ^2 Пирсона область определения была разбита на 5 интервалов равной длины (равных вероятностей). Оценка достигнутого уровня значимости, вычисленная по асимптотическому χ^2_4 -распределению, равна 0.8781, что заметно отличается от значения 0.888,

представленного для критерия по смоделированному распределению статистики при $N=10^6$. Имеющееся отличие в большей степени объясняется фактом дискретности реального распределения статистики (Рисунок 4.1).

Таблица 5.2 – Достигнутые уровни значимости, вычисленные по предельным законам распределения

Критерий, статистика	Значение статистики	Оценка p-value
Колмогорова	0.63333	0.8173
Купера	0.91667	0.9096
Крамера–Мизеса–Смирнова	0.06373	0.7905
Ватсона	0.02053	0.9874
Андерсона–Дарлингга	0.57833	0.6687
χ^2 Пирсона	1.20000	0.8781

Аналогичным образом в зависимости от точности продемонстрируем оценивание p-value в интерактивного режиме при проверке показательности.

Пример 5.2. В данном случае проверялась сложная гипотеза о принадлежности показательному закону выборки объемом $n = 30$:

1.10 2.42 0.25 0.22 0.26 1.31 0.41 0.48 1.07 1.18
 1.21 0.16 0.64 2.27 0.08 1.80 0.65 0.66 0.34 0.76
 0.09 0.59 0.36 2.36 2.45 1.41 0.02 3.37 2.09 0.14

Или эта же выборка, представленная в виде вариационного ряда:

0.02 0.08 0.09 0.14 0.16 0.22 0.25 0.26 0.34 0.36
 0.41 0.48 0.59 0.64 0.65 0.66 0.76 1.07 1.10 1.18
 1.21 1.31 1.41 1.80 2.09 2.27 2.36 2.42 2.45 3.37

В таблице 5.3 приведены значения статистик, вычисленные в соответствии с представленной выборкой, и достигнутые уровни значимости, полученные по смоделированным распределениям статистик при количестве экспериментов $N = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ для критериев, ориентированных на проверку экспоненциальности.

Вид эмпирической функции распределения, соответствующей анализируемой выборке, и функции распределения экспоненциального закона представлены на рисунке 5.6.

Таблица 5.3 – Достигнутые уровни значимости, полученные при проверке показательности при различных N

Критерий, статистика	Значение статистики	Оценка p-value			
		$N = 10^3$	$N = 10^4$	$N = 10^5$	$N = 10^6$
Шапиро-Уилка (3.1)	0.04041	0.596	0.591	0.589	0.588
Шапиро-Уилка (3.3)	0.02480	0.608	0.597	0.594	0.593
Фросини (3.4)	0.12161	0.965	0.967	0.966	0.966
Корреляционный критерий (3.6)	1.29488	0.394	0.414	0.416	0.414
Корреляционный критерий (3.7)	0.85929	0.596	0.616	0.616	0.616
Кимбера-Мичела (3.8)	0.05165	0.967	0.964	0.964	0.963
Фишера (3.9)	0.94514	0.678	0.668	0.661	0.660
Бартлетта-Морана (3.10)	-26.3296	0.774	0.847	0.864	0.863
Пиэтра (3.11)	0.36401	0.465	0.471	0.472	0.471
Эппса-Палли (3.12)	-0.37931	0.870	0.871	0.868	0.866
Холландер-Прошан (3.13)	0.33029	0.816	0.825	0.823	0.820
Максимальный интервал (3.15)	0.111111	0.444	0.438	0.436	0.438
Кочара (3.16)	1.25844	0.375	0.372	0.367	0.367
Климко-Антла- Радемакера-Рокетта (3.17)	0.81856	0.596	0.591	0.589	0.588
Гринвуда (3.19)	1.76688	0.682	0.668	0.662	0.660
Лоулесса (3.20)	0.59192	0.868	0.849	0.861	0.864
Дешпанде $b = 0.1$ (3.22)	0.21657	0.872	0.847	0.869	0.872
Дешпанде $b = 0.3$ (3.22)	-0.24747	0.866	0.856	0.845	0.845
Дешпанде $b = 0.5$ (3.22)	-0.09529	0.968	0.990	0.985	0.984
Эпштейна (3.23)	21.0372	0.794	0.805	0.800	0.800
Морана (3.25)	0.36037	0.868	0.849	0.861	0.864
Хегази-Грина (3.27)	0.1011	0.928	0.928	0.927	0.926
Хегази-Грина (3.28)	0.02671	0.874	0.886	0.883	0.882
Купера (4.3)	0.14251	0.945	0.949	0.950	0.950
Крамера-Мизеса-Смирнова (4.6)	0.04726	0.896	0.895	0.895	0.896

Можно обратить внимание, что для обоснованного принятия решения не требуется высокой точности оценивания p-value и, следовательно, больших объёмов моделирования. И в то же время, очевидно, что использование интерактивного режима и реализация возможности вычисления достигнутых уровней значимости при использовании критериев, для которых неизвестны распределения статистик (при конкретных n), существенно повышают информативность результатов проверки статистических гипотез и качество (корректность) статистических выводов.

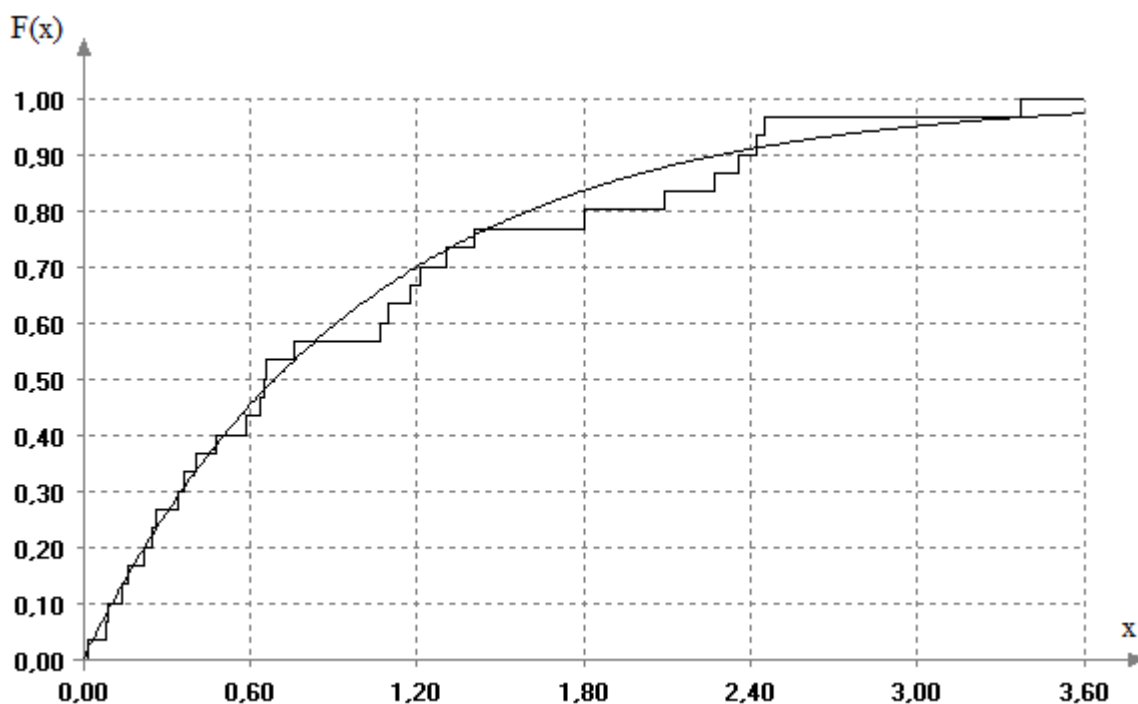


Рисунок 5.6 – Эмпирическая и теоретическая функции распределения, соответствующие примеру 5.2

Теперь рассмотрим некоторые примеры применения результатов исследований и разработанного программного обеспечения для решения прикладных задач.

В демографических исследованиях зачастую упоминается использование равномерного распределения для описания расселения людей на некотором участке земли. Иногда его применяют для описания естественного прироста населения в городах.

Пример 5.3. Прирост населения города Новосибирска с 1985 по 2016 года представлен выборкой объемом $n = 31$ (в тысячах человек):

-25	27	13.516	-9.516	19	-4	-11	-13	-19	-2	-30
32	3.4	-3.6	-5.6	32.308	-0.008	-12.5	-7.4	-8.6	-5.1	
-1.4	6.691	-0.054	25.221	24.88	24.109	19.177	17.051	18.777	9.918	

Проверялась сложная гипотеза о принадлежности прироста населения города Новосибирска за заданный период равномерному закону. Информация о порядке проверки сложной гипотезы равномерному закону представлена в первом разделе диссертации. На рисунке 5.7 приведено эмпирическое распределение

прироста населения и равномерный закон с оценками параметров масштаба 66.462 и сдвига -32.077.

Результаты проверки сложной гипотезы специальными критериями равномерности (значения статистик и оценки достигнутых уровней значимости при различном количестве имитационных экспериментов N) представлены в таблице 5.4. Как можно видеть, полученные оценки p_{value} свидетельствуют о том, что проверяемая гипотеза не отклоняется.

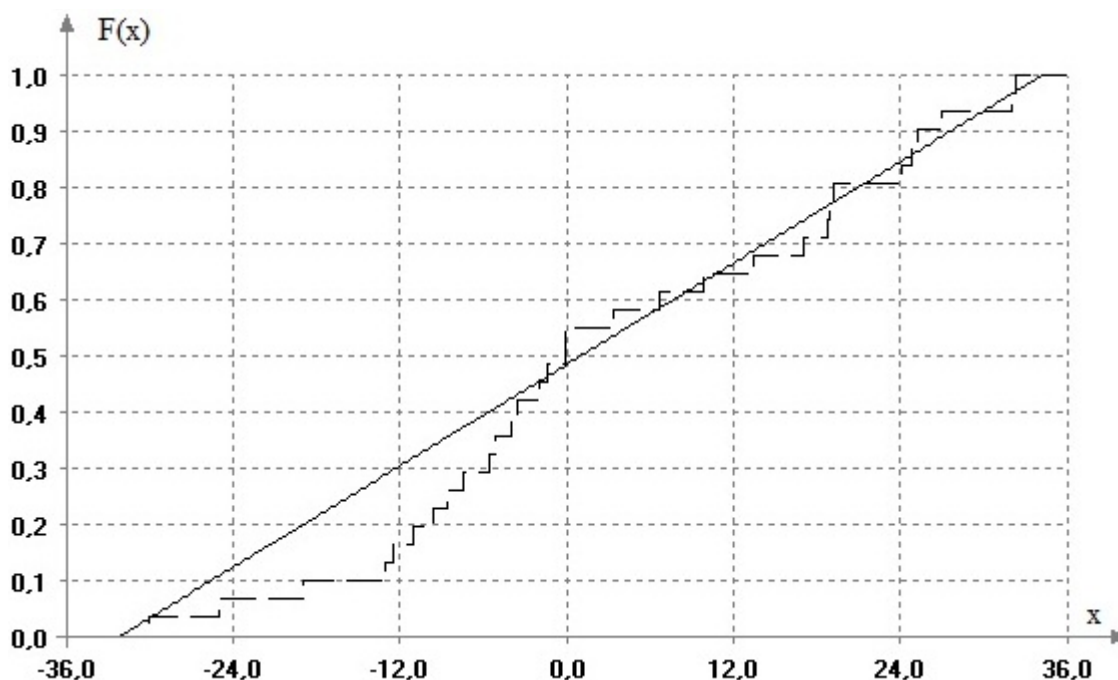


Рисунок 5.7 – Прирост населения Новосибирска и равномерное распределение с оценками параметров масштаба 66.462 и сдвига -32.077

Удачное использование равномерного закона в задачах демографии является, скорее, исключением из правил.

Следующий пример иллюстрирует возможность эффективного применения специальных критериев равномерности для проверки простых гипотез о принадлежности выборок любым параметрическим моделям законов распределения. Для этого можно использовать метод обратных функций, чтобы получить эквивалентную выборку на интервале $[0,1]$. Пусть необходимо проверить гипотезу о принадлежности выборки Y_1, Y_2, \dots, Y_n закону с функцией распределения $F(y, \theta)$ и известным вектором параметров θ . Из исходной

формируется новая выборка X_1, X_2, \dots, X_n , где $X_i = F^{-1}(Y_i, \theta)$, а далее проверяется простая гипотеза о принадлежности этой выборки равномерному на $[0,1]$ закону.

Таблица 5.4 – Результаты проверки сложной гипотезы о равномерности прироста населения в Новосибирске

Критерий, статистика	Значение статистики	Оценка p-value			
		$N = 10^3$	$N = 10^4$	$N = 10^5$	$N = 10^6$
Шермана (2.1)	0.37269	0.386	0.394	0.392	0.394
Кимбелла (2.4)	0.02545	0.661	0.675	0.673	0.674
Морана 1 (2.5)	0.05879	0.661	0.675	0.673	0.674
Морана 2 (2.6)	15.5681	0.565	0.579	0.581	0.581
Ченга–Спиринга (2.9)	0.56489	0.118	0.091	0.091	0.093
Хегази–Грина (2.10)	0.05529	0.447	0.450	0.449	0.447
Хегази–Грина (2.11)	0.00528	0.365	0.371	0.370	0.368
Хегази–Грина (2.14)	0.06302	0.367	0.364	0.360	0.358
Хегази–Грина (2.15)	0.00728	0.273	0.265	0.264	0.263
Янга (2.17)	0.62161	0.052	0.054	0.050	0.049
Фросини (2.20)	0.31440	0.415	0.404	0.397	0.397
Гринвуда (2.21)	1.76363	0.661	0.675	0.673	0.674
Гринвуда–Кэсенберри–Миллера (2.24)	0.09737	0.360	0.366	0.364	0.366
Неймана–Бартона N_2 (2.26)	3.37594	0.186	0.184	0.184	0.184
Неймана–Бартона N_3 (2.26)	4.54473	0.210	0.208	0.205	0.205
Неймана–Бартона N_4 (2.26)	4.62346	0.335	0.325	0.324	0.323
Дудевича–ван дер Мюлена (2.28)	0.25176	0.196	0.185	0.183	0.185
Модификация энтропийного 1 (2.29)	0.09911	0.202	0.192	0.190	0.191
Модификация энтропийного 2 (2.30)	0.11661	0.122	0.112	0.111	0.112
Кресси 1 (2.31)	0.09969	0.402	0.418	0.420	0.419
Кресси 2 (2.32)	5.58289	0.100	0.099	0.099	0.098
Пардо (2.33)	1.35561	0.365	0.371	0.382	0.382
Шварца (2.34)	0.31169	0.191	0.186	0.184	0.185
Модификация Андерсона-Дарлинга (2.35)	1.75248	0.15	0.147	0.144	0.144

Для закона распределения, описывающего прирост населения города Мюнхена период с 1945 по 2015 год (включающего в себя послевоенные годы, “падение Берлинской стены” и последние годы, характеризующиеся наплывом мигрантов), была выбрана модель нормального закона с параметрами масштаба 16.53 и сдвига 11.26. Соответствующие эмпирическое и теоретическое распределения представлены на рисунке 5.8.

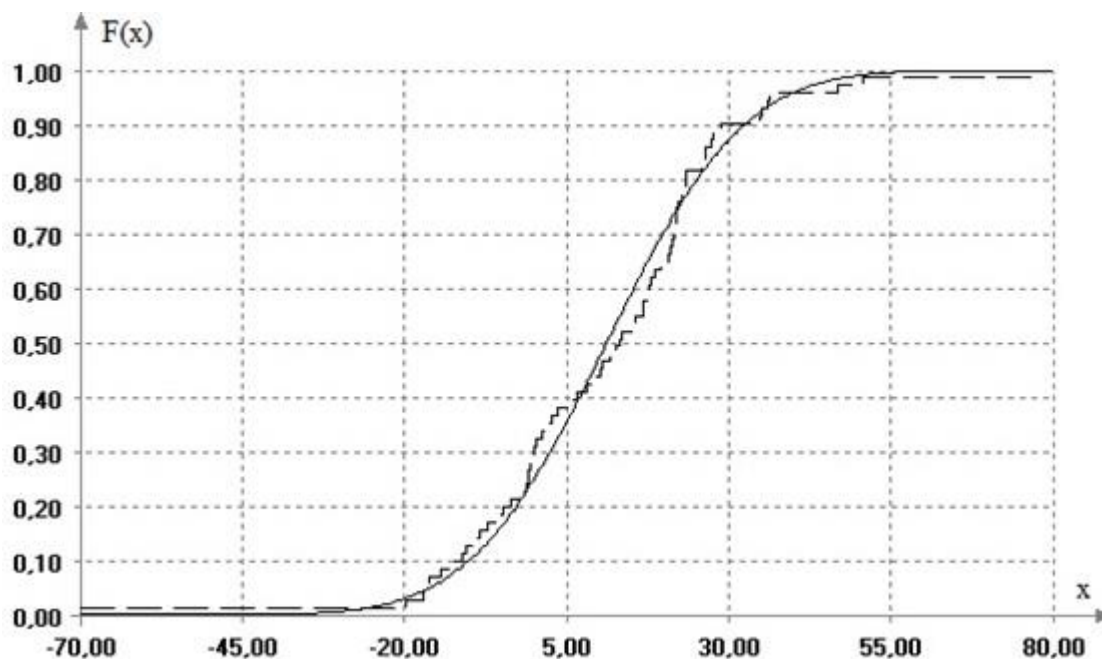


Рисунок 5.8 – Прирост населения Мюнхена и нормальное распределение с параметрами масштаба 16.53 и сдвига 11.26

Пример 5.4. Прирост населения города Мюнхена с 1945 по 2016 года $n = 71$ в тысячах:

77.813	36.133	13.4	12.728	17.709	23.066	18.062	16.778	18.729	21.236	27.369
28.851	25.85	21.976	21.603	50.841	36.324	23.538	26.454	21.989	20.945	8.689
35.168	46.926	-14.35	26.454	0.492	-2.348	-13.142	-8.569	-0.293	-0.633	-16.97
2.723	-0.752	-7.113	-4.748	-3.623	-16.01	-0.902	8.167	-73.237	10.138	-4.934
22.343	0.026	27.586	-1.015	-10.95	-8.306	-10.561	-19.89	-17.026	-5.663	15.663
17.735	6.734	13.181	1.303	10.501	34.931	16.965	15.234	3.633	22.746	11.734
23.388	19.528	21.748	20.797	2.445						

Результаты проверки простой гипотезы (значения статистик и оценки достигнутых уровней значимости) о принадлежности выборки, преобразованной по методу обратных функций, равномерному на интервале $[0,1]$ закону с использованием специальных критериев равномерности представлены в таблице 5.5.

Статистика критерия Морана 2 чувствительна к наличию в выборке повторяющихся наблюдений (в ней используется логарифм разности соседних элементов). В выборке непрерывной случайной величины вероятность появления одинаковых значений равна 0. Однако вследствие ограниченной точности

представления данных в приложениях повторы оказываются частым явлением, что ограничивает область применения данного критерия. В анализируемой выборке повторяющиеся наблюдения выделены серым цветом.

Таблица 5.5 – Результаты проверки простой гипотезы о принадлежности прироста населения Мюнхена нормальному закону

Критерий, статистика	Значение статистики	Оценка p-value			
		$N = 10^3$	$N = 10^4$	$N = 10^5$	$N = 10^6$
Шермана (2.1)	0.37442	0.368	0.366	0.365	0.370
Кимбелла (2.4)	0.01296	0.506	0.515	0.513	0.517
Морана 1 (2.5)	0.02684	0.506	0.515	0.513	0.517
Морана 2 (2.6)	-	-	-	-	-
Ченга–Спиринга (2.9)	0.16639	0.730	0.749	0.756	0.754
Хегази–Грина (2.10)	0.03128	0.566	0.559	0.562	0.562
Хегази–Грина (2.11)	0.00136	0.592	0.593	0.595	0.595
Хегази–Грина (2.14)	0.02881	0.632	0.648	0.651	0.650
Хегази–Грина (2.15)	0.00122	0.646	0.657	0.663	0.663
Янга (2.17)	0.49282	0.972	0.988	0.980	0.984
Фросини (2.20)	0.25234	0.585	0.603	0.600	0.600
Гринвуда (2.21)	1.93280	0.506	0.515	0.513	0.517
Гринвуда–Кэсенберри–Миллера (2.24)	0.04029	0.491	0.515	0.518	0.519
Неймана–Бартона N_2 (2.26)	0.49488	0.800	0.782	0.783	0.782
Неймана–Бартона N_3 (2.26)	1.71528	0.644	0.634	0.636	0.635
Неймана–Бартона N_4 (2.26)	2.64536	0.628	0.616	0.621	0.620
Дудевича–ван дер Мюлена (2.28)	0.09695	0.720	0.711	0.706	0.705
Модификация энтропийного 1 (2.29)	0.01720	0.723	0.717	0.712	0.711
Модификация энтропийного 2 (2.30)	0.01625	0.664	0.657	0.649	0.649
Кресси 1 (2.31)	0.08366	0.249	0.258	0.252	0.255
Кресси 2 (2.32)	5.46719	0.409	0.421	0.421	0.424
Пардо (2.33)	1.17020	0.576	0.574	0.573	0.572
Шварца (2.34)	0.21511	0.627	0.643	0.647	0.650
Модификация Андерсона-Дарлингга (2.35)	0.49823	0.728	0.739	0.740	0.739

Следующие данные предоставлены фирмой, осуществляющей изготовление, поставку и обслуживание модулей связи. В данном случае её интересовала возможность использования показательного закона для описания времени срока службы коммутаторов. Представленный ниже пример содержит время наработки (время до регистрации обращения об отказе изделия) в днях для модулей связи моделей 104M1-4ES-2E1-DCH и 104M1-4ES-4E1-DCH.

Пример 5.5. Время наработки указанных моделей коммутаторов связи в днях представлено следующей выборкой объёмом $n = 126$:

1398	2834	1539	211	2839	103	13	2530	1134	2963	2963	980
754	1876	342	98	1132	2677	1	2050	2790	105	2217	1145
42	400	477	349	1278	1516	3620	2448	18	2456	168	294
141	1814	1861	364	1114	2075	2570	611	2839	5918	132	2026
995	2456	2458	1365	2452	1118	2005	1714	671	2527	101	1256
446	278	3122	31	2456	1450	2963	2504	5123	1315	75	326
254	925	188	1023	2739	542	3117	957	1250	65	68	141
1133	1722	388	874	2723	1230	262	1856	461	1367	257	280
2739	4825	940	139	1539	1149	532	817	123	2311	588	957
21	5123	3133	2839	692	279	994	2792	421	38	1004	774
4162	91	28	9	960	1765						

Результаты проверки сложной гипотезы о принадлежности наработки на отказ с использованием множества специальных критериев показательности (значения статистик и оценки достигнутых уровней значимости при различном количестве имитационных экспериментов N) представлены в таблице 5.6. Как можно судить по полученным оценкам p_{value} , в данном случае модель показательного закона является не очень хорошей моделью. Об этом же говорит рисунок 5.9, на котором представлены эмпирическое распределение наработки до отказа и построенная модель показательного закона с параметром масштаба 1572.69 и нулевым параметром сдвига. Построение более точной модели требует более тщательной регистрации необходимых данных.

Таблица 5.6 – Результаты проверки сложной гипотезы о принадлежности наработки на отказ показательному закону

Критерий, статистика	Значение статистики	Оценка p -value			
		$N = 10^3$	$N = 10^4$	$N = 10^5$	$N = 10^6$
Шапиро-Уилка (3.1)	0.00975	0.270	0.233	0.229	0.229
Шапиро-Уилка (3.3)	0.00631	0.272	0.234	0.229	0.230
Фросини (3.4)	0.44182	0.022	0.021	0.020	0.020
Корреляционный критерий (3.6)	5.25751	0.066	0.073	0.076	0.076
Корреляционный критерий (3.7)	4.32921	0.157	0.146	0.147	0.147
Кимбера-Мичела (3.8)	0.06942	0.091	0.105	0.102	0.104
Фишера (3.9)	0.99593	0.640	0.636	0.637	0.635

Критерий, статистика	Значение статистики	Оценка p-value			
		$N = 10^3$	$N = 10^4$	$N = 10^5$	$N = 10^6$
Бартлетта-Морана (3.10)	148.330	0.063	0.057	0.061	0.061
Пиэтра (3.11)	0.36412	0.551	0.536	0.540	0.538
Эпса-Палли (3.12)	-0.55603	0.692	0.698	0.643	0.646
Холландер-Прошан (3.13)	0.36898	0.780	0.751	0.749	0.748
Максимальный интервал (3.15)	0.02932	0.822	0.820	0.819	0.817
Кочара (3.16)	1.55203	0.131	0.143	0.133	0.135
Климко-Антла-Радемакера-Рокетта (3.17)	1.42350	0.220	0.242	0.228	0.229
Гринвуда (3.19)	1.80605	0.262	0.286	0.271	0.269
Дешпанде $b = 0.1$ (3.22)	-2.48827	0.014	0.015	0.016	0.015
Дешпанде $b = 0.3$ (3.22)	-1.24127	0.242	0.203	0.210	0.212
Дешпанде $b = 0.5$ (3.22)	-1.07872	0.326	0.278	0.282	0.283
Эпштейна (3.23)	-1.54136	0.126	0.120	0.120	0.121
Морана (3.25)	152.451	0.047	0.047	0.046	0.046
Хегази-Грина (3.27)	0.12759	0.259	0.256	0.257	0.255
Хегази-Грина (3.28)	0.05744	0.250	0.259	0.244	0.244

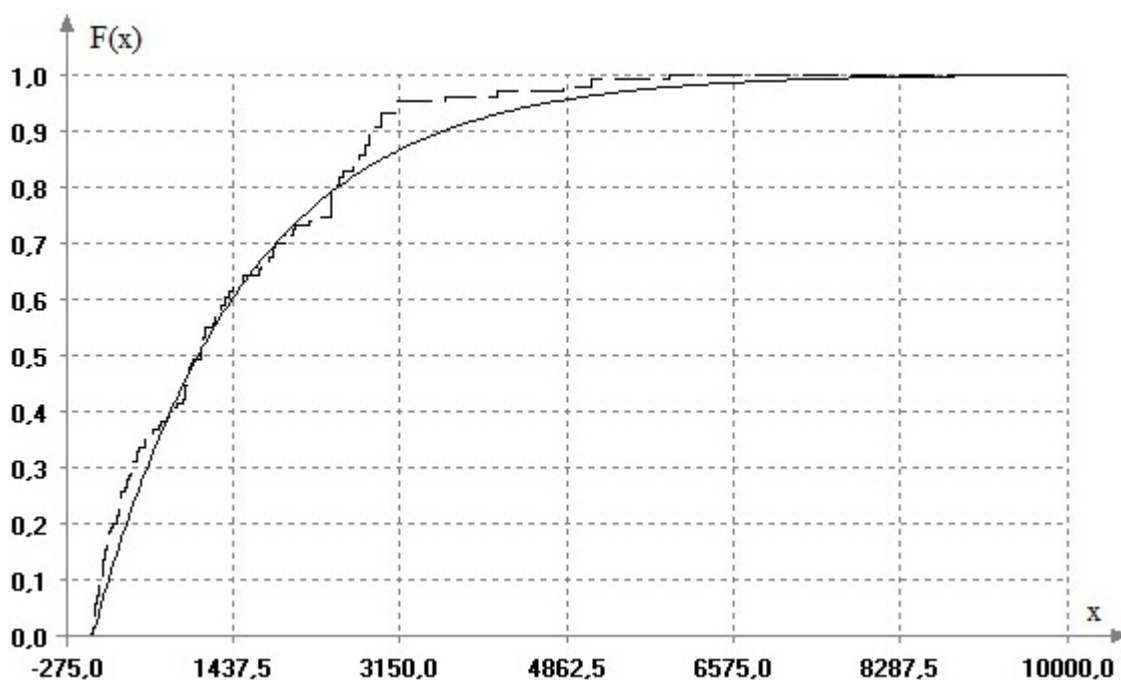


Рисунок 5.9 – Эмпирическое распределение наработки до отказа и экспоненциальное распределение с параметром масштаба 1572.69

5.2 Подсистема моделирования функций от случайных величин

Одной из широко востребованных на практике является задача определения закона распределения вероятностей функции от случайных величин и систем случайных величин. Решение этой задачи с применением классического аппарата

представляет собой трудоёмкий процесс, а найти решение в аналитическом виде удастся в исключительных случаях. Осложняют проблему разнообразие законов распределения и различная сложность функций от случайных величин.

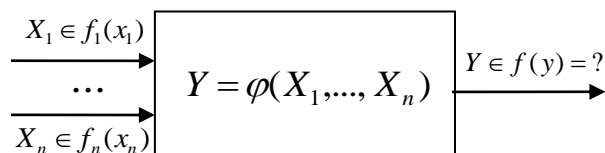
Достаточно часто решаемой задачей в метрологии является задача определения вероятностных характеристик величины Y , непосредственно недоступной для измерения, на основании доступных для многократных измерений величин X_1, X_2, \dots, X_k . Предполагается, что

$$Y = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_k),$$

где $\varphi(\cdot)$ – некоторая известная функция. Или в векторной форме $Y = \varphi(\bar{X})$.

Предполагается, что закон распределения вектора \bar{X} или, в случае независимости его компонент, законы распределения X_1, X_2, \dots, X_k (или законы распределения ошибок измерений) известны или могут быть найдены (построены) на основании результатов статистического анализа.

Функция $Y = \varphi(\bar{X})$ может быть результатом функционирования некоторой информационно-измерительной системы.



Классический подход определения закона распределения вероятностей функции от системы случайных величин предполагает знание совместной плотности распределения $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ системы случайных величин X_1, X_2, \dots, X_k .

Пусть $X : \Omega \rightarrow R^n$ – случайная величина, и $g : R^n \rightarrow R^n$ – непрерывно дифференцируемая функция такая, что $J_g(x) \neq 0, \forall x \in R^n$, где $J_g(x)$ – якобиан функции g в точке x . Тогда случайная величина также абсолютно непрерывна, и её плотность имеет вид:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| J_{g^{-1}}(y) \right|.$$

Однако с помощью классического подхода аналитическое решение удается найти только для некоторых частных случаев $Y = \varphi(\bar{X})$ и $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$.

В качестве реального выхода из тупиковой ситуации при поиске закона $F(y)$ можно рассматривать использование статистического моделирования. Методами статистического моделирования при соответствующей программной поддержке исследование закона распределения $F(y)$ в зависимости от законов распределения $F_i(x_i)$ принципиальных трудностей не вызывает [47, 124, 127].

Основным методом нахождения распределения интересующей нас случайной величины Y является метод статистических испытаний. В настоящей работе подсистема моделирования функций от случайных величин реализована в составе программной системы ISW [137]. Перейти в соответствующую форму можно через всплывающее меню «Моделирование» в главном окне программы ISW.

На рисунке 5.10 представлена форма «Моделирование функций от случайных величин», отражающая описание пользовательского интерфейса:

1 – модуль выбора распределения из загруженных в систему законов распределения;

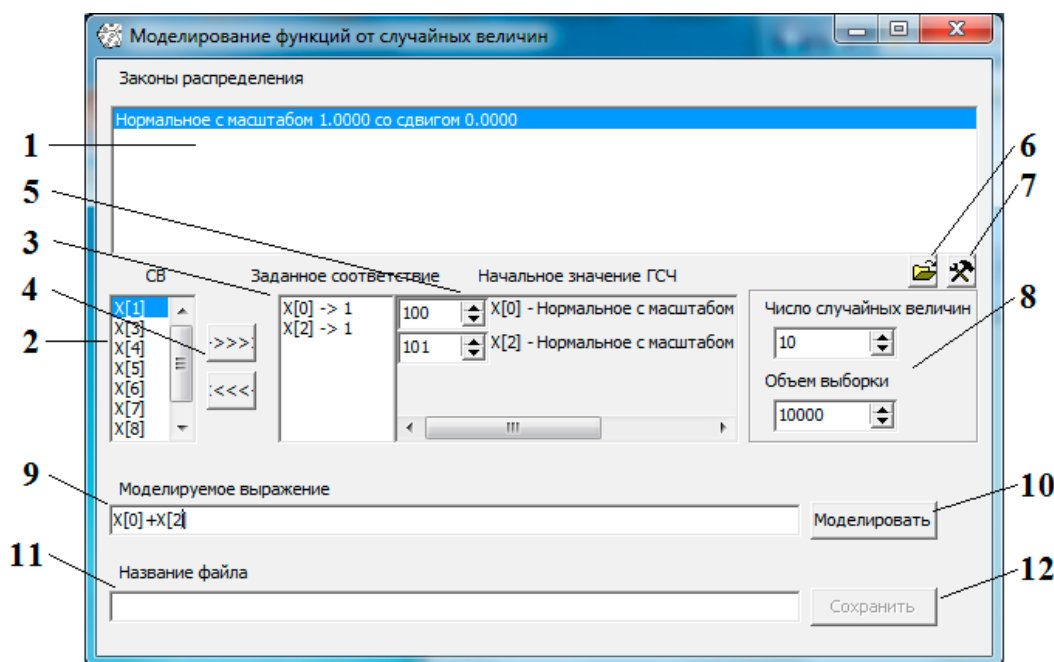


Рисунок 5.10 – Интерфейс «Моделирование функций от случайных величин»

- 2 – модуль выбора случайной величины из ещё неиспользуемых;
- 3 – модуль, содержащий выбранные случайные величины. В модуле показано соответствие этих случайных величин с идентификаторами (ID) распределений (не видно пользователю);
- 4 – клавиши для добавления и удаления случайных величин в модуле 3;
- 5 – модуль, содержащий информацию обо всех выбранных случайных величинах: начальном значении генератора случайных чисел, который можно менять, и о распределении случайной величины, включая параметры;
- 6 – клавиша для загрузки распределений;
- 7 – клавиша для изменения параметров распределений. После ее нажатия появляется форма, показанная на рисунке 5.11;

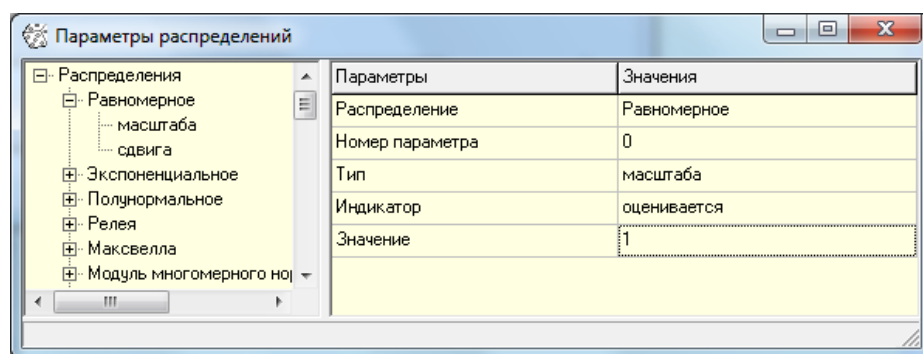


Рисунок 5.11 – Форма «Параметры распределений»

- 8 – Модуль для изменения параметров моделирования (максимального количества используемых случайных величин и объемов генерируемых выборок);
- 9 – модуль для записи моделируемого выражения. Операции, доступные в этом модуле, будут представлены далее;
- 10 – клавиша запуска моделирования функции от случайных величин. В случае некорректной записи выражения в модуле 9 будет выдана ошибка, и моделирование не запустится;
- 11 – модуль записи имени файла для сохранения результирующей выборки. После окончания моделирования имя файла будет сгенерировано по умолчанию в соответствии с видом моделируемого выражения;
- 12 – клавиша для подтверждения сохранения уже смоделированной выборки в файл с именем, указанным в 11.

Вид функций от независимых случайных величин может быть “произвольным” и задается пользователем в режиме диалога. В программной системе доступны следующие операции:

- Бинарные операции: сложение (+), вычитание (–), умножение (*), деление (/), деление по модулю (%), возведение в степень (^);
- унарные операции: унарный минус, извлечение квадратного корня (sqrt), взятие модуля (abs), тригонометрические операции (sin, cos, tg, ctg, arcsin, arccos, arctg, arcctg, sh, ch, th, cth, exp), логарифмические операции (lg, ln);
- n -арные операции: нахождение минимума (min), нахождение максимума (max), нахождение среднего (avg) и суммы (sum) множества случайных величин.
- в системе также доступны известные константы e (e) и π (pi).

Помимо простой моделируемой функции, задание которой показано на рисунке 5.7, можно привести примеры задания более сложных n -арных операций:

- $\text{avg}(X[i(0)], i(0)=0:10)$ – среднее значения 11 элементов X с индексами от 0 до 10 включительно;
- $\text{min}(X[i(0)], i(0)=0:29)$ – поиск минимума среди 30 элементов X с индексами от 0 до 29 включительно;
- синтаксис поиска максимума аналогичный;
- $\text{Sum}(X[(i(0)], i(0)=0:24)+\text{Sum}(X[i(1)], i(1)=50:75)$ – нахождение суммы элементов X с индексами от 0 до 24 и от 50 до 75 включительно.

В качестве примеров работы инструментария продемонстрируем сходимость распределений некоторых функций от случайных величин к их предельным законам. Больше примеров, показывающих возможности инструментария, можно найти в [11, 103].

Для проверки принадлежности смоделированных эмпирических распределений $F_N(y)$ некоторым теоретическим законам использовались различные критерии согласия. В приводимых таблицах представлены результаты применения только критериев χ^2 Пирсона, Колмогорова, ω^2 Крамера–Мизеса–Смирнова (КМС), Ω^2 Андерсона–Дарлингга (АД).

Пример 5.6. Моделирование закона распределения функции

$$Y = \mu - \sigma \log \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}, \text{ где } X \in \text{Exp}(0,1).$$

Теоретическим законом распределения Y является логистический закон с параметрами μ и σ . В таблице 5.7 представлены значения p_{value} при проверке принадлежности смоделированных $F_N(y)$ логистическому закону.

Пример 5.7. Пусть $Y = X_1/X_2$, где $X_1 \in N(0, \sigma_1)$ и $X_2 \in N(0, \sigma_2)$ являются независимыми. Теоретическим законом распределения Y является распределение Коши с нулевым параметром сдвига и параметром масштаба σ_1 / σ_2 .

В таблице 5.8 приведены результаты проверки согласия полученных в результате моделирования эмпирических распределений $F_N(y)$ величины Y с соответствующим распределением Коши.

Таблица 5.7 – Результаты проверки согласия величины Y с логистическим распределением

μ	σ	Y	χ^2 Пирсона	ω^2 КМС	Колмогорова	Ω^2 АД
0	1	$Log(0,1)$	0.786	0.880	0.837	0.820
-1	0.5	$Log(-1,0.5)$	0.292	0.395	0.541	0.358
5	3	$Log(5,3)$	0.528	0.521	0.471	0.657
10	0.5	$Log(10,0.5)$	0.641	0.539	0.764	0.512
2.5	50	$Log(2.5,50)$	0.973	0.933	0.956	0.914

Таблица 5.8 – Результаты проверки согласия величины Y с распределением Коши

X_1	X_2	Y	χ^2 Пирсона	ω^2 КМС	Колмогорова	Ω^2 АД
$N(0,1)$	$N(0,1)$	$C(0,1)$	0.884	0.841	0.828	0.660
$N(0,1)$	$N(0,2)$	$C(0,0.5)$	0.804	0.962	0.982	0.142
$N(0,2)$	$N(0,1)$	$C(0,2)$	0.878	0.638	0.537	0.706
$N(0,3)$	$N(0,7)$	$C(0,0.428)$	0.828	0.829	0.804	0.902
$N(0,1.5)$	$N(0,10)$	$C(0,0.15)$	0.386	0.162	0.235	0.202
$N(0,10)$	$N(0,2)$	$C(0,5)$	0.659	0.966	0.974	0.965
$N(0,1)$	$N(0,20)$	$C(0,0.05)$	0.980	0.920	0.811	0.950

Значения p_{value} по всем критериям свидетельствуют об очень хорошем согласии полученного в результате моделирования эмпирического распределения с распределением Коши.

Пример 5.8. $Y = X_1/X_2$, где $X_1, X_2 \in N(1,1)$ и независимы. В этом случае законом распределения Y уже не является распределение Коши.

Оценивание параметров распределения Коши с плотностью $f(y) = C(\theta_1, \theta_2) = \frac{\theta_1}{\pi(\theta_1^2 + (y - \theta_2)^2)}$ по смоделированной выборке дает оценки максимального правдоподобия (ОМП) параметров масштаба $\theta_1 = 0.6962$ и сдвига $\theta_2 = 0.7536$.

Полученное в результате моделирования эмпирическое распределение $F_N(y)$ и аппроксимирующее распределение Коши представлены на рисунке 5.12 и существенно отличаются. Конечно, для $F_N(y)$ в рамках ISW можно подобрать более подходящую модель, чем распределение Коши.

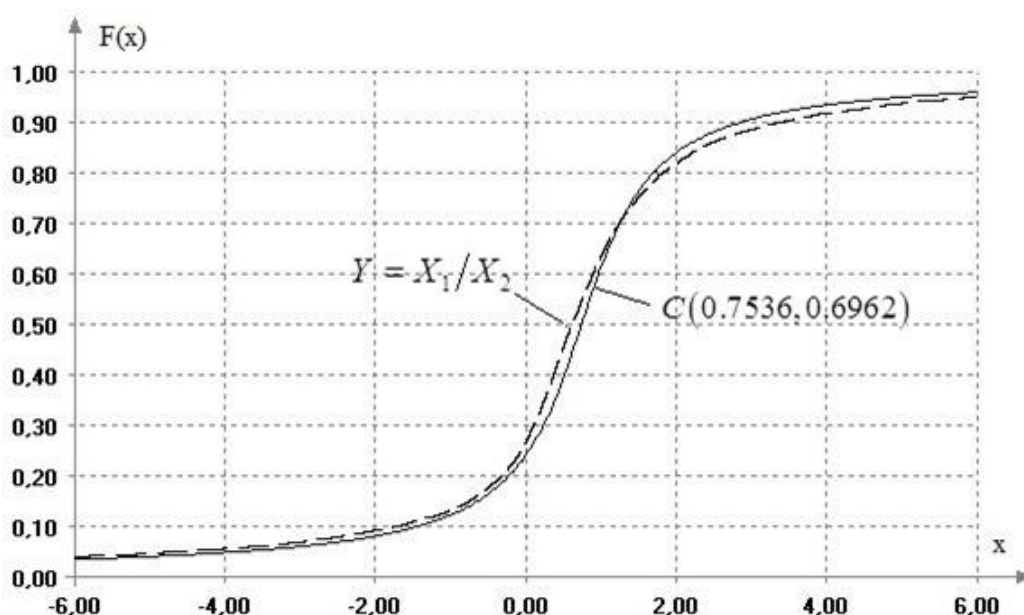


Рисунок 5.12 – Распределение $Y = X_1/X_2$ при $X_1, X_2 \in N(1,1)$

Пример 5.9. Это более общий случай, когда $Y = X_1/X_2$, а $X_1 \in N(\mu_1, \sigma_1)$ и $X_2 \in N(\mu_2, \sigma_2)$ независимы.

В таблице 5.9 приведены результаты проверки согласия смоделированных выборок для $F_N(y)$ с подобранными нормальными законами.

При равенстве дисперсий с ростом абсолютной величины μ_2 по сравнению с μ_1 распределение $F_N(y)$ стремится к нормальному закону. В случае существенного превышения параметра μ_2 над μ_1 ($\mu_1 < \mu_2$), как можно видеть, нормальный закон становится хорошей моделью для случайной величины Y .

При незначительном превышении μ_2 над μ_1 эмпирическое распределение имеет более тяжелый правый хвост. С ростом дисперсии X_2 распределение случайной величины Y начинает отклоняться от нормального закона. В этих же условиях при росте дисперсии X_1 по сравнению с дисперсией X_2 распределение Y хорошо аппроксимируется нормальным законом.

Таблица 5.9 – Результаты проверки согласия величины Y с нормальным распределением

Случайная величина	Y	χ^2 Пирсона	ω^2 КМС	Колмогорова	Ω^2 АД
$N(1,1)/N(10,1)$	$N(0.1,0.1)$	0	0	0	0
$N(1,1)/N(25,1)$	$N(0.04,0.04)$	0.001	0.067	0.054	0.004
$N(1,10)/N(25,1)$	$N(0.4,0.04)$	0.228	0.881	0.876	0.379
$N(1,1)/N(25,4)$	$N(0.04,0.04)$	0	0	0	0
$N(1,1)/N(37,1)$	$N(0.027,0.027)$	0.050	0.196	0.218	0.077
$N(1,1)/N(50,1)$	$N(0.02,0.02)$	0.617	0.699	0.818	0.683

На рисунке 5.13 представлен вид $F_N(y)$ в случае существенного превышения абсолютного значения μ_1 над μ_2 .

Если стандартные отклонения $\sqrt{D[X_i]}$ много меньше $E[X_i]$ и распределения X_i близки к нормальному закону, а такие ситуации не редки, то распределение $Y = X_1/X_2$ хорошо аппроксимируется нормальным законом. В таком случае и линеаризация $\varphi(\cdot)$ функции Y , часто используемая на практике, не приводит к большим погрешностям.

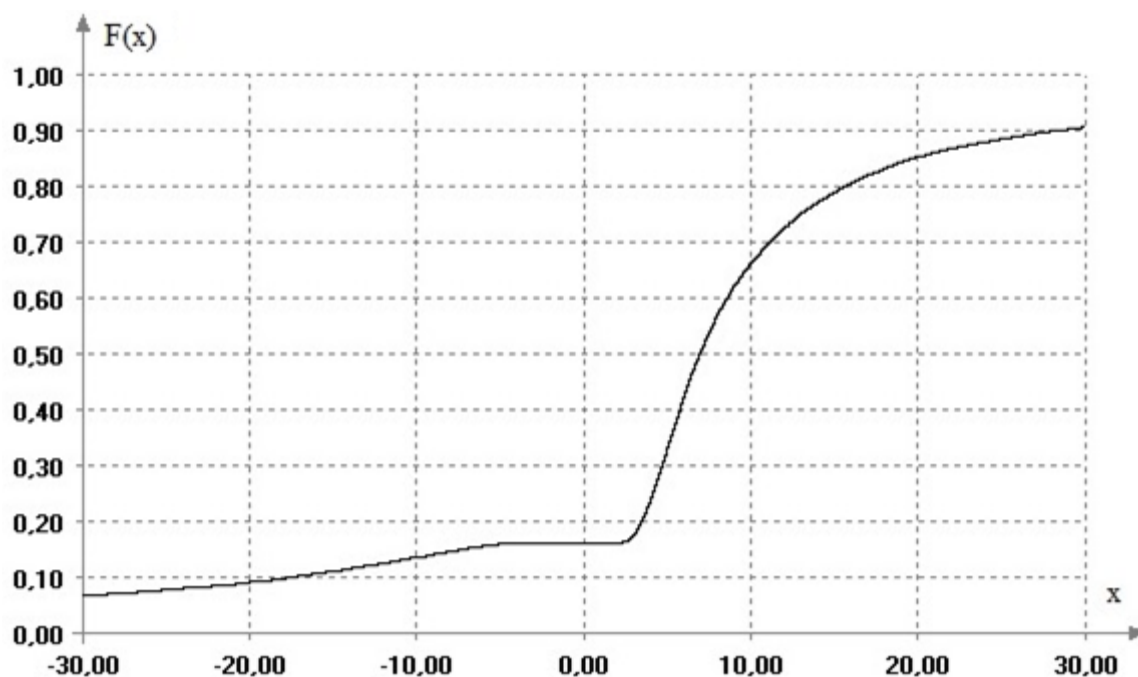


Рисунок 5.13 – Распределение $Y = X_1/X_2$ при $X_1 \in N(10,1)$, $X_2 \in N(1,1)$

Пример 5.10. Между бета-распределением 1 рода и гамма-распределением существует следующая связь:

$$n * B(k, n, 1, 0) \rightarrow \Gamma(k, 1, 0) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где k и n параметры формы законов распределения.

Исследуем данную сходимость на примере распределения случайной величины $n * B(2, n, 1, 0)$ при объеме выборок 1 660 000. Расстояния между теоретическим и реальным распределением приведены в таблице 5.10 и показаны на рисунке 5.14, демонстрирующем степенной тренд сходимости распределений в зависимости от n .

Таблица 5.10 – Расстояния между распределения величины $n * B(2, n, 1, 0)$ и $\Gamma(2, 1, 0)$

n	расстояние	n	расстояние	n	расстояние	n	расстояние
1	0.73576	5	0.17983	20	0.03654	75	0.01245
2	0.43541	8	0.11296	36	0.02548	80	0.01170
3	0.29635	10	0.09069	50	0.01846	90	0.01045
4	0.22374	16	0.05692	64	0.01451	99	0.0095

В данном случае можно прогнозировать, что гипотеза о согласии $n * B(2, n, 1, 0)$ с $\Gamma(2, 1, 0)$ не будет отклоняться при $d_2 > 500$.

Это свойство выполняется и для частного случая такой взаимосвязи: между гамма-распределением и экспоненциальным законом. В этом случае распределение случайной величины $n \cdot (1 - U(0,1)^{1/n})$, где $U(0,1)$ равномерная случайная величина на $(0,1)$, должна сходиться к экспоненциальному закону. Результаты проверки показаны в таблице 5.11 и на рисунке 5.15.

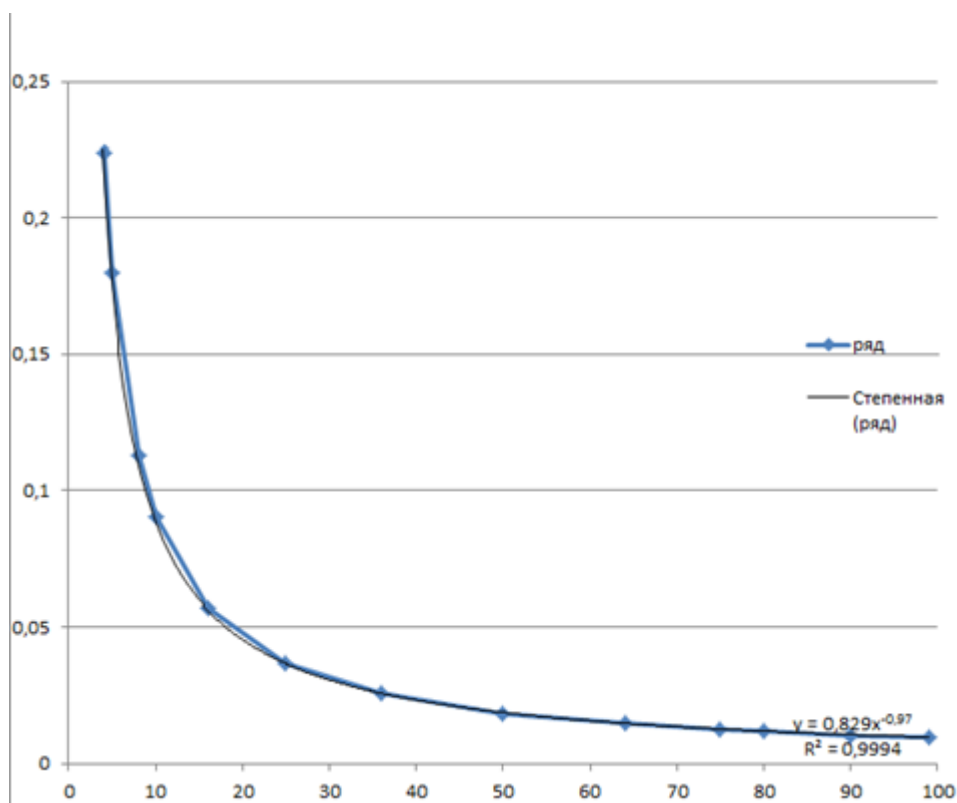


Рисунок 5.14 – Расстояния между распределения величины $n \cdot B(2, n, 1, 0)$ и $\Gamma(2, 1, 0)$

Таблица 5.11 – Достигнутые уровни значимости при проверке согласия величины $n \cdot (1 - U(0,1)^{1/n})$ с экспоненциальными законом распределения

n	χ^2 Пирсона	Колмогорова	ω^2 КМС	Ω^2 АД
250	0.000003	0.032	0.034	0.004
500	0.014	0.524	0.362	0.171
750	0.095	0.561	0.649	0.378
1000	0.749	0.552	0.878	0.942
1250	0.894	0.971	0.802	0.822

Результаты исследований показали широкие возможности разработанной подсистемы при исследовании законов распределения погрешностей косвенных измерений и построении их моделей.

Разработанное программное обеспечение является эффективным инструментом для исследования законов распределения различных функций от систем случайных величин. Широкий набор инструментов позволяет моделировать законы распределения достаточно сложных зависимостей, интересных для применения в приложениях.

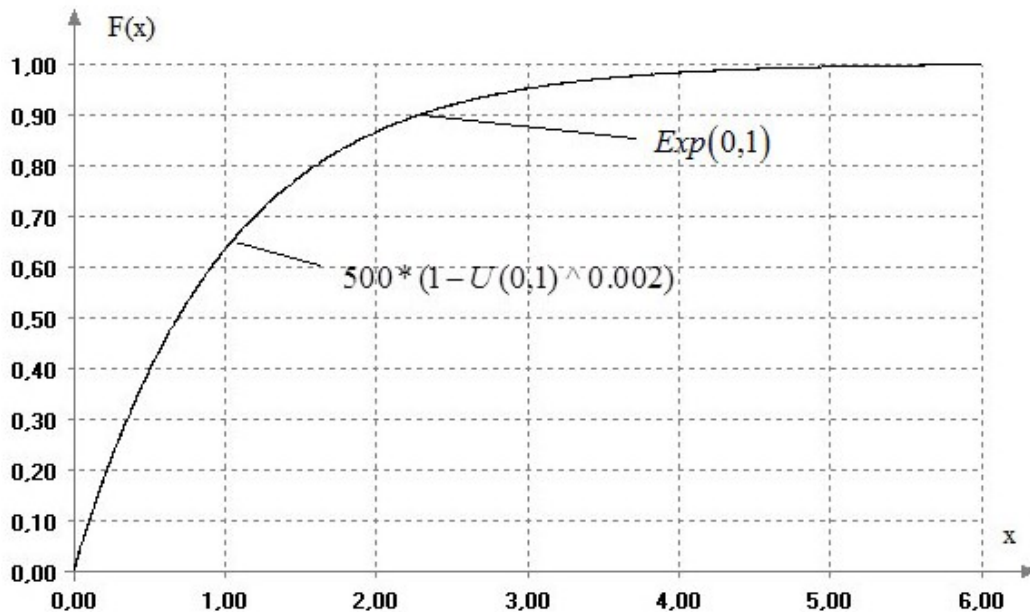


Рисунок 5.15 – Распределение $n * (1 - U(0,1)^{1/n})$ и экспоненциальное распределение при $n = 500$

5.3 Влияние округления на распределения статистик критериев

Вопросы применения статистических методов к анализу больших массивов данных (Big Data) в последние годы вызывают большой интерес. В приложениях всё чаще приходится сталкиваться с необходимостью анализа гигантских объёмов накапливаемых данных. Возникают потребности извлечения и использования закономерностей, в том числе вероятностных, скрытых в этих данных.

При попытках применения для анализа больших данных классического аппарата прикладной математической статистики, как правило, встречаются со специфическими проблемами, ограничивающими возможности их корректного применения. Например, сталкиваются с тем, что хорошо зарекомендовавшие себя методы и алгоритмы становятся неэффективными из-за “проклятия размерности”.

Одни популярные критерии проверки гипотез оказываются не приспособленными для анализа выборок даже порядка тысячи наблюдений. Другие, которые формально можно использовать при объёмах выборок $n \rightarrow \infty$, всегда приводят к отклонению даже справедливой проверяемой гипотезы H_0 . Такие проблемы характерны и для рассматриваемых в диссертации множеств критериев равномерности и показательности. И связаны они не только с ростом вычислительных затрат.

То, что информация о законе распределения $G(S|H_0)$ статистики критерия ограничена лишь узкими рамками таблицы критических значений, совсем не ограничивает возможность корректного применения критерия при объёмах выборок за рамками таблицы. Для этого достаточно лишь воспользоваться интерактивным режимом для моделирования и последующего использования $G_N(S_n|H_0)$.

В ISW при моделировании псевдослучайных (*непрерывных*) величин используются числа двойной точности (с плавающей точкой), что обеспечивает представление данных с 15–17 значимыми десятичными цифрами в диапазоне примерно от 10^{-308} до 10^{308} . Такая точность при моделировании позволяет, с одной стороны, подтвердить имеющиеся теоретические и асимптотические закономерности, а с другой – является критерием точности программной реализации соответствующего критерия, когда подтверждается соответствие $G_N(S_n|H_0)$ известному теоретическому закону $G(S|H_0)$.

Основная причина, препятствующая корректному применению множества классических критериев проверки статистических гипотез, заключается в следующем. Как правило, объёмы выборок в Big Data (принадлежащие некоторому непрерывному закону распределения) практически неограничены, но сами данные представлены с ограниченной точностью (округлены с некоторым Δ). По сути, “нарушается предположение” о том, что наблюдается непрерывная случайная величина.

Допустим, для критерия существует предельное распределение статистики $G(S|H_0)$. Эмпирическое распределение $F_n(x)$, соответствующее выборке непрерывных случайных величин (без округления), при $n \rightarrow \infty$ сходится к функции распределения $F(x)$ этой случайной величины. Эмпирическое распределение $G_N(S_n|H_0)$ статистики, строящейся по выборке непрерывной случайной величины при $n \rightarrow \infty$ (и $N \rightarrow \infty$) сходится к предельному $G(S|H_0)$.

Пусть теперь наблюдаемые данные округляются с некоторым Δ . Тогда, начиная с некоторого n , зависящего от вида $F(x)$, от области определения случайной величины и от Δ , $\max|F_n(x) - F(x)|$ перестанет уменьшаться, а распределение $G_N(S_n|H_0)$ – станет с ростом n отклоняться от предельного $G(S|H_0)$ (чем больше Δ , тем при меньшем n).

В работе [136] такая ситуация продемонстрирована на непараметрических критериях согласия Колмогорова, Крамера–Мизеса–Смирнова и Андерсона–Дарлинга в условиях проверки простых и сложных гипотез. Для того, чтобы при использовании соответствующих критериев для вычисления p -value можно было использовать предельное распределение статистики $G(S|H_0)$ рекомендуется из Big Data для анализа извлекать выборки ограниченного объема, в случае которого при имеющейся степени округления Δ распределение статистики реально практически не отличается от $G(S|H_0)$. Вышесказанное относится и к рассматриваемым в работе критериям равномерности и показательности.

Описанная проблема имеет место не только в случае анализа выборок очень большого объёма. Она типична для многих задач, возникающих в приложениях, когда данные (измерения) фиксируются с существенной степенью округления, из-за чего в выборках оказывается относительно много повторяющихся наблюдений. В таких ситуациях реальные распределения $G(S_n|H_0)$ статистик критериев (при данной степени округления Δ) могут быть далёкими от предельных $G(S|H_0)$ распределений и существенно отличающимися от $G(S_n|H_0)$, имеющими место в

ситуации без округления измерений. Возможность корректного применения критерия в такой ситуации решается моделированием распределения статистики $G_N(S_n|H_0)$ критерия при Δ и n , соответствующих условиям получения анализируемых данных, что и реализуется в ISW.

Ниже на конкретных примерах проиллюстрируем, как меняются распределения $G(S|H_0)$ статистик некоторых применяемых критериев равномерности и показательности в зависимости от Δ при различных n .

Пример 5.11. Рассмотрим отклонения распределений статистик $G_N^\Delta(S_n|H_0)$ некоторых критериев равномерности и показательности, имеющих место при степени округления Δ , от распределений $G_N(S_n|H_0)$ тех же статистик, но в случае без округления моделируемых псевдослучайных величин. В качестве мер отклонения рассмотрим расстояние Колмогорова $\sqrt{n}D_n$, разность оценок медиан и разность оценок средних соответствующих эмпирических распределений, полученных без округления и при соответствующем округлении моделируемых псевдослучайных величин. Положительные значения рассматриваемых разностей при соответствующем Δ свидетельствуют о сдвиге $G_N^\Delta(S_n|H_0)$ вправо от $G_N(S_n|H_0)$. Равномерность исследовалась на интервале $[0,1]$, а при проверке показательности псевдослучайные величины моделировались по экспоненциальному закону с параметром масштаба 1. Эксперименты осуществлялись для объема выборок $n=2000$ и количестве имитационных экспериментов $N=16600$.

Результаты экспериментов представлены в таблице 5.12 и позволяют судить о том, как сильно соответствующая степень округления влияет на изменение распределения статистики соответствующего критерия.

Судя по результатам, отраженным в таблице 5.12, в рассматриваемой ситуации округление при $\Delta=0.0001$ и $\Delta=0.001$, а иногда даже при $\Delta=0.01$, не приводит к “катастрофическому” отклонению $G_N^\Delta(S_n|H_0)$ от $G_N(S_n|H_0)$. Но при большей степени округления ситуация существенно меняется.

В частности, на рисунках 5.16 и 5.17 показаны распределения $G_N^\Delta(S_n|H_0)$ статистик критерия показательности Дешпанде (с параметром $b=0.1$) и применяемого для проверки равномерности критерия согласия Андерсона–Дарлинга в случае выборок объемом $n=2000$ с округлением наблюдений до третьего знака, полученные при количестве имитационных экспериментов $N=1660000$. Как можно судить по рисункам, распределения данных статистик практически совпадают со своими предельными распределениями даже с округлением $\Delta=0.001$.

Таблица 5.12 – Оценки расхождения распределений статистик с округлениями и без округления

Критерий мера	Критерий равномерности Фросини (2.20)			Критерий показательности Фросини (3.4)		
	Расстояние Колмогорова	Разница медиан	Разница средних	Расстояние Колмогорова	Разница медиан	Разница средних
$\Delta=0.1$	1.03233555	0.86166039	0.841953479	0.45707151	0.38528391	0.376159751
$\Delta=0.01$	0.05144244	0.01765653	0.019037722	0.01937573	0.00762851	0.007882255
$\Delta=0.001$	0.00122148	0.00017048	0.000255063	0.00047633	0.00010023	8.73052E-05
$\Delta=0.0001$	0.00009783	0.00000278	4.48069E-06	0.00005115	0.00000322	1.20256E-06
Критерий мера	Модификация Андерсона-Дарлинга (2.35)			Критерий показательности Эпса-Палли (3.12)		
	Расстояние Колмогорова	Разница медиан	Разница средних	Расстояние Колмогорова	Разница медиан	Разница средних
$\Delta=0.1$	16.36574363	15.31282889	15.31561628	0.40796108	0.19294650	0.19424952
$\Delta=0.01$	0.31123275	0.22902155	0.230243582	0.03991339	0.00053510	0.002028778
$\Delta=0.001$	0.01270161	0.00371048	0.003302553	0.00360283	0.00020065	2.37809E-05
$\Delta=0.0001$	0.00199489	0.00008336	3.35223E-05	0.00040878	0.00007085	7.18444E-09
Критерий мера	Критерий Неймана-Бартона N_2 (2.26)			Критерий показ-ти Дешпанде $b=0.1$ (3.22)		
	Расстояние Колмогорова	Разница медиан	Разница средних	Расстояние Колмогорова	Разница медиан	Разница средних
$\Delta=0.1$	13.32232554	0.85807196	1.118075854	1.66859057	0.85204759	0.856649974
$\Delta=0.01$	0.24495381	0.00467778	0.001575545	0.14517723	0.06153291	0.067243356
$\Delta=0.001$	0.03626857	0.00067355	1.47007E-06	0.01566752	0.00555944	0.005605407
$\Delta=0.0001$	0.00342427	0.00005128	1.50936E-07	0.00296925	0.00069493	0.000642
Критерий мера	Критерий Неймана-Бартона N_3 (2.26)			Критерий показ-ти Дешпанде $b=0.3$ (3.22)		
	Расстояние Колмогорова	Разница медиан	Разница средних	Расстояние Колмогорова	Разница медиан	Разница средних
$\Delta=0.1$	12.58697887	1.15180683	1.394200929	0.73152183	0.54745561	0.548997281
$\Delta=0.01$	0.37930408	0.00069039	0.004617342	0.05357196	0.02140446	0.019496772
$\Delta=0.001$	0.04384790	0.00009344	0.000128309	0.01137112	0.00541192	0.005364211
$\Delta=0.0001$	0.00580987	0.00003427	4.58503E-06	0.00206748	0.00030404	0.000339485
Критерий мера	Критерий Неймана-Бартона N_4 (2.26)					
	Расстояние Колмогорова	Разница медиан	Разница средних			
$\Delta=0.1$	64.54687136	20.80552447	21.64499338			
$\Delta=0.01$	0.52902594	0.01697047	0.01297486			
$\Delta=0.001$	0.07055880	0.00056038	0.000195544			
$\Delta=0.0001$	0.00911566	0.00007280	8.65136E-06			

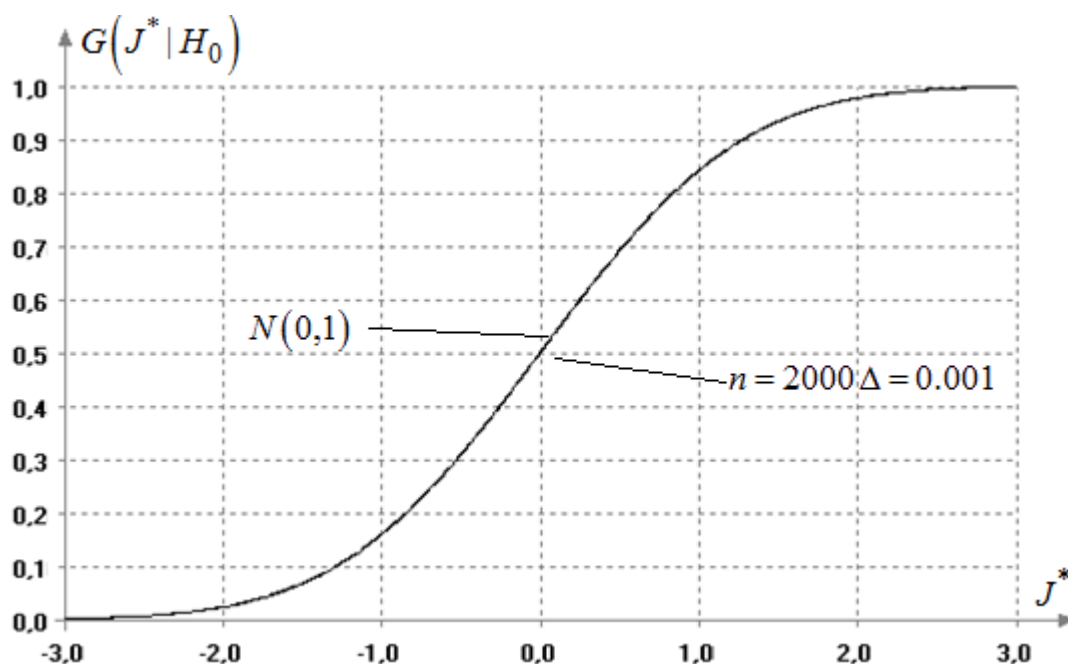


Рисунок 5.16 – Распределение статистики критерия Дешпанде $b = 0.1$ при $n = 2000$ и $\Delta = 0.001$ и его предельное распределение

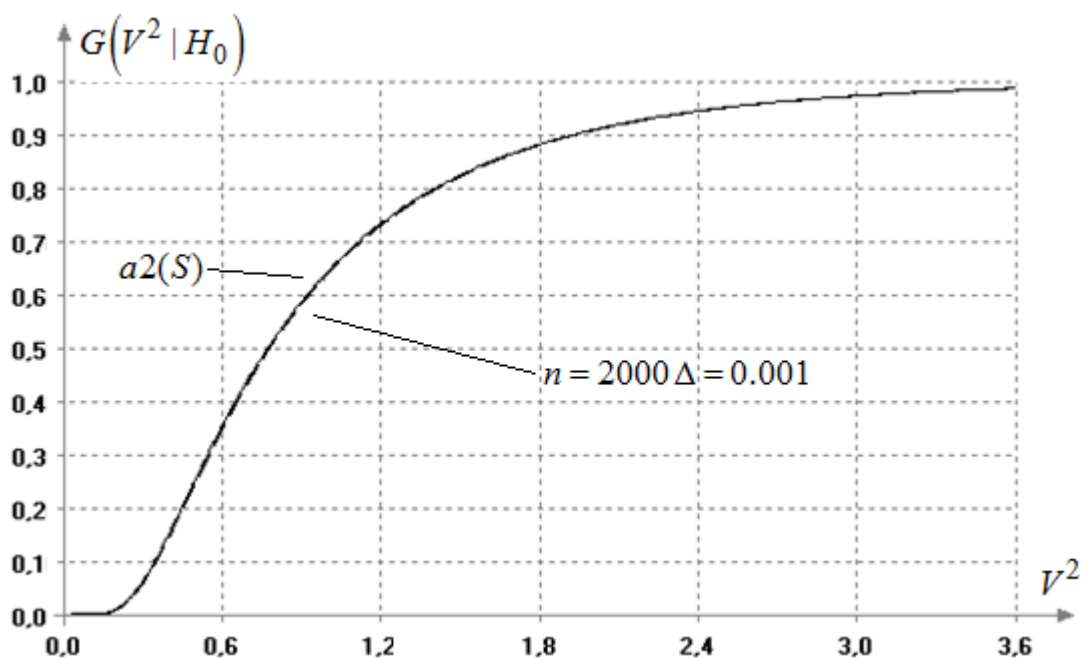


Рисунок 5.17 – Распределение статистики критерия Андерсона-Дарлинга при $n = 2000$ с округлением $\Delta = 0.001$ и его предельное распределение

Пример 5.11 показывает, что округление данных при измерениях может влиять на распределения статистик критериев. Степень округления Δ измерений наблюдаемых случайных величин, как правило, определяется характеристиками измерительных устройств. А степень округления, влияющая на распределение

статистики $G(S_n|H_0)$ критерия, зависит от вида закона $F(x)$ этой случайной величины и её области определения. При той же погрешности измерений (степени округления Δ) в одной ситуации измерения некоторой (непрерывной) величины оказываются (будут считаться) очень точными, а в другой – очень грубыми. Далее на примере некоторых критериев, используемых для проверки гипотезы о принадлежности выборки показательному закону, демонстрируется, как влияет на распределения статистик степень округления измеряемых величин.

Распределения статистики $G(B_n|H_0)$ критерия Фросини, используемого для проверки показательности, зависят от объёма выборки и представлены лишь таблицами критических значений для некоторых значений n . Критерий правосторонний. В случае округления наблюдаемых значений (измерений) непрерывной случайной величины распределения статистики $G(B_n|H_0)$ (а следовательно, и критические значения) могут существенно отклоняться от имеющих место в классической ситуации. На рисунке 5.18 показаны распределения $G(B_n|H_0)$ статистики критерия Фросини, имеющие место без округления наблюдаемых величин, а также при округлении с $\Delta = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$ (в случае принадлежности выборок стандартному экспоненциальному закону с параметром масштаба 1) при $n = 100$. Очевидно, что, если использовать “классические” критические значения, существенно возрастает вероятность ошибки 1-го рода (отклонения справедливой гипотезы H_0). Как видно на рисунке, распределения статистик при различных степенях округления Δ значительно отличаются друг от друга.

Теперь на примере уже упомянутого критерия показательности Дешпанде (с параметром $b = 0.1$) покажем, как сильно меняются распределения статистики критерия при ограниченных объёмах выборок и значительной степени округления, в результате чего в выборках оказываются повторяющиеся значения наблюдений. На рисунке 5.19 представлены распределения статистики Дешпанде для объёмов выборок $n = 10, 20, 30, 40, 50$ при $\Delta = 1$.

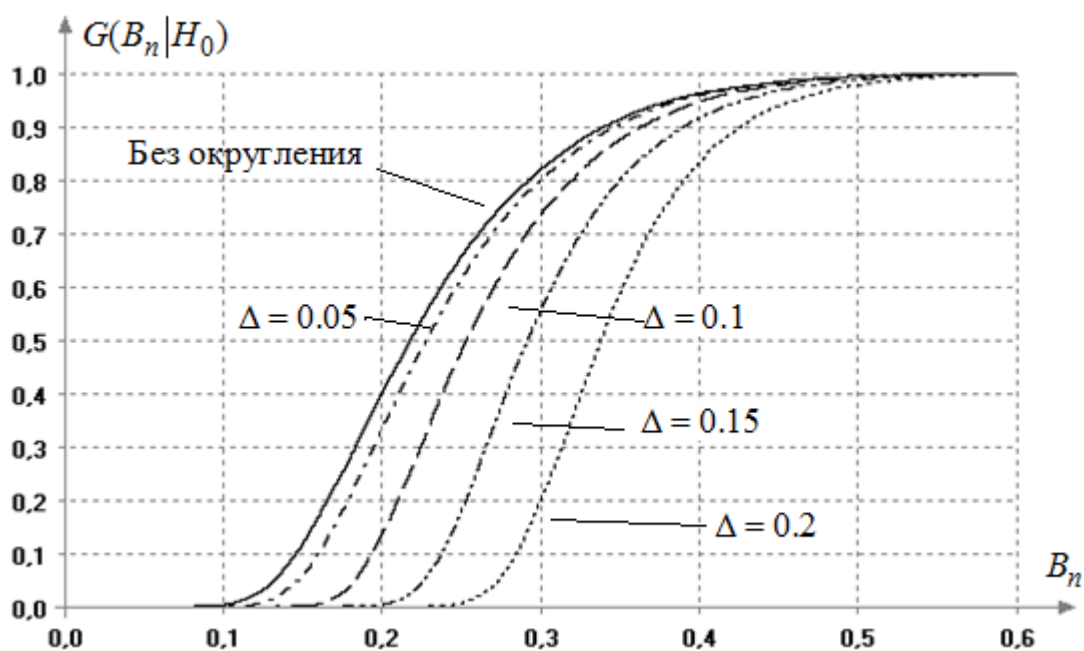


Рисунок 5.18 – Распределение статистики Фросини при различных Δ

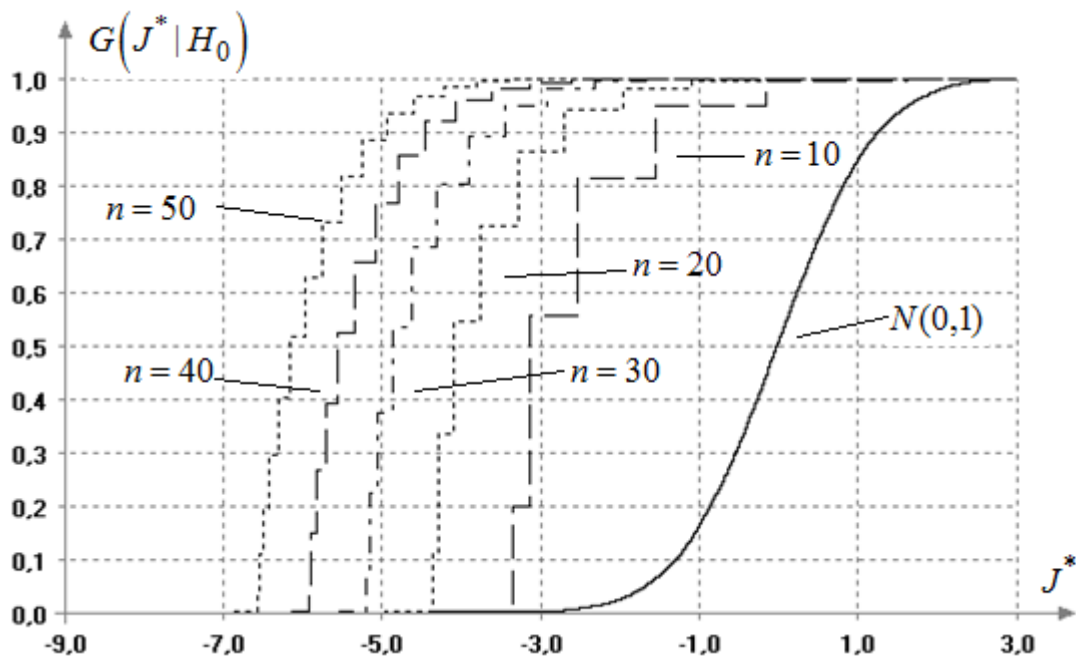


Рисунок 5.19 – Распределения статистики Дешпанде при $\Delta = 1$ и различных n

Рассмотрим аналогичную ситуацию для модифицированной статистики Андерсона-Дарлинга при проверке гипотезы о равномерности и степени округления $\Delta = 0.1$. Проверим, будет ли распределение $G(V_n^2 | H_0)$ статистики критерия с ростом объемов выборок n сходиться к предельному закону $a_2(S)$. На рисунке 5.20 показаны распределения статистики критерия при объемах выборок $n = 100, 200, 300, 500, 1000$.

Как видим, при $\Delta = 0.1$ с ростом n распределения статистики $G(V_n^2 | H_0)$ все дальше отклоняются от своего предельного распределения. Очевидно, что использование предельного распределения в такой ситуации при проверке гипотезы по данному критерию абсолютно исключено.

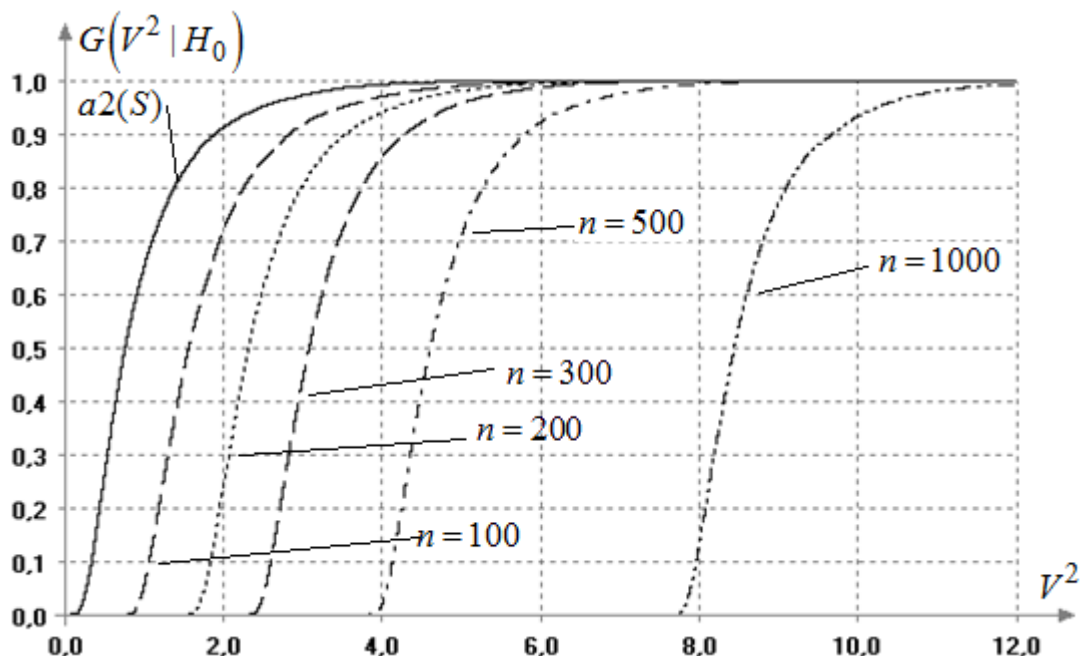


Рисунок 5.20 – Распределения модифицированной статистики Андерсона-Дарлинга при $\Delta = 0.1$ и различных объемах выборок n

Как видим, ограниченная точность измерений или регистрации данных является общей причиной, лежащей в основе проблем, препятствующих корректному применению критериев проверки статистических гипотез к анализу Big Data или к анализу выборок ограниченного объема, но с существенной степенью округления, приводящей к ограниченному множеству возможных значений и большому количеству повторяющихся наблюдений в выборках.

В ситуации анализа Big Data возможность использования предельных распределений статистик критериев (в случае наличия последних) разрешается достаточно просто. Для этого достаточно, исходя из имеющей место степени округления Δ реальных данных, оценить тот максимальный объем выборки n_{\max} , извлекаемой из Big Data, при котором распределение статистики критерия при справедливости проверяемой гипотезы еще (практически) не будет отличаться от

предельного. И для анализа Big Data извлекать выборки такого объёма. В частности, оценить n_{\max} можно с использованием средств, реализованных в ISW [137] для рассматриваемых в диссертации критериев.

Во второй ситуации, когда степень округления при ограниченных объёмах выборок исключает возможность использования предельных распределений или существующих таблиц критических значений, решение заключается в нахождении методами статистического моделирования эмпирического распределения $G_N^\Delta(S_n | H_0)$ статистики критерия при заданных n и Δ , и использовании этого распределения для формирования вывода о результате проверки гипотезы. Для рассматриваемых в диссертации критериев такая возможность также реализована в ISW. Более того, предполагается реализовать возможность исследования $G_N^\Delta(S_n | H_0)$ в интерактивном режиме.

Таким образом, разработанное в рамках выполнения диссертационных исследований программное обеспечение позволяет разрешить проблемы с корректностью применения рассматриваемых критериев, как в ситуации анализа больших выборок, так и в случае выборок, представленных измерениями со значительной степенью округления.

Выводы по главе

В данном разделе кратко описаны фрагменты программного обеспечения, реализованного в рамках программной системы ISW. В частности, реализованы подсистемы, направленные на исследование распределений статистик множества критериев равномерности, распределений статистик множества критериев показательности, направленные на применение этих групп критериев при анализе данных в различных приложениях.

Для критериев, информация о распределениях статистик которых ограничена лишь таблицами критических значений, реализован интерактивный режим моделирования (с применением распределённых вычислений) неизвестных распределений статистик, что позволяет далее по полученным эмпирическим

распределениям статистик вычислять достигнутый уровень значимости (p-value). Это даёт возможность формировать более обоснованные статистические выводы при использовании критериев.

Приведено описание разработанной подсистемы, позволяющей моделировать законы распределения для различных функций от случайных величин. Приводятся примеры использования. Показано, что методы статистического моделирования в совокупности с программным обеспечением, позволяющим строить приближенные математические модели для полученных эмпирических распределений (в том числе в виде смесей различных параметрических законов), представляют собой эффективный инструмент для изучения законов распределения функций от случайных величин и для исследования вероятностных закономерностей.

Демонстрируются возможности программного обеспечения для анализа проблем, возникающих в случае применения критериев проверки статистических гипотез к большим массивам данных (Big Data). Показывается, что проблемы применения связаны не столько с ростом вычислительных затрат, сколько с ограниченной точностью регистрации (с округлением) данных, хранимых в Big Data. С этой же проблемой округления связаны неприятности применения критериев при ограниченных объёмах выборок с большим числом повторяющихся (вследствие округления или низкой точности измерения) значений. Показывается, что эти проблемы могут быть устранены при использовании в процессе проверки реальных распределений статистик критериев, имеющих место при данных объёмах выборок n и степени округления Δ , соответствующей анализируемым данным. Такая возможность реализована в разработанном программном обеспечении, и может быть реализована в интерактивном режиме.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы могут быть сформулированы следующим образом:

1. Методами статистического моделирования исследованы свойства множества специальных критериев, ориентированных на проверку равномерности. Показаны достоинства и недостатки отдельных критериев. Исследована сходимость распределений статистик, имеющих место при справедливости проверяемой гипотезы, к предельным распределениям. Расширены таблицы процентных точек. Сформулированы рекомендации по выбору оконного параметра у энтропийных критериев проверки равномерности.

2. Методами статистического моделирования исследована мощность множества специальных критериев, а также критериев согласия, используемых для проверки равномерности, относительно некоторых близких конкурирующих гипотез. Отмечена смещенность ряда специальных критериев и некоторых критериев согласия относительно близких конкурирующих гипотез с законами, функции распределения которых пересекают функцию распределения равномерного закона.

3. Проведен сравнительный анализ мощности множества критериев, используемых для проверки равномерности. Подготовлены рекомендации по применению критериев, учитывающие наличие альтернатив того или иного вида.

4. Методами статистического моделирования исследованы свойства некоторых специальных критериев, ориентированных на проверку гипотезы о принадлежности выборок показательному закону распределения. Исследована сходимость распределений статистик, имеющих место при справедливости проверяемой гипотезы, к предельным распределениям. Расширены таблицы процентных точек. Показаны достоинства и недостатки отдельных критериев.

5. Исследована мощность рассмотренных критериев показательности относительно ряда конкурирующих законов с различными формами функции интенсивности отказов.

6. Проведен сравнительный анализ мощности множества критериев, используемых для проверки показательности. Сделаны рекомендации по применению критериев, учитывающие наличие альтернатив того или иного вида.

7. Разработано программное обеспечение, позволяющее исследовать распределения статистик рассмотренных критериев равномерности и показательности, осуществлять проверку гипотез с использованием данных критериев с вычислением достигнутого уровня значимости p_{value} , в том числе, в условиях отсутствия предельных (асимптотических) распределений $G(S|H_0)$ статистик критериев.

8. Разработано программное обеспечение, позволяющее с использованием статистического моделирования исследовать законы распределения функций от случайных величин, подчиняющихся различным законам распределения.

9. Разработанное программное обеспечение, ориентированное на исследование распределений статистик рассмотренных критериев, на использование этих критериев для проверки соответствующих статистических гипотез, а также ориентированное на исследование статистических закономерностей, связанных с функциями от случайных величин, встроено в программную систему «Интервальная статистика» ISW.

Полученные результаты и разработанное программное обеспечение используются в учебном процессе факультета прикладной математики и информатики в рамках курса «Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей» для студентов, обучающихся по направлению подготовки 010400 — прикладная математика и информатика.

Результаты и программное обеспечение используются при проведении научных исследований, используются метрологическими НИИ при статистическом анализе измерений, связанных с различными задачами метрологического обеспечения, что подтверждается соответствующими актами.

Разработанное программное обеспечение зарегистрировано в Федеральной службе по интеллектуальной собственности (свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015663326 и 2018666213).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Anderson T. W.* Asymptotic theory of certain «Goodness of fit» criteria based on stochastic processes / T. W. Anderson. D. A. Darling // AMS – 1952. – Vol. 23. – P. 193–212.
2. *Anderson T. W.* A test of goodness of fit / T. W. Anderson. D. A. Darling // J. Amer. Statist. Assoc. – 1954. – Vol. 29. – P. 765–769.
3. *Asher S.* A survey if tests for exponentiality // Communications in Statistics: Theory and Methods. – 1990. – V. 19. – No. 5. – P.1811-1825.
4. *Bartlett M. S.* The problem in statistics of testing several variances // Proc. Camb.Phil. SOL, SO, 164-169, 1934.
5. *Bartlett M. S.* Properties of sufficiency and statistical tests // Proc. Roy. Sot., Series A, 160, 268-282, 1937.
6. *Bartholomew D.J.* Note on the use of Sherman’s statistics as a test for randomness // D.J. Bartholomew // Biometrika. – 1954. – V. 41. – No. 4. – P.556-558.
7. *Biometrica* tables for Statistics / ed.: E. S. Pearson. H. O. Hartley. – Cambridge: University Press. 1972. – Vol. 2. – 385 pp.
8. *Blinov P.Yu., Lemeshko B.Yu.* A Review of the Properties of tests for Uniformity // 2014 12th International Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE) 34006 Proceedings. Vol. 1. Novosibirsk. 2014. –P.540-547.
9. *Blinov P.Yu., Lemeshko B.Yu.* The Comparative Analysis of Tests in the Problem of Testing the Hypothesis of Uniformity // Proceedings of the International Workshop “Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric Approach” – AMSA’2015. Novosibirsk–Belokuricha. Russia. 14-19 September. 2015. –P. 92-100.
10. *Blinov P.Yu., Lemeshko B.Yu.* The comparative analysis of some uniformity tests // Proceedings 2016 11th International Forum on Strategic Technology (IFOST). June 1-3. 2016. Novosibirsk. Russia. Part 1. –P. 342-346. IEEE Catalog Number CFP16786-PRT. ISBN 978-1-5090-0853-7. ISBN 978-5-7782-2917-4 (Part 1)

11. *Blinov P.Yu., Lemeshko B.Yu.* The simulation system and research of functions random variables // 2016 International Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering (APEIE) 39281 Proceedings. Vol.1. Part 2. Novosibirsk. 2016. –P.203-209.
12. *Blinov P.Yu., Lemeshko B.Yu.* Powers of Some Tests for Exponentiality // Proceedings of the International Workshop "Applied Methods of Statistical Analysis. Nonparametric methods in Cybernetics and system Analysis". 18-22 September 2017. Krasnoyarsk. – P.173-180.
13. *Burrows P.M.* Selected percentage points of Greenwood's statistics // JRSS. Sec. A. – 1979. – V. 142. – No. 2. – P.256-258.
14. *Cheng R. C. H., Thornton K. M.* Selected percentage points of the Moran statistic // Journal of Statistical Computation and Simulation. – 1988. – V.30. – No. 3. – P.189-194.
15. *Cheng S. W.* A test to Identify the uniform distribution with applications / S. W. Cheng. F. A. Spiring // IEEE Trans. Reliability. – 1987. – V. R-36. – P. 98-105.
16. *Correa J. C.,* A new estimator of entropy // Communications in Statistics – Theory and Methods. 1995. – V.24. No.10. – C. 2436-2446.
17. *Cressie N.* Power results for tests based on high order gaps // Biometrika. – 1978. – V.65. – P.214–218.
18. *Cressie N.* An optimal statistic based on higher order gaps // Biometrika. – 1979. – V.66. – P. 619–627.
19. *David F. N.* On Neyman's "smooth" test for goodness-of-fit / F. N. David // Biometrika. – 1939. – V.31. – P. 191-199.
20. *Deshpande J.V.* A Class of tests for exponentiality against increasing failure rate average alternatives // J.V. Deshpande // Biometrika. – 1983. – V. 70. – No. 2. – P.514-518.
21. *Dipankar (Bandyopadhyay) B.* A note on tests for exponentiality by Deshpande // B. Dipinkar. A.P. Basu // Biometrika. – 1989. – V. 76. – No. 2. – P.403-405.

22. *Dudewics E. J., van der Meulen E. C.* Entropy-based test of uniformity // *J. Amer. Statist. Assoc.* – 1981. – V.76. No. 376. – P. 967-974.
23. *Durbin. J.* Some methods of constructing exact tests // *Biometrika.* – 1961. – V. 48. – No. 1. – P.41-55.
24. *Ebrahimi N., Pflughoeft K., Soofi E.S.* Two measures of sample entropy // *Statistics & Probability Letters.* – 1995. – V. 20. – P. 225-234.
25. *Engelhardt M.E.* Uniformly more powerful unbiased tests for the parameters of the gamma distribution // *M.E. Engelhardt, L.J. Bain // Theory and Applications of Reliability.* – V.1. – N.Y.: Acad. Press. – P.307-314.
26. *Epps T.W.* A test of exponentiality vs. monotone-hazard alternatives from the empirical characteristics function // *T.W. Epps. L.B. Pulley // JRSS. Sec. B.* – 1986. – V. 48. – No. 2. – P.206-216.
27. *Epstein B.* Tests for validity if the assumption that the underlying distribution of life the exponential (part 1) // *Technometrics.* – 1960. – V. 2. – No. 1. – P.83-101.
28. *Epstein B.* Tests for validity if the assumption that the underlying distribution of life the exponential (part 2) // *Technometrics.* – 1960. – V. 2. – No. 2. – P.167-183.
29. *Frosini B.V.* On the distribution and power of a goodness-of-fit statistic with parametric and nonparametric application. “Goodness-of-fit”/Ed. By Reverz P., Sarkadi K., Sen P.K.// *Amdstedam-Oxford-New York: North-Holland. Publ. Comp., 1987.* P.133-154.
30. *Gail M.H.* A scale-free goodness-of-fit test for exponential distribution based on Gini statistic. // *M.H. Gail. J.L. Gastwirth // JRSS. Sec. B.* – 1978. – V. 40. – No. 3. – P.350-357.
31. *Gardner J.K., Knopoff L.* Is the sequence of earthquakes in Southern California. with aftershocks removed. Poissonian? // *Bulletin of the Seismological Society of America.* October 1974. Vol. 64. pp. 1363-1367.

32. *Greenwood P. E.* A guide to chi-squared testing / P. E. Greenwood. M. S. Nikulin. – New York: John Wiley & Sons. 1996. – 280 pp.
33. *Greenwood V.* The statistical study of Infection disease / V. Greenwood // J. R. Statist. Soc. – 1946. – Ser. A. V.109. – P. 257-261.
34. *Hegazy Y. A. S.* Some new goodness-of-fit tests using order statistics / Y. A. S. Hegazy. J. R. Green // Applied Statistics. – 1975. – V.24. №3. – P. 299-308.
35. *Hollander M.* Testing whether new is better than used // M. Hollander. F. Proshan //AMS – 1972. – V. 43. – No. 4. – P.1136-1146.
36. *Kalbfleisch J.D., Prentice R.L.* The Statistical Analysis of Failure Time Data. 2nd ed. Hoboken. New Jersey: Wiley-Interscience. 2002. 462 pp.
37. *Keating J.P.* Testing hypothesis about the shape parameter of gamma distribution // J.P. Keating, R.E. Glaser, N.S. Ketchum // Technometrics. – 1990. – V. 32. – No. 1. – P.67-82.
38. *Kimball B. F.* Some basic theorems for developing tests of fit for the case of the non-parametric probability distribution function. / B. F. Kimball // The Annals of Mathematical Statistics. – 1947. – V.18. №1. – P. 540-548.
39. *Kimber A.C.* Tests for exponential. Weibull and Gumbel distribution based on the stabilized probability plot // A.C. Kimber // Biometrika. – 1985. – V. 72. – No. 3. – P.661-663.
40. *Klimko L. A.* Upper bounds for the power of Invariant tests for the exponential distribution with Weibull alternatives // L.A. Klimko. C.E. Antle. A.W. Radermaker. H.E. Rockette // Technometrics. – 1975. – V. 17. – No. 3. – P.357-360.
41. *Kochar S.C.* Testing exponentiality against monotone failure rate average // S.C. Kochar // Communications in Statistics: Theory and Methods. – 1985. – V. 76. – No. 2. – P.381-392.
42. *Kolmogoroff A. N.* Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione / A. N. Kolmogoroff // G. Ist. Ital. attuar. – 1933. – Vol. 4. – № 1. – P. 83–91.

43. *Kuiper N.H.* Tests concerning random points on a circle / N. H. Kuiper // Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Van Wetenschappen. – 1960. Series A – V. 63. – P.38-47.
44. *Kumganbayev M. Sh., Voinov V.G.* A derivation of the probability function for modified Greenwood's statistic and testing the uniformity// The Indian Journal of Statistics. – 1990. Series A – V. 52. – P.91-102.
45. *Lawless J.F.* Statistical models and methods for lifetime data. – N.Y.: J. Welley. – 1982.
46. *Lemeshko B. Yu.* The power of goodness of fit tests for close alternatives / B. Yu. Lemeshko. S. B. Lemeshko. S. N. Postovalov // Measurement Techniques. – 2007. – Vol. 50. № 2. – P. 132–141.
47. *Lemeshko B. Yu.* Statistical modeling as an effective instrument for investigating the distribution laws of function of random quantities / B. Yu. Lemeshko. D. V. Ogurtsov // Measurement Techniques. – 2007. – Vol. 50. № 6. – P. 593–600.
48. *Lemeshko B. Yu.* Comparative Analysis of the Power of Goodness-of-Fit Tests for Near Competing Hypotheses. I. The Verification of Simple Hypotheses / B. Yu. Lemeshko. S. B. Lemeshko. S. N. Postovalov // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2009. – Vol. 3. № 4. – P. 462–475.
49. *Lemeshko B. Yu.* Comparative analysis of the power of goodness-of-fit tests for near competing hypotheses. II. Verification of complex hypotheses / B. Yu. Lemeshko. S. B. Lemeshko. S. N. Postovalov // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2010. – Vol. 4. № 1. – P. 79–93.
50. *Lemeshko B. Yu.* Real-Time Studying of Statistic Distributions of Non-Parametric Goodness-of-Fit Tests when Testing Complex Hypotheses / B. Yu. Lemeshko. S.B. Lemeshko. A. P. Rogozhnikov // Proceedings of the International Workshop “Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference” – AMSA'2011. Novosibirsk. Russia. 20-22 September. 2011. – P. 19-27.
51. *Lemeshko B. Yu.* Application of nonparametric goodness-of-fit tests for composite hypotheses in case of unknown distributions of statistics / A. A.

- Gorbunova. B. Yu. Lemeshko. S. B. Lemeshko. A. P. Rogozhnikov // Applied methods of statistical analysis. Applications in survival analysis. reliability and quality control – AMSA'2013. Novosibirsk. 25–27 Sept. 2013: proc. of the intern. workshop. – Novosibirsk: NSTU publ., 2013. – P. 8-24.
52. *Lemeshko B.Yu.* Application and Power of the Nonparametric Kuiper, Watson, and Zhang Tests of Goodness-of-Fit / B. Yu. Lemeshko. A. A. Gorbunova // Measurement Techniques. – 2013. – Vol. 56. No. 5. – P.465-475.
53. *Lemeshko B. Yu.* Application of nonparametric Kuiper and Watson tests of goodness-of-fit for composite hypotheses / B. Yu. Lemeshko. A. A. Gorbunova // Measurement Techniques. – 2013. – Vol. 56. – № 9. – P.965-973.
54. *Lemeshko B. Yu.* Solving problems of using some nonparametric goodness-of-fit tests / A. A. Gorbunova. S. B. Lemeshko. A. P. Rogozhnikov // Optoelectronics. Instrumentation and Data Processing. – 2014. – Vol. 50. № 1. – P.21-35.
55. *Lemeshko B. Yu.* Interactive investigation of statistical regularities in testing composite hypotheses of goodness of fit / B. Yu. Lemeshko. S. B. Lemeshko. A. P. Rogozhnikov // Statistical Models and Methods for Reliability and Survival Analysis: monograph. – Wiley-ISTE. 2013. – Chap. 5. – P. 61–76.
56. *Lemeshko B. Yu., Blinov P.Yu., Lemeshko S.B.* Goodness-of-Fit Tests for Uniformity of Probability Distribution Law // Optoelectronics. Instrumentation and Data Processing. March 2016. Volume 52. Issue2. –P. 128-140.
57. *Lemeshko B. Yu., Blinov P.Yu., Lemeshko S.B.* Bias of nonparametric goodness-of-fit tests relative to certain pairs of competing hypotheses // Measurement Techniques. Vol. 59. No. 5. August. 2016. –P.468-475.
58. *Lemeshko B. Yu., Blinov P.Yu.* Comparative Analysis of the Criteria for Checking the Hypothesis of Uniformity of Law //Measurement Techniques. 2017. Vol. 59. № 10.P. 1034-1041.
59. *Marhuenda Y., Morales D., Pardo M.C.* A comparison of uniformity tests // Statistics. – 2005. – V. 39. No. 4. – P. 315-327.

60. *Michael J.R.* The stabilized probability plot // J.R. Michael // *Biometrika*. – 1983. – V. 70. – No. 3. – P.11-17.
61. *Miller F.L.* Statistics for testing uniformity on the unit interval. Institute of Statistics Mimeograph Series № 983. Raleigh. –1974 –87 pp.
62. *Moran P. A. P.* The random division of an intervals / P. A. P. Moran // *J. R. Statist. Soc.* – 1947. – Ser. B. V.9. No. 1. – P. 92-98.
63. *Moran P. A. P.* The random division of an intervals. II / P. A. P. Moran // *J. R. Statist. Soc.* – 1951. – Ser. B. V.13. No. 2. – P. 147-150.
64. *Neyman J.* “Smooth” tests for goodness-of-fit / J. Neyman // *Scandinavisk Aktuarietidskrift*. – 1937. – V.20. – P. 149-199.
65. *Nikitin Ya. Yu.* Bahadur efficiency of test of exponentiality based on a loss-of-memory type functional equation // *Journal of nonparametric statistics*. – 1996. – V. 6. No. 1. – P. 13–26.
66. *Nikitin Ya. Yu., Volkova K. Yu.* Efficiency of exponentiality tests based on a special property of exponential distribution // *Mathematical methods of statistics*. – 2016. – V. 25. No. 1. – P. 54–66.
67. *Noughabi H. A., Noughabi R. A.* On the entropy estimators // *Journal of Statistical Computation and Simulation*. – 2013. – V. 83. No. 4. – P. 84–792.
68. *O`Reilly F. J.* Characterization and goodness-of-fit tests / F. J. O`Reilly. M. A. Stephens // *J. R. Statist. Soc.* – 1982. – Ser. B. V.44. No. 3. – P. 353-360.
69. *Pardo M. C.* A test for uniformity based on informational energy // *Statistical Papers*. – 2003. – V.44. – P. 521–534.
70. *Pham H.* Handbook of Reliability Engineering. 1st ed. London: Springer. 2003. 704 pp.
71. *Quesenberry C. P.* Power studies of some tests for uniformity. / C. P. Quesenberry. F. L. Miller // *Journal of Statistical Computation and Simulation*. – 1977. – V.5. – P. 169-191.

72. *Quesenberry C. P.* Power studies of some tests for uniformity, II. / C. P. Quesenberry. F. L. Miller // Communications in Statistics – Simulation and Computation. – 1979. – V.8. – P. 271-290.
73. *Rahman M., Pearson L.M., Heien H.C.* A Modified Anderson-Darling Test for Uniformity// Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society. Second Series. Vol 29. P. 11-16.
74. *Rahman M.* Tests for exponentiality: A comparative study // M. Rahman. Han Wu // American Journal of Applied Mathematics and Statistics. – 2017. – V. 5. – No. 4. – P.125 -135.
75. *Shannon C. E.* A mathematical theory of communications / C. E. Shannon // Bell System Technical Journal. – 1948. – V.27. – P. 379-423. 623-656.
76. *Shapiro S. S.* An analysis of variance test for the exponential distribution (complete samples) // S. S. Shapiro. M. B. Wilk // Technometrics. – 1972. – V. 14. – No. 2. – P.355-370
77. *Sherman B.* A random variable related to the spacing of sample values / B. Sherman // The Annals of Mathematical Statistics. – 1950. – V.21. №3. – P. 339-361.
78. *Sherman B.* Percentiles of the ω_n statistic // AMS – 1957. – V. 28. – No. 1. – P.257-261.
79. *Spinelli J.J.* Tests for exponentiality when origin and scale parameters are unknown // J.J. Spinelli. M.A. Stephens // Technometrics. – 1987. – V. 29. – No. 4. – P.471-476.
80. *Stephens M.A.* On the W test for exponentiality with origin known // M.A. Stephens // Technometrics. – 1978. – V. 20. – No. 1. – P.353-357.
81. *Stephens M.A.* Further percentage points of Greenwood's statistics // JRSS. Sec. A. – 1981. – V. 141. – No. 2. – P.364-366.
82. *Stephens M. A.* Use of Kolmogorov–Smirnov, Cramer – von Mises and related statistics – without extensive table / M. A. Stephens // J. R. Stat. Soc. – 1970. – B. 32. – P. 115–122.

83. *Stephens M. A.* EDF statistics for goodness of fit and some comparisons / M. A. Stephens // J. Am. Statist. Assoc. – 1974. – Vol. 69. – No. 347. – P. 730–737.
84. *Stephens M. A.* Tests for uniformity arising from a series of events. Technical report № 400. Department of statistics, Standford university: Standford, California. – 1988. –23 pp.
85. *Swartz T.* Goodness-of-fit tests using Kullback–Leibler information // Communications in Statistics – Theory and Methods. – 1992. – V.21. – P.711–729.
86. *Tanaka S.* Approximate formula of coefficient of variation for Weibull distribution // S. Tanaka. M. Ichikawa //Reability Engineering. – 1983. –V. 4. – No. 3. – P.141-143.
87. *Tchirina A.V.* Bahadur efficiency and local optimality of a test for exponentiality based on Moran statistics // Journal of Mathematical Sciences. – 2005. –V. 127. – No. 1. – P.1812-1819.
88. *Vasicek O.* A test of normality based on sample entropy // J. R. Statist. Soc., Ser. B. – 1976. – V.38. No. 1. – P. 54-59.
89. *Volkova K. Yu.* On asymptotic efficiency of exponentiality tests based on Rossberg’s characterization// Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – V. 167. No. 4. – P. 486–494.
90. *Watson G. S.* Goodness-of-fit tests on a circle. I. / G. S. Watson // *Biometrika*. – 1961. – V. 48. – No. 1-2. – P.109-114.
91. *Watson G. S.* Goodness-of-fit tests on a circle. II. / G. S. Watson // *Biometrika*. – 1962. – V. 49. – No. 1-2. – P.57- 63.
92. *Young D. L.* The linear nearest neighbour statistic / D. L. Young // *Biometrika*. – 1982. – V.69. №2. – P. 477-480.
93. *Yousefzadeh F., Arghami N. R.* Testing exponentiality based on type II censored data and a new cdf estimator // Communications in Statistics – Simulation and Computation. – 2008. – V.37. – P. 1479-1499.

94. *Zamanzade E., Arghami N. R.* Testing normality based on new entropy estimators // *Journal of Statistical Computation and Simulation.* – 2012. – V.82. – No. 11. – P.1701-1713.
95. *Zamanzade E.* Testing uniformity based on new entropy estimators // *Journal of Statistical Computation and Simulation.* – 2014.
96. *Zhang J.* Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests. Toronto: PhD Thesis. York University. 2001.
97. *Zhang J.* Powerful goodness-of-fit tests based on the likelihood ratio / *J. Zhang* // *Journal of the Royal Statistical Society: Series B.* – 2002. – V. 64. – № 2. – P.281-294.
98. *Zhang J.* Likelihood-ratio tests for normality / *J. Zhang, Yu. Wub* // *Computational Statistics & Data Analysis.* – 2005. – V. 49. – No. 3. – P.709-721.
99. *Zhang J.* Powerful Two-Sample Tests Based on the Likelihood Ratio / *J. Zhang* // *Technometrics.* – 2006. – V. 48. – No. 1. – P.95-103.
100. *Блинов П. Ю., Лемешко Б. Ю.* О мощности критериев, используемых для проверки гипотез о принадлежности выборок равномерному закону // *Материалы Российской НТК “Обработка информационных сигналов и математическое моделирование”.* Новосибирск. 2013. – С.35-38.
101. *Блинов П. Ю., Лемешко Б. Ю.* Обзор свойств критериев равномерности // *Труды XII международной конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения” АПЭП-2014.* Т.6. Новосибирск. 2014. – С.29-36.
102. *Блинов П.Ю.* Исследование мощности критерия Корреа при проверке равномерности / *П.Ю. Блинов*// *Наука. Технологии. Инновации: сб. науч. тр.: в 9 ч., Новосибирск. 1–5 дек. 2015 г. –Новосибирск: Изд-во НГТУ. 2015. –Ч. 2. –С. 3–5.*
103. *Блинов П.Ю., Лемешко Б.Ю.* Система имитационного моделирования и исследования функций от случайных величин // *Труды XIII международной конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения” АПЭП-2016.* Т.8. Новосибирск. 2016. –С.13-19.

104. *Блинов П.Ю., Лемешко Б.Ю.* О мощности модификации критерия проверки равномерности Андерсона-Дарлинга= The power of modified Anderson-Darling test for uniformity testing// Обработка информации и математическое моделирование: материалы Рос. науч.-техн. конф. *Новосибирск. 21–22 апр. 2016 г. – Новосибирск: СибГУТИ. 2016. –С. 18–26
105. *Блинов П.Ю., Лемешко Б.Ю.* Сравнительный анализ некоторых критериев проверки показательности = The comparative analysis of some exponential tests // Обработка информации и математическое моделирование: материалы Рос. науч.-техн. конф. [Новосибирск. 25–26 апр. 2017 г.]. – Новосибирск: СибГУТИ. 2017. – С. 6–13.
106. *Большев Л. Н.* Таблицы математической статистики / Л. Н. Большев. Н. В. Смирнов. – М.: Наука. 1983. – 416 с.
107. *Большев Л. Н.* Асимптотические пирсоновские преобразования / Л. Н. Большев // Теория вероятностей и ее применение. – 1963. – Т. 8. № 2. – С. 129–155.
108. *Большев Л. Н.* Теория вероятностей и математическая статистика: избр. тр. / Л. Н. Большев; под ред. Ю. В. Прохорова. – М.: Наука. 1987. – 286 с.
109. *Волкова К. Ю., Никитин Я.Ю.* Критерии экспоненциальности, основанные на характеристике Ахсануллаха, и их эффективность. // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова. – РАН, 2013. – Т. 412. – № 19. – С. 69–87.
110. *Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.* Математические методы в теории надежности / Б.В. Гнеденко. Ю.К. Беляев. А.Д. Соловьев — М.: Наука. 1965. – 816 с
111. *Денисов В. И.* Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Ч. I. Критерии типа χ^2 : метод. реком. / В. И. Денисов. Б. Ю. Лемешко. С. Н. Постовалов. – Новосибирск: Изд-во НГТУ. 1998. – 126 с.

112. *Денисов В. И.* Оптимальное группирование при обработке экспериментальных данных / В. И. Денисов, Б. Ю. Лемешко // Измерительные информационные системы. – Новосибирск, 1979. – С. 5–14.
113. *Денисов В. И.* Оптимальное группирование, оценка параметров и планирование регрессионных экспериментов. В 2 ч. / В. И. Денисов, Б. Ю. Лемешко, Е. Б. Цой; Новосиб. гос. техн. ун-т. – Новосибирск, 1993. – 346 с.
114. *Зорина А.А., Лемешко Б.Ю.* О некоторых критериях проверки показательности = About some exponential tests // Обработка информации и математическое моделирование: материалы Рос. науч.-техн. конф. [Новосибирск. 25–26 апр. 2017 г.]. – Новосибирск: СибГУТИ. 2017. – С. 33–39.
115. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов. М.: "Мир". 1971. — 537 с.
116. *Кобзарь А. И.* Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / А. И. Кобзарь. – М: ФИЗМАТЛИТ. 2006. – 816 с.
117. *Козлова А.В.* Исследование распределений статистик и мощности непараметрических критериев согласия. предложенных Jin Zhang / А. В. Козлова. Б. Ю. Лемешко // Материалы Российской НТК “Информатика и проблемы телекоммуникаций”. Новосибирск. – 2007. – Т. 1. – С.136-39.
118. *Лемешко Б. Ю.* Асимптотически оптимальное группирование наблюдений – это обеспечение максимальной мощности критериев / Б. Ю. Лемешко // Надежность и контроль качества. – 1997. – № 8. – С. 3–14.
119. *Лемешко Б. Ю.* Асимптотически оптимальное группирование наблюдений в критериях согласия / Б. Ю. Лемешко // Завод. лаб. – 1998. – Т. 64. №1. – С. 56–64.
120. *Лемешко Б. Ю.* Максимизация мощности критериев типа χ^2 / Б. Ю. Лемешко. Е. В. Чимитова // Докл. СО АН высш. шк. – Новосибирск. 2000. – № 2. – С. 53–61.
121. *Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н.* Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей: Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ. 2004. – 120 с.

122. Лемешко Б. Ю. Мощность критериев согласия при близких альтернативах / Б. Ю. Лемешко. С. Б. Лемешко. С. Н. Постовалов // Измерительная техника. 2007. № 2. – С.22-27.
123. Лемешко Б. Ю. Распределения статистик непараметрических критериев согласия при проверке гипотез относительно бета-распределений / Б. Ю. Лемешко. С. Б. Лемешко // ДАН ВШ России. 2007. № 2(9). – С. 6-16.
124. Лемешко Б. Ю. Статистическое моделирование как эффективный инструмент для исследования законов распределения случайных величин/ Б. Ю. Лемешко. Д. В. Огурцов// Метрология. – 2007. – № 5. – С. 3–13.
125. Лемешко Б. Ю. Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких конкурирующих гипотезах. I. Проверка простых гипотез / Б. Ю. Лемешко. С. Б. Лемешко. С. Н. Постовалов // Сиб. журн. индустр. математики. – 2008. – Т. 11. № 2(34). – С. 96–111.
126. Лемешко Б. Ю. Сравнительный анализ мощности критериев согласия при близких альтернативах. II. Проверка сложных гипотез / Б. Ю. Лемешко. С. Б. Лемешко. С. Н. Постовалов // Сиб. журн. индустр. математики. – 2008. – Т. 11. № 4(36). – С. 78–93.
127. Лемешко Б. Ю. Статистический анализ данных. моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход: монография / Б. Ю. Лемешко. С. Б. Лемешко. С. Н. Постовалов. Е. В. Чимитова. – Новосибирск: Изд-во НГТУ. 2011. – 888 с.
128. Лемешко Б. Ю. О применении и мощности непараметрических критериев согласия Купера, Ватсона и Жанга / Б. Ю. Лемешко. А. А. Горбунова // Измерительная техника. – 2013. – № 5. – С.3-9.
129. Лемешко Б. Ю. Применение непараметрических критериев согласия Купера и Ватсона при проверке сложных гипотез / Б. Ю. Лемешко. А. А. Горбунова // Измерительная техника. – 2013. – № 9. – С.14-21.
130. Лемешко Б. Ю. О решении проблем применения некоторых непараметрических критериев согласия / Б. Ю. Лемешко. А. А. Горбунова. С. Б. Лемешко. А. П. Рогожников // Автометрия. – 2014. – Т.50. – № 1. – С.26-43.

131. *Лемешко Б. Ю.* Непараметрические критерии согласия: Руководство по применению / Б. Ю. Лемешко. – М.: НИЦ ИНФРА-М. 2014. – 163 с.
132. *Лемешко Б.Ю., Блинов П.Ю.* Критерии проверки отклонения распределения от равномерного закона. Руководство по применению: Монография / Б.Ю. Лемешко. П.Ю. Блинов. – М.: НИЦ ИНФРА-М. 2015. – 183с. – (Научная мысль).
133. *Лемешко Б.Ю.* Критерии проверки отклонения распределения от нормального закона. Руководство по применению: Монография / Б.Ю. Лемешко. П.Ю. Блинов. –М: ИНФРА-М. 2015.– 160 с. – (Научная мысль).
134. *Лемешко Б.Ю., Блинов П.Ю., Лемешко С.Б.* Смещённость непараметрических критериев согласия относительно некоторых пар конкурирующих гипотез // Измерительная техника. 2016. № 5. –С. 16-20.
135. *Лемешко Б.Ю., Блинов П.Ю., Лемешко С.Б.* О критериях проверки равномерности закона распределения вероятностей // Автометрия. 2016. 52. № 2. –С. 28-42.
136. *Лемешко Б. Ю. Лемешко С.Б., Семёнова М.А.* К вопросу статистического анализа больших данных // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2018. – № 44
137. Программа статистического анализа одномерных случайных величин ISW [Электронный ресурс] <https://ami.nstu.ru/~headrd/ISW.htm> (дата обращения 18.08.2018)
138. *Рогожников А.П., Лемешко Б.Ю.* Обзор критериев показательности // Материалы XI международной конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения” АПЭП-2012. Т.6. Новосибирск. 2012. – С.47-55.
139. *Рогожников А.П.* Исследование свойств некоторых критериев проверки статистических гипотез и обеспечение корректности их применения методами компьютерного моделирования: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук: 05.13.17. – Новосибирск: НГТУ. 2012. – 162с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А ТАБЛИЦЫ ПРОЦЕНТНЫХ ТОЧЕК СТАТИСТИК КРИТЕРИЕВ РАВНОМЕРНОСТИ

Таблица А.1 – Критические значения статистики (2.1) критерия равномерности Шермана

n	$1-\alpha$					n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99		0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
4	0.416	0.440	0.468	0.509	0.589	16	0.406	0.418	0.433	0.456	0.498
5	0.416	0.436	0.462	0.502	0.574	17	0.405	0.417	0.431	0.453	0.495
6	0.415	0.434	0.458	0.494	0.563	18	0.404	0.416	0.430	0.451	0.492
7	0.415	0.432	0.454	0.488	0.551	19	0.404	0.415	0.429	0.449	0.489
8	0.414	0.430	0.451	0.482	0.542	20	0.403	0.414	0.427	0.448	0.486
9	0.412	0.428	0.448	0.478	0.535	30	0.398	0.407	0.418	0.435	0.466
10	0.411	0.426	0.445	0.474	0.528	40	0.395	0.403	0.412	0.427	0.454
11	0.410	0.424	0.443	0.470	0.521	50	0.393	0.400	0.408	0.421	0.445
12	0.409	0.423	0.440	0.466	0.516	100	0.386	0.391	0.397	0.406	0.423
13	0.408	0.422	0.438	0.463	0.510	150	0.383	0.387	0.392	0.399	0.413
14	0.407	0.420	0.436	0.460	0.506	200	0.381	0.385	0.389	0.395	0.407
15	0.407	0.419	0.434	0.458	0.502	300	0.379	0.382	0.385	0.390	0.400

Таблица А.2 – Критические значения статистики (2.4) критерия равномерности Кимбелла

n	$1-\alpha$					n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99		0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
2	0.263	0.304	0.358	0.437	0.557	15	0.071	0.077	0.086	0.101	0.139
3	0.223	0.252	0.295	0.367	0.506	16	0.067	0.073	0.081	0.095	0.129
4	0.192	0.216	0.250	0.309	0.440	17	0.064	0.069	0.076	0.089	0.121
5	0.168	0.188	0.216	0.265	0.381	18	0.060	0.065	0.072	0.084	0.114
6	0.149	0.166	0.190	0.232	0.333	19	0.057	0.062	0.068	0.080	0.107
7	0.133	0.148	0.168	0.205	0.293	20	0.055	0.059	0.065	0.075	0.101
8	0.120	0.133	0.151	0.183	0.260	30	0.037	0.040	0.043	0.049	0.063
9	0.110	0.121	0.137	0.165	0.234	40	0.028	0.030	0.032	0.036	0.045
10	0.101	0.111	0.125	0.150	0.210	50	0.022	0.024	0.025	0.028	0.035
11	0.093	0.102	0.115	0.137	0.191	100	0.011	0.012	0.012	0.013	0.015
12	0.087	0.095	0.106	0.126	0.176	150	0.0073	0.0076	0.0079	0.0084	0.0096
13	0.081	0.088	0.098	0.116	0.161	200	0.0055	0.0056	0.0058	0.0062	0.0069
14	0.076	0.082	0.092	0.108	0.149	300	0.0036	0.0037	0.0038	0.0040	0.0043

Таблица А.3 – Критические значения статистики (2.5) критерия равномерности Морана

n	$1-\alpha$					n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99		0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
3	0.472	0.502	0.545	0.617	0.756	16	0.126	0.132	0.140	0.154	0.188
4	0.392	0.416	0.450	0.509	0.640	17	0.119	0.124	0.132	0.145	0.177
5	0.334	0.355	0.383	0.432	0.547	18	0.113	0.118	0.125	0.137	0.166
6	0.291	0.308	0.332	0.374	0.476	19	0.107	0.112	0.118	0.129	0.157
7	0.258	0.273	0.293	0.330	0.418	20	0.102	0.107	0.113	0.123	0.149
8	0.231	0.244	0.262	0.294	0.371	30	0.069	0.072	0.075	0.081	0.096
9	0.210	0.221	0.237	0.265	0.334	40	0.052	0.054	0.056	0.060	0.070
10	0.192	0.202	0.216	0.240	0.301	50	0.042	0.043	0.045	0.048	0.054
11	0.176	0.185	0.198	0.220	0.275	100	0.0210	0.0215	0.0220	0.0230	0.0253
12	0.163	0.171	0.183	0.203	0.253	150	0.0140	0.0142	0.0145	0.0150	0.0162
13	0.152	0.159	0.170	0.188	0.233	200	0.0104	0.0106	0.0108	0.0111	0.0118
14	0.142	0.149	0.158	0.175	0.216	300	0.0069	0.0070	0.0071	0.0073	0.0077
15	0.134	0.140	0.148	0.164	0.201						

Таблица А.4 – Критические значения статистики (2.6) критерия равномерности Морана 2

n	$1-\alpha$					n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99		0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
3	2.770	3.162	3.698	4.589	6.579	18	13.196	13.984	15.023	16.652	19.971
4	3.545	3.980	4.573	5.547	7.681	19	13.849	14.658	15.723	17.380	20.756
5	4.290	4.769	5.410	6.462	8.705	20	14.499	15.326	16.417	18.114	21.587
6	5.019	5.528	6.213	7.316	9.684	21	15.157	16.005	17.110	18.836	22.359
7	5.741	6.281	7.008	8.170	10.638	22	15.804	16.669	17.794	19.560	23.159
8	6.445	7.013	7.768	8.979	11.545	23	16.457	17.339	18.489	20.262	23.922
9	7.144	7.741	8.534	9.803	12.480	24	17.104	18.000	19.168	20.984	24.673
10	7.834	8.458	9.285	10.592	13.358	25	17.742	18.658	19.844	21.692	25.444
11	8.515	9.161	10.010	11.366	14.201	30	20.961	21.944	23.233	25.215	29.210
12	9.191	9.858	10.745	12.153	15.071	40	27.316	28.436	29.884	32.115	36.573
13	9.870	10.562	11.476	12.910	15.916	50	33.585	34.821	36.415	38.860	43.719
14	10.543	11.255	12.195	13.673	16.745	100	64.431	66.127	68.306	71.612	78.113
15	11.203	11.939	12.903	14.422	17.569	150	94.824	96.869	99.496	103.460	111.119
16	11.873	12.628	13.615	15.173	18.373	200	124.966	127.296	130.297	134.832	143.549
17	12.539	13.316	14.329	15.914	19.187	300	184.842	187.676	191.296	196.771	207.32

Таблица А.5 – Критические значения статистики (2.9) критерия Ченга-Спиринга

n	1- α									
	0.8		0.85		0.9		0.95		0.99	
	W ₁	W ₂	W ₁	W ₂	W ₁	W ₂	W ₁	W ₂	W ₁	W ₂
3	6.300	7.974	6.224	7.985	6.149	7.993	6.075	7.998	6.015	7.99993
4	3.738	5.316	3.605	5.374	3.448	5.433	3.243	5.494	2.978	5.543
5	2.581	4.010	2.506	4.088	2.420	4.179	2.309	4.293	2.129	4.427
6	2.007	3.222	1.954	3.301	1.891	3.400	1.801	3.537	1.651	3.739
7	1.651	2.697	1.607	2.769	1.554	2.863	1.479	3.005	1.347	3.244
8	1.404	2.316	1.367	2.383	1.321	2.470	1.255	2.606	1.146	2.858
9	1.222	2.024	1.190	2.087	1.150	2.169	1.093	2.297	0.9998	2.548
10	1.084	1.791	1.056	1.850	1.021	1.928	0.972	2.048	0.889	2.287
11	0.975	1.602	0.950	1.657	0.920	1.729	0.876	1.842	0.802	2.070
12	0.887	1.448	0.864	1.497	0.837	1.564	0.798	1.671	0.731	1.886
13	0.814	1.319	0.794	1.364	0.769	1.425	0.734	1.524	0.673	1.727
14	0.753	1.210	0.735	1.251	0.712	1.307	0.680	1.398	0.624	1.589
15	0.700	1.118	0.684	1.155	0.663	1.206	0.633	1.290	0.582	1.469
16	0.655	1.037	0.640	1.071	0.621	1.118	0.593	1.195	0.546	1.363
17	0.615	0.967	0.601	0.999	0.583	1.042	0.558	1.113	0.514	1.268
18	0.581	0.906	0.567	0.935	0.551	0.975	0.527	1.040	0.486	1.186
19	0.550	0.852	0.537	0.878	0.522	0.915	0.500	0.976	0.461	1.111
20	0.522	0.803	0.510	0.828	0.496	0.862	0.475	0.919	0.439	1.045
21	0.497	0.760	0.486	0.783	0.473	0.815	0.453	0.867	0.419	0.986
22	0.475	0.720	0.464	0.742	0.451	0.772	0.433	0.821	0.400	0.931
23	0.454	0.685	0.444	0.705	0.432	0.733	0.415	0.779	0.384	0.881
24	0.435	0.653	0.426	0.672	0.415	0.698	0.398	0.742	0.369	0.837
25	0.418	0.623	0.409	0.641	0.398	0.666	0.383	0.706	0.355	0.797
30	0.349	0.507	0.343	0.521	0.334	0.540	0.322	0.570	0.300	0.639
40	0.264	0.368	0.259	0.377	0.253	0.389	0.245	0.408	0.230	0.451
50	0.213	0.288	0.209	0.294	0.205	0.303	0.198	0.316	0.187	0.345
100	0.109	0.136	0.108	0.138	0.106	0.141	0.103	0.145	0.099	0.155
150	0.074	0.089	0.073	0.090	0.072	0.091	0.071	0.093	0.068	0.098
200	0.056	0.066	0.055	0.066	0.055	0.067	0.054	0.069	0.052	0.072
300	0.038	0.043	0.037	0.043	0.037	0.044	0.037	0.045	0.035	0.046

Таблица А.6 – Критические значения статистик (2.12-2.15) критерия равномерности Хегazi-Грина

n	$1-\alpha$							
	0.85				0.9			
	T_1	T_1^*	T_2	T_2^*	T_1	T_1^*	T_2	T_2^*
3	0.2528	0.3229	0.0755	0.1439	0.2802	0.3455	0.0906	0.1671
8	0.1574	0.1701	0.0322	0.0407	0.1750	0.1868	0.0393	0.0490
10	0.1411	0.1499	0.0263	0.0317	0.1569	0.1651	0.0320	0.0382
18	0.1054	0.1088	0.0151	0.0167	0.1173	0.1206	0.0184	0.0203
20	0.1000	0.1029	0.0136	0.0150	0.1114	0.1141	0.0166	0.0182
30	0.0817	0.0832	0.0092	0.0098	0.0910	0.0924	0.0112	0.0119
38	0.0727	0.0737	0.0073	0.0077	0.0809	0.0819	0.0089	0.0094
40	0.0708	0.0718	0.0070	0.0073	0.0790	0.0799	0.0085	0.0089
50	0.0634	0.0641	0.0056	0.0058	0.0706	0.0713	0.0068	0.0071
78	0.0507	0.0510	0.0037	0.0037	0.0565	0.0568	0.0045	0.0045
100	0.0448	0.0451	0.0028	0.0029	0.0500	0.0502	0.0034	0.0035
150	0.0366	0.0367	0.0019	0.0019	0.0408	0.0409	0.0023	0.0023
200	0.0317	0.0318	0.0014	0.0014	0.0353	0.0354	0.0017	0.0017
300	0.0259	0.0259	0.0009	0.0009	0.0288	0.0289	0.0011	0.0012
n	$1-\alpha$							
	0.95				0.99			
	T_1	T_1^*	T_2	T_2^*	T_1	T_1^*	T_2	T_2^*
3	0.3231	0.3774	0.1181	0.2065	0.3967	0.4283	0.1793	0.2827
8	0.2030	0.2132	0.0518	0.0635	0.2579	0.2658	0.0812	0.0979
10	0.1821	0.1892	0.0422	0.0497	0.2318	0.2376	0.0665	0.0773
18	0.1365	0.1393	0.0244	0.0267	0.1748	0.1771	0.0388	0.0422
20	0.1296	0.1319	0.0221	0.0240	0.1662	0.1680	0.0351	0.0379
30	0.1059	0.1072	0.0149	0.0157	0.1363	0.1373	0.0239	0.0251
38	0.0944	0.0952	0.0119	0.0124	0.1213	0.1220	0.0190	0.0198
40	0.0919	0.0927	0.0113	0.0118	0.1183	0.1189	0.0181	0.0188
50	0.0822	0.0828	0.0091	0.0094	0.1059	0.1064	0.0146	0.0150
78	0.0658	0.0661	0.0060	0.0060	0.0850	0.0852	0.0096	0.0096
100	0.0582	0.0584	0.0046	0.0046	0.0751	0.0752	0.0074	0.0075
150	0.0475	0.0476	0.0030	0.0031	0.0613	0.0614	0.0049	0.0050
200	0.0411	0.0412	0.0023	0.0023	0.0531	0.0532	0.0037	0.0037
300	0.0336	0.0336	0.0015	0.0015	0.0433	0.0434	0.0025	0.0025

Таблица А.7 – Критические значения статистики (2.17) критерия равномерности Янга

n	1- α									
	0.8		0.85		0.9		0.95		0.99	
	M_1	M_2	M_1	M_2	M_1	M_2	M_1	M_2	M_1	M_2
3	0.151	0.589	0.130	0.607	0.105	0.627	0.073	0.654	0.032	0.694
4	0.192	0.603	0.169	0.622	0.142	0.646	0.105	0.677	0.051	0.722
5	0.221	0.605	0.199	0.625	0.172	0.649	0.134	0.683	0.077	0.735
10	0.303	0.602	0.284	0.618	0.261	0.638	0.226	0.668	0.166	0.721
15	0.341	0.593	0.325	0.607	0.305	0.625	0.275	0.652	0.219	0.700
20	0.364	0.586	0.345	0.599	0.332	0.615	0.305	0.639	0.254	0.682
30	0.391	0.575	0.379	0.586	0.364	0.600	0.341	0.620	0.297	0.659
40	0.406	0.568	0.396	0.577	0.383	0.589	0.363	0.607	0.324	0.642
50	0.417	0.562	0.408	0.571	0.396	0.582	0.378	0.598	0.343	0.630
100	0.443	0.547	0.436	0.553	0.428	0.561	0.415	0.573	0.390	0.596
150	0.454	0.539	0.449	0.544	0.442	0.551	0.431	0.561	0.410	0.580
200	0.461	0.534	0.456	0.539	0.450	0.544	0.441	0.553	0.423	0.570
300	0.468	0.523	0.464	0.532	0.459	0.537	0.452	0.544	0.437	0.558

Таблица А.8 – Критические значения статистики (2.20) критерия равномерности Фросини

n	1- α					n	1- α				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99		0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
3	0.3981	0.4345	0.4836	0.5596	0.6872	16	0.4077	0.4453	0.4963	0.5772	0.7409
4	0.4016	0.4385	0.4878	0.5641	0.7054	17	0.4079	0.4453	0.4964	0.5780	0.7407
5	0.4027	0.4397	0.4895	0.5675	0.7161	18	0.4079	0.4454	0.4962	0.5779	0.7411
6	0.4038	0.4413	0.4916	0.5701	0.7216	19	0.4082	0.4457	0.4964	0.5779	0.7423
7	0.4048	0.4423	0.4925	0.5726	0.7261	20	0.4083	0.4456	0.4966	0.5785	0.7428
8	0.4052	0.4426	0.4931	0.5730	0.7292	30	0.4085	0.4462	0.4971	0.5795	0.7462
9	0.4060	0.4433	0.4938	0.5737	0.7330	40	0.4093	0.4471	0.4987	0.5809	0.7476
10	0.4064	0.4439	0.4943	0.5743	0.7326	50	0.4095	0.4472	0.4986	0.5808	0.7485
11	0.4065	0.4439	0.4947	0.5752	0.7355	100	0.4100	0.4477	0.4991	0.5815	0.7506
12	0.4070	0.4442	0.4951	0.5759	0.7373	150	0.4102	0.4477	0.4990	0.5815	0.7506
13	0.4066	0.4440	0.4949	0.5761	0.7371	200	0.4100	0.4477	0.4990	0.5816	0.7509
14	0.4072	0.4450	0.4957	0.5769	0.7397	300	0.4102	0.4477	0.4992	0.5821	0.7506
15	0.4075	0.4451	0.4958	0.5768	0.7398	1000	0.4100	0.4479	0.4993	0.5822	0.7520

Таблица А.9 – Критические значения статистики (2.21) критерия равномерности Гринвуда

n	1- α					n	1- α				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99		0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
3	1.890	2.007	2.181	2.470	3.026	15	2.137	2.236	2.376	2.617	3.219
4	1.961	2.081	2.250	2.543	3.199	20	2.150	2.240	2.365	2.582	3.123
5	2.007	2.128	2.298	2.593	3.284	30	2.153	2.230	2.337	2.521	2.969
6	2.040	2.159	2.327	2.621	3.329	40	2.151	2.220	2.314	2.475	2.861
7	2.065	2.181	2.346	2.637	3.341	50	2.146	2.208	2.292	2.435	2.777
8	2.083	2.198	2.361	2.643	3.337	100	2.123	2.167	2.227	2.326	2.552
9	2.098	2.210	2.368	2.647	3.336	150	2.108	2.145	2.193	2.271	2.443
10	2.109	2.218	2.374	2.645	3.314	200	2.097	2.128	2.170	2.236	2.381
11	2.117	2.224	2.376	2.639	3.296	300	2.083	2.108	2.141	2.194	2.306

Таблица А.10 – Критические значения статистики (2.24) критерия равномерности Гринвуда-Кэсенберри-Миллера

n	$1-\alpha$					n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99		0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
2	0.755	0.779	0.811	0.859	0.933	33	0.092	0.094	0.097	0.103	0.117
3	0.631	0.657	0.689	0.737	0.831	34	0.089	0.091	0.095	0.100	0.113
4	0.530	0.554	0.586	0.636	0.732	35	0.087	0.089	0.092	0.097	0.110
5	0.456	0.476	0.505	0.552	0.647	36	0.084	0.086	0.089	0.094	0.106
6	0.401	0.418	0.443	0.484	0.574	37	0.082	0.084	0.087	0.092	0.103
7	0.358	0.373	0.394	0.430	0.512	38	0.080	0.082	0.085	0.089	0.100
8	0.323	0.336	0.354	0.386	0.460	39	0.078	0.080	0.083	0.087	0.098
9	0.294	0.306	0.322	0.350	0.418	40	0.076	0.078	0.081	0.085	0.095
10	0.270	0.280	0.295	0.320	0.381	41	0.074	0.076	0.079	0.083	0.092
11	0.249	0.258	0.272	0.295	0.350	42	0.073	0.074	0.077	0.081	0.090
12	0.231	0.240	0.252	0.273	0.323	43	0.071	0.073	0.075	0.079	0.088
13	0.216	0.224	0.235	0.254	0.299	44	0.069	0.071	0.073	0.077	0.086
14	0.202	0.209	0.220	0.237	0.279	45	0.068	0.070	0.072	0.075	0.084
15	0.191	0.197	0.206	0.222	0.261	46	0.067	0.068	0.070	0.074	0.082
16	0.180	0.186	0.194	0.209	0.245	47	0.065	0.067	0.069	0.072	0.080
17	0.170	0.176	0.184	0.198	0.231	48	0.064	0.065	0.067	0.070	0.078
18	0.162	0.167	0.174	0.187	0.218	49	0.063	0.064	0.066	0.069	0.076
19	0.154	0.159	0.166	0.178	0.207	50	0.061	0.063	0.065	0.068	0.075
20	0.147	0.151	0.158	0.169	0.196	55	0.056	0.057	0.059	0.061	0.068
21	0.140	0.145	0.151	0.161	0.187	60	0.051	0.052	0.054	0.056	0.062
22	0.134	0.139	0.144	0.154	0.178	65	0.047	0.048	0.050	0.052	0.056
23	0.129	0.133	0.138	0.148	0.170	70	0.044	0.045	0.046	0.048	0.052
24	0.124	0.128	0.133	0.142	0.162	75	0.041	0.042	0.043	0.045	0.048
25	0.119	0.123	0.128	0.136	0.156	80	0.0386	0.0392	0.040	0.042	0.045
26	0.115	0.118	0.123	0.131	0.150	85	0.036	0.037	0.038	0.039	0.042
27	0.111	0.114	0.119	0.126	0.144	90	0.034	0.035	0.036	0.037	0.040
28	0.107	0.110	0.114	0.122	0.139	95	0.0325	0.0330	0.034	0.035	0.038
29	0.104	0.107	0.111	0.117	0.134	100	0.0309	0.0314	0.032	0.033	0.036
30	0.100	0.103	0.107	0.113	0.129	150	0.0206	0.0209	0.0212	0.0218	0.023
31	0.097	0.100	0.104	0.110	0.124	200	0.0154	0.0156	0.0158	0.0161	0.017
32	0.094	0.097	0.100	0.106	0.120	300	0.0103	0.0104	0.0105	0.0108	0.0111

Таблица А.11 – Критические значения статистики (2.26) критерия равномерности Неймана-Бартона

N_2						N_3					
n	$1-\alpha$					n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99		0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
2	2.450	3.013	4.034	5.932	10.077	2	4.118	4.475	5.606	7.495	13.570
3	2.865	3.276	4.015	5.669	9.723	3	4.440	5.036	5.780	7.358	12.936
4	3.030	3.448	4.113	5.571	9.602	4	4.446	5.098	6.028	7.550	12.314
5	3.118	3.568	4.227	5.554	9.519	5	4.435	5.101	6.034	7.666	12.118
6	3.154	3.637	4.311	5.601	9.400	6	4.459	5.105	6.028	7.674	11.960
7	3.180	3.681	4.380	5.651	9.315	7	4.474	5.124	6.052	7.674	11.845
8	3.188	3.702	4.418	5.680	9.270	8	4.481	5.137	6.068	7.688	11.812
9	3.190	3.720	4.452	5.730	9.237	9	4.501	5.153	6.078	7.699	11.805
10	3.192	3.726	4.469	5.759	9.186	10	4.509	5.161	6.087	7.702	11.746
11	3.194	3.733	4.486	5.792	9.171	11	4.520	5.172	6.099	7.704	11.717
12	3.197	3.743	4.601	5.815	9.168	12	4.536	5.184	6.108	7.712	11.667
14	3.200	3.749	4.516	5.843	9.152	14	4.550	5.199	6.119	7.716	11.651
16	3.203	3.757	4.530	5.861	9.150	16	4.569	5.216	6.128	7.722	11.608
18	3.205	3.760	4.540	5.872	9.158	18	4.579	5.230	6.145	7.724	11.569
20	3.206	3.764	4.546	5.887	9.152	20	4.581	5.239	6.153	7.725	11.542
25	3.210	3.769	4.561	5.912	9.160	25	4.600	5.259	6.172	7.740	11.510
30	3.212	3.774	4.567	5.926	9.146	30	4.607	5.268	6.191	7.751	11.457
40	3.214	3.782	4.580	5.945	9.160	40	4.618	5.281	6.204	7.770	11.425
50	3.214	3.785	4.585	5.951	9.175	50	4.622	5.289	6.214	7.773	11.413
100	3.214	3.789	4.591	5.969	9.200	100	4.633	5.305	6.232	7.793	11.367
200	3.216	3.789	4.595	5.985	9.211	200	4.634	5.310	6.244	7.806	11.360
300	3.218	3.790	4.600	5.987	9.202	300	4.638	5.310	6.246	7.807	11.347
∞	3.219	3.794	4.605	5.991	9.210	∞	4.641	5.317	6.251	7.814	11.345
N_4											
n	$1-\alpha$					n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99		0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
2	5.648	6.462	7.220	9.731	16.129	16	5.849	6.598	7.652	9.465	13.920
3	5.674	6.329	7.382	9.328	16.208	18	5.865	6.614	7.663	9.468	13.855
4	5.741	6.469	7.464	9.348	15.507	20	5.872	6.621	7.667	9.461	13.798
5	5.729	6.500	7.567	9.459	15.015	25	5.898	6.641	7.683	9.453	13.707
6	5.742	6.499	7.590	9.489	14.735	30	5.913	6.657	7.692	9.455	13.626
7	5.770	6.531	7.600	9.499	14.511	40	5.930	6.677	7.709	9.453	13.554
8	5.780	6.541	7.611	9.477	14.396	50	5.944	6.689	7.722	9.456	13.492
9	5.794	6.551	7.618	9.490	14.315	100	5.970	6.719	7.752	9.469	13.371
10	5.802	6.560	7.633	9.476	14.238	200	5.976	6.730	7.763	9.479	13.352
11	5.809	6.568	7.632	9.480	14.135	300	5.985	6.738	7.770	9.481	13.276
12	5.819	6.576	7.638	9.478	14.066	∞	5.989	6.745	7.779	9.488	13.277
14	5.832	6.589	7.649	9.470	13.990						

Таблица А.12 – Критические значения статистики (2.28) критерия равномерности Дудевича-ван Дер Мюлена

n	m	$1-\alpha$					n	m	$1-\alpha$				
		0.8	0.85	0.9	0.95	0.99			0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
10	1	0.700	0.758	0.835	0.960	1.225	40	8	0.223	0.234	0.248	0.272	0.322
	2	0.547	0.592	0.653	0.754	0.971		9	0.234	0.245	0.259	0.282	0.333
	3	0.542	0.584	0.642	0.735	0.942		10	0.246	0.257	0.271	0.294	0.345
	4	0.575	0.617	0.673	0.765	0.969		15	0.316	0.326	0.341	0.364	0.413
20	1	0.505	0.538	0.582	0.651	0.795	50	1	0.382	0.399	0.421	0.456	0.526
	2	0.350	0.375	0.409	0.463	0.579		2	0.229	0.241	0.258	0.283	0.337
	3	0.322	0.345	0.376	0.426	0.532		3	0.188	0.199	0.214	0.236	0.284
	4	0.325	0.346	0.376	0.423	0.525		4	0.175	0.185	0.198	0.219	0.265
	5	0.339	0.360	0.388	0.435	0.535		5	0.172	0.181	0.194	0.214	0.258
	6	0.359	0.380	0.408	0.454	0.554		6	0.174	0.183	0.195	0.215	0.258
	7	0.383	0.404	0.432	0.477	0.576		7	0.179	0.188	0.200	0.219	0.261
	8	0.410	0.431	0.459	0.504	0.603		8	0.186	0.195	0.206	0.226	0.267
	9	0.439	0.459	0.487	0.532	0.631		9	0.194	0.203	0.214	0.234	0.274
30	1	0.437	0.462	0.494	0.544	0.648	100	10	0.203	0.212	0.223	0.242	0.283
	2	0.283	0.301	0.326	0.364	0.445		15	0.256	0.264	0.276	0.294	0.335
	3	0.248	0.264	0.286	0.321	0.395		20	0.315	0.324	0.335	0.354	0.394
	4	0.242	0.257	0.277	0.310	0.381		1	0.337	0.348	0.362	0.384	0.427
	5	0.246	0.261	0.281	0.313	0.381		2	0.186	0.194	0.204	0.220	0.251
	6	0.256	0.271	0.290	0.321	0.389		3	0.142	0.149	0.157	0.171	0.199
	7	0.269	0.283	0.303	0.333	0.401		4	0.123	0.129	0.137	0.150	0.175
	8	0.285	0.299	0.317	0.348	0.415		5	0.115	0.120	0.128	0.139	0.164
	9	0.301	0.315	0.334	0.364	0.431		6	0.111	0.116	0.123	0.135	0.158
	10	0.319	0.333	0.351	0.382	0.448		7	0.110	0.115	0.122	0.134	0.156
40	1	0.403	0.423	0.449	0.490	0.573	8	0.111	0.116	0.123	0.133	0.156	
	2	0.249	0.264	0.283	0.314	0.378	9	0.113	0.118	0.125	0.135	0.157	
	3	0.211	0.224	0.241	0.268	0.327	10	0.116	0.121	0.127	0.138	0.159	
	4	0.200	0.212	0.228	0.254	0.309	15	0.138	0.142	0.148	0.158	0.179	
	5	0.200	0.211	0.226	0.251	0.305	20	0.164	0.169	0.175	0.184	0.205	
	6	0.205	0.216	0.231	0.255	0.307	30	0.222	0.227	0.233	0.242	0.263	
	7	0.213	0.224	0.238	0.262	0.314	40	0.283	0.288	0.295	0.305	0.325	

Таблица А.13 – Критические значения статистики (2.29) критерия $HU_1(m, n)$

n	m	$1-\alpha$					n	m	$1-\alpha$				
		0.8	0.85	0.9	0.95	0.99			0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
10	1	0.464	0.521	0.598	0.720	0.984	40	5	0.074	0.086	0.101	0.126	0.179
	2	0.243	0.288	0.349	0.449	0.666		6	0.064	0.075	0.090	0.114	0.167
	3	0.171	0.213	0.271	0.364	0.570	50	1	0.317	0.333	0.355	0.389	0.458
	4	0.140	0.181	0.237	0.329	0.533		2	0.164	0.176	0.193	0.218	0.271
20	1	0.376	0.408	0.451	0.519	0.662		3	0.112	0.123	0.138	0.160	0.208
	2	0.196	0.221	0.255	0.308	0.424		4	0.087	0.097	0.110	0.131	0.177
	3	0.136	0.159	0.190	0.239	0.345		5	0.071	0.081	0.094	0.114	0.158
	4	0.107	0.128	0.158	0.205	0.307		6	0.061	0.070	0.083	0.103	0.145
	5	0.089	0.110	0.139	0.185	0.286	100	1	0.293	0.304	0.318	0.339	0.381
30	1	0.344	0.368	0.399	0.449	0.551		2	0.151	0.159	0.169	0.184	0.216
	2	0.179	0.197	0.221	0.259	0.340		3	0.103	0.110	0.118	0.132	0.159
	3	0.123	0.140	0.161	0.196	0.270		4	0.079	0.085	0.093	0.105	0.131
	4	0.096	0.111	0.132	0.164	0.236		5	0.064	0.070	0.077	0.089	0.113
	5	0.080	0.094	0.114	0.146	0.215		6	0.054	0.060	0.067	0.078	0.102
40	1	0.327	0.347	0.372	0.412	0.494	150	7	0.045	0.049	0.054	0.062	0.078
	2	0.170	0.184	0.204	0.234	0.298	200	8	0.039	0.042	0.046	0.052	0.064
	3	0.117	0.130	0.147	0.174	0.232	300	9	0.034	0.036	0.038	0.043	0.052
	4	0.090	0.102	0.118	0.144	0.199							

Таблица А.14 – Критические значения статистики (2.30) критерия $HU_2(m, n)$

n	m	$1-\alpha$					n	m	$1-\alpha$				
		0.8	0.85	0.9	0.95	0.99			0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
10	1	0.350	0.399	0.466	0.574	0.807	40	4	0.081	0.093	0.109	0.134	0.189
	2	0.201	0.245	0.304	0.400	0.611		5	0.067	0.079	0.095	0.120	0.174
	3	0.151	0.193	0.250	0.343	0.549		6	0.058	0.070	0.085	0.110	0.164
	4	0.129	0.171	0.226	0.318	0.522		7	0.053	0.064	0.079	0.104	0.157
20	1	0.284	0.312	0.349	0.409	0.535	50	1	0.240	0.254	0.273	0.302	0.362
	2	0.165	0.189	0.220	0.272	0.382		2	0.143	0.154	0.170	0.194	0.245
	3	0.118	0.140	0.170	0.218	0.323		3	0.101	0.111	0.125	0.147	0.194
	4	0.094	0.116	0.145	0.193	0.296		4	0.078	0.088	0.102	0.123	0.168
	5	0.081	0.103	0.131	0.179	0.280		5	0.065	0.074	0.087	0.108	0.152
	6	0.073	0.095	0.123	0.170	0.270		6	0.056	0.065	0.078	0.098	0.142
	7	0.068	0.089	0.117	0.163	0.263		7	0.050	0.059	0.072	0.092	0.135
30	1	0.260	0.280	0.308	0.351	0.441	100	1	0.222	0.231	0.243	0.261	0.297
	2	0.153	0.170	0.193	0.229	0.306		2	0.133	0.141	0.150	0.165	0.195
	3	0.108	0.124	0.145	0.179	0.252		3	0.094	0.100	0.109	0.122	0.149
	4	0.085	0.100	0.121	0.154	0.224		4	0.073	0.079	0.086	0.099	0.124
	5	0.072	0.086	0.106	0.139	0.208		5	0.060	0.065	0.073	0.084	0.109
	6	0.063	0.078	0.098	0.130	0.199		6	0.051	0.056	0.063	0.075	0.099
	7	0.057	0.072	0.092	0.124	0.193		7	0.045	0.050	0.057	0.068	0.092
40	1	0.248	0.264	0.286	0.321	0.392	150	7	0.043	0.047	0.052	0.060	0.077
	2	0.147	0.160	0.178	0.207	0.268	200	8	0.037	0.040	0.044	0.050	0.063
	3	0.103	0.116	0.133	0.159	0.216	300	9	0.033	0.035	0.037	0.042	0.051

Таблица А.15 – Критические значения статистик (2.31-2.32) критериев равномерности Кресси при $m = m^*$

$S_n^{(m)}$						$L_n^{(m)}$					
n	$1-\alpha$					n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99		0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
10	0.215	0.245	0.283	0.353	0.514	10	2.054	2.368	2.797	3.501	5.062
20	0.175	0.194	0.221	0.269	0.383	20	3.118	3.515	4.051	4.911	6.765
30	0.155	0.171	0.193	0.231	0.321	30	3.764	4.213	4.809	5.770	7.792
40	0.144	0.158	0.177	0.210	0.288	40	4.220	4.708	5.356	6.392	8.557
50	0.121	0.131	0.146	0.170	0.227	50	5.206	5.728	6.419	7.517	9.827
100	0.065	0.069	0.075	0.084	0.104	100	10.014	10.664	11.517	12.852	15.614
150	0.051	0.054	0.058	0.064	0.077	150	12.721	13.444	14.389	15.867	18.879
200	0.044	0.046	0.049	0.054	0.064	200	14.716	15.498	16.511	18.082	21.264
300	0.033	0.035	0.036	0.039	0.045	300	19.322	20.197	21.332	23.081	26.605

Таблица А.16 – Критические значения статистики (2.33) критерия Пардо при $m = m^*$

n	$1-\alpha$				
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.99
10	2.024	2.148	2.331	2.675	3.710
20	1.573	1.628	1.708	1.851	2.240
30	1.415	1.450	1.499	1.585	1.805
40	1.335	1.360	1.395	1.456	1.607
50	1.291	1.312	1.341	1.392	1.517
100	1.199	1.212	1.229	1.258	1.326
150	1.156	1.164	1.176	1.195	1.239
200	1.130	1.137	1.146	1.160	1.193
300	1.105	1.110	1.116	1.127	1.149

Таблица А.17 – Критические значения статистики (2.34) критерия равномерности Шварца

n	$1-\alpha$					
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
10	0.304	0.342	0.398	0.499	0.613	0.775
20	0.308	0.337	0.379	0.452	0.532	0.650
30	0.305	0.329	0.363	0.422	0.485	0.574
40	0.302	0.324	0.352	0.402	0.454	0.528
50	0.299	0.317	0.343	0.387	0.432	0.496
100	0.288	0.301	0.319	0.348	0.377	0.415
150	0.283	0.293	0.307	0.330	0.352	0.380
200	0.279	0.288	0.300	0.319	0.337	0.360
300	0.275	0.282	0.291	0.306	0.320	0.338

Таблица А.18 – Критические значения статистики (2.35) модификации критерия Андерсона-Дарлинга

n	$1-\alpha$					
	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99
10	1.413	1.676	2.072	2.820	4.884	1.413
20	1.467	1.719	2.098	2.796	4.655	1.467
30	1.472	1.716	2.080	2.745	4.473	1.472
40	1.471	1.713	2.068	2.708	4.358	1.471
50	1.467	1.702	2.050	2.679	4.271	1.467
100	1.453	1.677	2.008	2.598	4.085	1.453
150	1.441	1.662	1.986	2.564	4.010	1.441
200	1.435	1.653	1.972	2.548	3.978	1.435
300	1.428	1.644	1.962	2.532	3.939	1.428

ПРИЛОЖЕНИЕ Б ТАБЛИЦЫ ОЦЕНОК МОЩНОСТИ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ РАВНОМЕРНОСТИ

Таблица Б.1 – Мощность критерия Шермана (2.1) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.104	0.065	0.029	0.013	0.005
20	0.138	0.091	0.045	0.022	0.009
30	0.166	0.112	0.057	0.029	0.012
40	0.189	0.130	0.068	0.036	0.015
50	0.210	0.147	0.079	0.043	0.018
100	0.292	0.215	0.126	0.073	0.035
150	0.358	0.272	0.167	0.102	0.051
200	0.415	0.325	0.208	0.131	0.069
300	0.510	0.415	0.283	0.188	0.107

Таблица Б.2 – Мощность критерия Шермана (2.1) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.207	0.147	0.081	0.044	0.020
20	0.219	0.156	0.087	0.048	0.022
30	0.229	0.164	0.092	0.051	0.024
40	0.237	0.171	0.096	0.054	0.025
50	0.245	0.177	0.101	0.057	0.027
100	0.277	0.204	0.119	0.069	0.033
150	0.304	0.226	0.135	0.080	0.039
200	0.328	0.248	0.150	0.090	0.045
300	0.370	0.285	0.178	0.110	0.057

Таблица Б.3 – Мощность критерия Шермана (2.1) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.171	0.117	0.061	0.032	0.013
20	0.179	0.123	0.065	0.034	0.015
30	0.186	0.129	0.068	0.036	0.016
40	0.192	0.134	0.071	0.038	0.016
50	0.197	0.137	0.074	0.039	0.017
100	0.218	0.154	0.084	0.046	0.020
150	0.234	0.167	0.093	0.051	0.023
200	0.249	0.180	0.101	0.056	0.026
300	0.274	0.201	0.115	0.065	0.031

Таблица Б.4 –Мощность критерия Кимбелла (2.4) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.097	0.059	0.025	0.010	0.003
20	0.131	0.084	0.040	0.018	0.006
30	0.164	0.110	0.055	0.027	0.011
40	0.195	0.134	0.071	0.037	0.015
50	0.225	0.160	0.088	0.048	0.021
100	0.361	0.279	0.177	0.110	0.057
150	0.475	0.388	0.268	0.182	0.107
200	0.573	0.485	0.357	0.257	0.163
300	0.720	0.642	0.516	0.406	0.287

Таблица Б.5 –Мощность критерия Кимбелла (2.4) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.203	0.143	0.078	0.042	0.019
20	0.216	0.152	0.084	0.046	0.020
30	0.226	0.160	0.088	0.049	0.022
40	0.234	0.167	0.093	0.052	0.023
50	0.242	0.174	0.098	0.055	0.025
100	0.276	0.201	0.116	0.066	0.030
150	0.303	0.225	0.133	0.077	0.037
200	0.328	0.246	0.148	0.087	0.042
300	0.371	0.284	0.176	0.107	0.054

Таблица Б.6 –Мощность критерия Кимбелла (2.4) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.170	0.116	0.060	0.031	0.013
20	0.180	0.124	0.065	0.034	0.015
30	0.189	0.131	0.070	0.037	0.016
40	0.196	0.137	0.073	0.040	0.017
50	0.203	0.142	0.077	0.042	0.018
100	0.231	0.165	0.092	0.051	0.023
150	0.252	0.183	0.105	0.059	0.028
200	0.272	0.199	0.116	0.067	0.032
300	0.306	0.229	0.137	0.081	0.040

Таблица Б.7 – Мощность критерия Морана 2 (2.6) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.113	0.072	0.034	0.016	0.006
20	0.141	0.093	0.046	0.023	0.009
30	0.161	0.108	0.055	0.028	0.011
40	0.179	0.122	0.063	0.032	0.013
50	0.195	0.135	0.071	0.037	0.016
100	0.260	0.187	0.105	0.058	0.026
150	0.313	0.232	0.136	0.078	0.038
200	0.359	0.272	0.166	0.099	0.049
300	0.438	0.344	0.222	0.139	0.073

Таблица Б.8 – Мощность критерия Морана 2 (2.6) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.212	0.150	0.083	0.046	0.021
20	0.221	0.157	0.087	0.048	0.022
30	0.228	0.162	0.090	0.050	0.023
40	0.234	0.168	0.094	0.052	0.024
50	0.240	0.172	0.097	0.054	0.025
100	0.266	0.193	0.111	0.063	0.029
150	0.287	0.211	0.123	0.071	0.034
200	0.307	0.228	0.135	0.078	0.038
300	0.341	0.258	0.156	0.093	0.046

Таблица Б.9 – Мощность критерия Морана 2 (2.6) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.170	0.116	0.060	0.031	0.013
20	0.177	0.121	0.063	0.033	0.014
30	0.182	0.124	0.065	0.034	0.014
40	0.186	0.128	0.067	0.035	0.015
50	0.190	0.131	0.069	0.036	0.015
100	0.206	0.143	0.077	0.041	0.018
150	0.219	0.154	0.084	0.045	0.020
200	0.231	0.163	0.090	0.048	0.021
300	0.251	0.180	0.100	0.055	0.025

Таблица Б.10 – Мощность критерия Ченга-Спиринга (2.9) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.161	0.109	0.056	0.029	0.012
20	0.222	0.160	0.091	0.050	0.023
30	0.303	0.231	0.141	0.085	0.042
40	0.389	0.309	0.204	0.131	0.070
50	0.472	0.388	0.271	0.183	0.105
100	0.789	0.722	0.605	0.490	0.355
150	0.931	0.898	0.828	0.745	0.623
200	0.980	0.968	0.936	0.891	0.813
300	0.999	0.997	0.994	0.986	0.969

Таблица Б.11 – Мощность критерия Ченга-Спиринга (2.9) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.157	0.106	0.053	0.027	0.011
20	0.167	0.114	0.060	0.031	0.013
30	0.176	0.122	0.065	0.035	0.015
40	0.183	0.128	0.070	0.038	0.017
50	0.191	0.134	0.074	0.041	0.018
100	0.229	0.168	0.098	0.057	0.028
150	0.266	0.200	0.123	0.074	0.038
200	0.301	0.232	0.147	0.092	0.049
300	0.369	0.295	0.198	0.131	0.074

Таблица Б.12 – Мощность критерия Ченга-Спиринга (2.9) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.151	0.100	0.050	0.0249	0.0099
20	0.153	0.103	0.052	0.026	0.011
30	0.154	0.103	0.052	0.026	0.011
40	0.155	0.104	0.053	0.027	0.011
50	0.155	0.105	0.053	0.027	0.011
100	0.157	0.106	0.054	0.028	0.011
150	0.158	0.107	0.055	0.028	0.012
200	0.159	0.108	0.055	0.028	0.012
300	0.161	0.109	0.056	0.029	0.012

Таблица Б.13 – Мощность критерия Хегази-Грина со статистиками (2.12-2.13)

относительно гипотезы H_1

T_1						T_2					
n	α					n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.092	0.054	0.022	0.009	0.003	10	0.099	0.060	0.025	0.010	0.003
20	0.116	0.067	0.026	0.010	0.003	20	0.124	0.074	0.030	0.012	0.004
30	0.148	0.085	0.032	0.012	0.003	30	0.154	0.092	0.037	0.015	0.005
40	0.185	0.106	0.039	0.014	0.004	40	0.188	0.112	0.045	0.018	0.006
50	0.226	0.133	0.049	0.018	0.004	50	0.226	0.137	0.056	0.022	0.007
100	0.474	0.322	0.142	0.053	0.013	100	0.453	0.308	0.141	0.058	0.017
150	0.698	0.546	0.301	0.138	0.039	150	0.670	0.517	0.284	0.133	0.042
200	0.849	0.734	0.492	0.274	0.098	200	0.828	0.705	0.462	0.254	0.094
300	0.973	0.933	0.801	0.599	0.326	300	0.967	0.920	0.773	0.564	0.298

Таблица Б.14 – Мощность критерия Хегази-Грина со статистиками (2.12-2.13)

относительно гипотезы H_2

T_1						T_2					
n	α					n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.242	0.178	0.105	0.061	0.030	10	0.239	0.175	0.102	0.060	0.029
20	0.307	0.236	0.093	0.093	0.049	20	0.302	0.231	0.145	0.090	0.048
30	0.368	0.293	0.194	0.127	0.071	30	0.362	0.287	0.189	0.123	0.068
40	0.425	0.346	0.239	0.162	0.095	40	0.418	0.339	0.232	0.156	0.091
50	0.478	0.397	0.284	0.200	0.121	50	0.470	0.389	0.277	0.192	0.115
100	0.685	0.610	0.490	0.383	0.266	100	0.677	0.602	0.480	0.371	0.256
150	0.817	0.760	0.654	0.549	0.420	150	0.811	0.752	0.644	0.536	0.406
200	0.897	0.856	0.775	0.685	0.562	200	0.893	0.850	0.767	0.673	0.548
300	0.969	0.952	0.912	0.859	0.774	300	0.968	0.950	0.908	0.853	0.763

Таблица Б.15 – Мощность критерия Хегази-Грина со статистиками (2.12-2.13)

относительно гипотезы H_3

T_1						T_2					
n	α					n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.207	0.149	0.084	0.047	0.022	10	0.205	0.147	0.083	0.046	0.022
20	0.261	0.196	0.119	0.072	0.036	20	0.257	0.192	0.116	0.069	0.034
30	0.313	0.243	0.155	0.097	0.051	30	0.307	0.237	0.150	0.093	0.049
40	0.360	0.286	0.190	0.124	0.069	40	0.354	0.279	0.183	0.118	0.065
50	0.407	0.330	0.227	0.153	0.088	50	0.399	0.322	0.218	0.145	0.082
100	0.600	0.522	0.402	0.301	0.197	100	0.588	0.508	0.386	0.285	0.184
150	0.737	0.670	0.555	0.446	0.321	150	0.724	0.654	0.535	0.424	0.300
200	0.831	0.778	0.678	0.576	0.445	200	0.819	0.762	0.657	0.550	0.417
300	0.933	0.905	0.844	0.769	0.660	300	0.926	0.894	0.826	0.745	0.627

Таблица Б.16 – Мощность критерия Хегази-Грина (2.14-2.15) относительно гипотезы H_1

T_1^*						T_2^*					
n	α					n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.172	0.101	0.038	0.014	0.004	10	0.163	0.097	0.039	0.015	0.005
20	0.214	0.126	0.048	0.017	0.005	20	0.201	0.121	0.048	0.019	0.006
30	0.258	0.156	0.060	0.021	0.006	30	0.242	0.148	0.060	0.023	0.007
40	0.305	0.189	0.074	0.026	0.007	40	0.285	0.177	0.073	0.029	0.008
50	0.355	0.226	0.092	0.033	0.008	50	0.331	0.210	0.089	0.035	0.010
100	0.601	0.443	0.222	0.093	0.024	100	0.565	0.409	0.204	0.089	0.026
150	0.788	0.653	0.403	0.205	0.066	150	0.757	0.615	0.369	0.187	0.063
200	0.901	0.809	0.590	0.361	0.146	200	0.882	0.779	0.550	0.327	0.132
300	0.984	0.957	0.855	0.676	0.404	300	0.980	0.946	0.828	0.637	0.365

Таблица Б.17 – Мощность критерия Хегази-Грина (2.14-2.15) относительно H_2

T_1^*						T_2^*					
n	α					n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.216	0.160	0.096	0.056	0.028	10	0.216	0.159	0.094	0.055	0.027
20	0.281	0.217	0.139	0.087	0.047	20	0.279	0.214	0.135	0.084	0.044
30	0.343	0.274	0.184	0.121	0.068	30	0.339	0.269	0.178	0.115	0.064
40	0.401	0.326	0.228	0.155	0.091	40	0.396	0.320	0.220	0.148	0.086
50	0.454	0.378	0.273	0.192	0.116	50	0.448	0.371	0.263	0.183	0.109
100	0.667	0.595	0.478	0.373	0.261	100	0.660	0.585	0.465	0.359	0.246
150	0.806	0.748	0.644	0.540	0.413	150	0.799	0.740	0.632	0.525	0.396
200	0.890	0.848	0.767	0.677	0.555	200	0.885	0.842	0.757	0.663	0.537
300	0.967	0.949	0.908	0.854	0.770	300	0.965	0.947	0.903	0.846	0.756

Таблица Б.18 – Мощность критерия Хегази-Грина (2.14-2.15) относительно гипотезы H_3

T_1^*						T_2^*					
n	α					n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.202	0.145	0.082	0.046	0.021	10	0.201	0.144	0.081	0.045	0.021
20	0.257	0.193	0.117	0.070	0.035	20	0.254	0.190	0.114	0.068	0.034
30	0.309	0.240	0.153	0.096	0.051	30	0.304	0.235	0.148	0.092	0.048
40	0.357	0.283	0.188	0.122	0.068	40	0.351	0.277	0.182	0.117	0.064
50	0.403	0.327	0.225	0.151	0.086	50	0.396	0.319	0.216	0.143	0.081
100	0.597	0.520	0.401	0.300	0.196	100	0.586	0.506	0.385	0.283	0.182
150	0.735	0.668	0.554	0.445	0.320	150	0.723	0.653	0.533	0.422	0.298
200	0.830	0.777	0.677	0.574	0.444	200	0.818	0.761	0.655	0.548	0.416
300	0.933	0.904	0.843	0.768	0.660	300	0.926	0.894	0.825	0.743	0.626

Таблица Б.19 – Мощность критерия Янга (2.17) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.138	0.090	0.043	0.021	0.008
20	0.146	0.097	0.048	0.024	0.009
30	0.151	0.101	0.051	0.026	0.010
40	0.156	0.105	0.053	0.027	0.011
50	0.159	0.108	0.055	0.028	0.012
100	0.167	0.115	0.060	0.031	0.013
150	0.172	0.118	0.063	0.033	0.014
200	0.174	0.120	0.064	0.034	0.015
300	0.177	0.123	0.066	0.036	0.016

Таблица Б.20 – Мощность критерия Янга (2.17) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.160	0.108	0.055	0.028	0.012
20	0.160	0.108	0.056	0.028	0.012
30	0.160	0.108	0.056	0.029	0.012
40	0.160	0.108	0.056	0.029	0.012
50	0.160	0.108	0.055	0.029	0.012
100	0.159	0.108	0.055	0.028	0.012
150	0.159	0.108	0.055	0.028	0.012
200	0.159	0.108	0.055	0.028	0.012
300	0.159	0.108	0.055	0.028	0.012

Таблица Б.21 – Мощность критерия Янга (2.17) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.153	0.102	0.052	0.026	0.0105
20	0.154	0.103	0.052	0.026	0.011
30	0.154	0.104	0.052	0.027	0.011
40	0.155	0.104	0.052	0.027	0.011
50	0.155	0.104	0.053	0.027	0.011
100	0.155	0.104	0.053	0.027	0.011
150	0.156	0.105	0.053	0.027	0.011
200	0.156	0.105	0.053	0.027	0.011
300	0.156	0.105	0.054	0.027	0.011

Таблица Б.22 – Мощность критерия Фросини (2.20) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.126	0.072	0.028	0.011	0.003
20	0.162	0.093	0.034	0.013	0.004
30	0.201	0.117	0.043	0.016	0.004
40	0.244	0.144	0.054	0.019	0.005
50	0.291	0.177	0.068	0.024	0.006
100	0.541	0.384	0.180	0.072	0.018
150	0.747	0.603	0.353	0.170	0.052
200	0.878	0.775	0.543	0.317	0.121
300	0.979	0.946	0.830	0.639	0.366

Таблица Б.23 – Мощность критерия Фросини (2.20) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.231	0.171	0.102	0.060	0.030
20	0.296	0.228	0.145	0.091	0.048
30	0.357	0.285	0.190	0.125	0.070
40	0.414	0.337	0.234	0.159	0.094
50	0.467	0.389	0.279	0.196	0.119
100	0.677	0.603	0.485	0.378	0.264
150	0.812	0.755	0.650	0.545	0.417
200	0.893	0.852	0.771	0.681	0.559
300	0.968	0.951	0.910	0.857	0.772

Таблица Б.24 – Мощность критерия Фросини (2.20) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.206	0.148	0.084	0.047	0.022
20	0.260	0.196	0.119	0.072	0.036
30	0.312	0.242	0.154	0.097	0.051
40	0.360	0.286	0.190	0.123	0.069
50	0.406	0.330	0.227	0.152	0.087
100	0.599	0.522	0.402	0.301	0.197
150	0.736	0.670	0.555	0.446	0.321
200	0.830	0.777	0.678	0.575	0.445
300	0.933	0.905	0.844	0.769	0.660

Таблица Б.25 – Мощность модификации (2.23) критерия равномерности Гринвуда относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.046	0.026	0.009	0.003	0.001
20	0.035	0.020	0.007	0.003	0.001
30	0.030	0.016	0.006	0.002	0.001
40	0.026	0.015	0.005	0.002	0.001
50	0.024	0.013	0.005	0.002	0.0004
100	0.017	0.010	0.003	0.001	0.0003
150	0.014	0.008	0.003	0.001	0.0002
200	0.012	0.007	0.0025	0.001	0.0002
300	0.010	0.006	0.002	0.001	0.0002

Таблица Б.26 – Мощность модификации (2.23) критерия равномерности Гринвуда относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.178	0.129	0.074	0.043	0.021
20	0.217	0.164	0.102	0.063	0.032
30	0.253	0.197	0.128	0.082	0.045
40	0.287	0.229	0.153	0.102	0.058
50	0.320	0.260	0.180	0.122	0.072
100	0.463	0.400	0.306	0.227	0.149
150	0.579	0.519	0.422	0.334	0.237
200	0.672	0.619	0.526	0.436	0.330
300	0.802	0.764	0.690	0.610	0.502

Таблица Б.27 – Мощность модификации (2.23) критерия равномерности Гринвуда относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.217	0.151	0.082	0.045	0.020
20	0.255	0.184	0.106	0.061	0.029
30	0.292	0.217	0.131	0.078	0.039
40	0.327	0.250	0.156	0.095	0.049
50	0.361	0.281	0.181	0.115	0.062
100	0.512	0.428	0.307	0.214	0.128
150	0.628	0.549	0.423	0.316	0.206
200	0.719	0.648	0.527	0.415	0.292
300	0.843	0.791	0.693	0.588	0.454

Таблица Б.28 –Мощность критерия Гринвуда-Кэсенберри-Миллера (2.24) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.062	0.036	0.014	0.005	0.002
20	0.095	0.059	0.026	0.011	0.004
30	0.131	0.086	0.041	0.019	0.007
40	0.167	0.113	0.058	0.029	0.012
50	0.202	0.142	0.077	0.041	0.017
100	0.373	0.290	0.186	0.116	0.062
150	0.519	0.430	0.305	0.212	0.128
200	0.638	0.553	0.423	0.316	0.208
300	0.803	0.738	0.623	0.514	0.386

Таблица Б.29 –Мощность критерия Гринвуда-Кэсенберри-Миллера (2.24) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.224	0.159	0.088	0.048	0.022
20	0.242	0.173	0.097	0.054	0.025
30	0.255	0.185	0.105	0.059	0.027
40	0.267	0.194	0.111	0.063	0.029
50	0.278	0.204	0.118	0.068	0.032
100	0.325	0.244	0.147	0.086	0.042
150	0.364	0.278	0.172	0.104	0.052
200	0.399	0.310	0.195	0.121	0.062
300	0.458	0.366	0.241	0.155	0.083

Таблица Б.30 –Мощность критерия Гринвуда-Кэсенберри-Миллера (2.24) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.174	0.119	0.062	0.032	0.014
20	0.188	0.130	0.069	0.037	0.016
30	0.199	0.140	0.075	0.040	0.018
40	0.209	0.147	0.081	0.044	0.019
50	0.219	0.155	0.086	0.047	0.021
100	0.257	0.186	0.107	0.061	0.028
150	0.287	0.213	0.125	0.073	0.035
200	0.314	0.236	0.142	0.085	0.042
300	0.362	0.279	0.174	0.107	0.055

Таблица Б.31 – Мощность критерия Неймана-Бартона (2.26) относительно гипотезы H_1

n	N_2					N_3					
	α					α					
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	
10	0.187	0.116	0.043	0.012	0.001	0.145	0.087	0.033	0.011	0.002	
20	0.314	0.224	0.117	0.055	0.017	0.246	0.166	0.080	0.036	0.011	
30	0.429	0.330	0.199	0.112	0.047	0.347	0.254	0.141	0.074	0.028	
40	0.533	0.432	0.286	0.178	0.087	0.444	0.344	0.211	0.123	0.055	
50	0.622	0.525	0.374	0.252	0.137	0.533	0.431	0.285	0.179	0.088	
100	0.889	0.837	0.731	0.613	0.458	0.834	0.766	0.639	0.511	0.353	
150	0.973	0.954	0.908	0.843	0.733	0.952	0.923	0.855	0.769	0.636	
200	0.994	0.989	0.973	0.946	0.891	0.988	0.978	0.951	0.909	0.830	
300	1.000	0.999	0.998	0.996	0.988	0.999	0.999	0.996	0.990	0.975	
n	N_4					n	N_4				
	α						α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.121	0.072	0.028	0.010	0.002	100	0.818	0.739	0.592	0.447	0.283
20	0.197	0.127	0.058	0.026	0.008	150	0.950	0.918	0.840	0.738	0.583
30	0.291	0.200	0.101	0.049	0.018	200	0.989	0.979	0.949	0.902	0.808
40	0.389	0.284	0.158	0.083	0.033	300	0.9996	0.999	0.997	0.991	0.976
50	0.483	0.371	0.224	0.127	0.056						

Таблица Б.32 – Мощность критерия Неймана-Бартона (2.26) относительно гипотезы H_2

n	N_2					N_3					
	α					α					
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	
10	0.236	0.177	0.109	0.068	0.035	0.237	0.177	0.108	0.066	0.035	
20	0.296	0.229	0.149	0.098	0.055	0.292	0.226	0.146	0.095	0.054	
30	0.353	0.282	0.129	0.129	0.077	0.346	0.275	0.186	0.125	0.074	
40	0.408	0.333	0.234	0.163	0.101	0.397	0.323	0.226	0.158	0.098	
50	0.460	0.383	0.277	0.199	0.126	0.446	0.370	0.266	0.191	0.121	
100	0.669	0.597	0.481	0.382	0.276	0.651	0.577	0.464	0.367	0.264	
150	0.808	0.751	0.650	0.552	0.433	0.791	0.732	0.630	0.534	0.418	
200	0.892	0.852	0.774	0.691	0.579	0.880	0.837	0.758	0.674	0.563	
300	0.968	0.952	0.915	0.868	0.794	0.964	0.946	0.907	0.858	0.783	
n	N_4					n	N_4				
	α						α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.238	0.177	0.109	0.067	0.035	100	0.632	0.557	0.445	0.350	0.251
20	0.290	0.224	0.144	0.094	0.053	150	0.773	0.712	0.609	0.512	0.399
30	0.339	0.270	0.182	0.122	0.072	200	0.865	0.820	0.737	0.653	0.541
40	0.388	0.315	0.220	0.153	0.093	300	0.938	0.937	0.895	0.843	0.765
50	0.435	0.359	0.257	0.183	0.116						

Таблица Б.33 – Мощность критерия Неймана-Бартона (2.26) относительно гипотезы H_3

n	N_2					N_3					
	α					α					
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	
10	0.194	0.137	0.076	0.043	0.020	0.189	0.133	0.074	0.041	0.019	
20	0.236	0.172	0.101	0.059	0.029	0.226	0.163	0.094	0.055	0.027	
30	0.277	0.208	0.127	0.077	0.040	0.263	0.194	0.117	0.070	0.036	
40	0.317	0.243	0.154	0.097	0.052	0.298	0.226	0.141	0.087	0.046	
50	0.356	0.279	0.182	0.117	0.064	0.334	0.258	0.165	0.104	0.057	
100	0.531	0.447	0.326	0.232	0.145	0.501	0.416	0.297	0.208	0.127	
150	0.670	0.591	0.465	0.357	0.244	0.638	0.556	0.429	0.324	0.217	
200	0.772	0.704	0.588	0.478	0.352	0.744	0.672	0.552	0.442	0.318	
300	0.898	0.856	0.773	0.682	0.559	0.881	0.834	0.745	0.650	0.523	
n	N_4					n	N_4				
	α						α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.186	0.130	0.072	0.040	0.018	100	0.466	0.381	0.267	0.183	0.110
20	0.218	0.157	0.090	0.052	0.025	150	0.598	0.514	0.388	0.286	0.187
30	0.250	0.184	0.109	0.065	0.033	200	0.706	0.629	0.505	0.396	0.277
40	0.282	0.212	0.130	0.080	0.041	300	0.853	0.799	0.700	0.599	0.470
50	0.314	0.240	0.151	0.094	0.050						

Таблица Б.34 – Мощность критерия Дудевича-ван дер Мюлена (2.28) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.347	0.254	0.145	0.080	0.035
20	0.464	0.361	0.228	0.140	0.071
30	0.562	0.459	0.311	0.204	0.112
40	0.648	0.548	0.395	0.273	0.160
50	0.696	0.601	0.449	0.324	0.199
100	0.853	0.790	0.669	0.546	0.399
150	0.942	0.909	0.835	0.746	0.615
200	0.980	0.965	0.928	0.874	0.783
300	0.997	0.995	0.987	0.973	0.941

Таблица Б.35 – Мощность критерия Дудевича-ван дер Мюлена (2.28) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.144	0.097	0.050	0.026	0.011
20	0.166	0.115	0.062	0.033	0.015
30	0.192	0.136	0.076	0.042	0.020
40	0.217	0.158	0.092	0.053	0.026
50	0.252	0.188	0.113	0.069	0.035
100	0.407	0.327	0.224	0.151	0.088
150	0.531	0.449	0.332	0.242	0.156
200	0.637	0.560	0.440	0.339	0.235
300	0.790	0.729	0.623	0.522	0.401

Таблица Б.36 – Мощность критерия Дудевича-ван дер Мюлена (2.28) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.169	0.115	0.060	0.031	0.013
20	0.192	0.134	0.071	0.038	0.017
30	0.215	0.152	0.084	0.046	0.021
40	0.237	0.172	0.098	0.055	0.026
50	0.260	0.191	0.111	0.064	0.031
100	0.355	0.275	0.175	0.110	0.058
150	0.442	0.356	0.242	0.162	0.093
200	0.522	0.435	0.313	0.219	0.135
300	0.650	0.568	0.440	0.334	0.224

Таблица Б.37 – Мощность критериев $HY_1(m^*, n)$ и $HY_2(m^*, n)$ со статистиками (2.29-2.30) относительно гипотезы H_1

$HY_1(m^*, n)$						$HY_2(m^*, n)$					
n	α					n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.347	0.254	0.145	0.080	0.035	10	0.362	0.265	0.151	0.083	0.036
20	0.463	0.361	0.228	0.139	0.071	20	0.515	0.407	0.262	0.163	0.082
30	0.562	0.458	0.311	0.203	0.112	30	0.636	0.532	0.373	0.250	0.143
40	0.648	0.547	0.394	0.273	0.160	40	0.733	0.638	0.481	0.346	0.211
50	0.695	0.600	0.449	0.323	0.199	50	0.789	0.704	0.557	0.421	0.274
100	0.853	0.789	0.669	0.546	0.398	100	0.925	0.883	0.793	0.687	0.540
150	0.942	0.909	0.835	0.746	0.615	150	0.979	0.963	0.921	0.863	0.764
200	0.980	0.965	0.927	0.874	0.783	200	0.995	0.990	0.974	0.948	0.896
300	0.997	0.995	0.987	0.972	0.940	300	0.9996	0.999	0.997	0.993	0.981

Таблица Б.38 – Мощность критериев $HY_1(m^*, n)$ и $HY_2(m^*, n)$ со статистиками (2.29-2.30) относительно гипотезы H_2

$HY_1(m^*, n)$						$HY_2(m^*, n)$					
n	α					n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.144	0.097	0.050	0.026	0.011	10	0.140	0.095	0.049	0.025	0.011
20	0.167	0.116	0.062	0.033	0.015	20	0.154	0.106	0.056	0.030	0.013
30	0.192	0.137	0.076	0.043	0.020	30	0.169	0.118	0.065	0.036	0.017
40	0.218	0.158	0.092	0.053	0.026	40	0.184	0.131	0.074	0.042	0.020
50	0.253	0.189	0.114	0.069	0.035	50	0.210	0.153	0.089	0.052	0.026
100	0.408	0.328	0.224	0.151	0.089	100	0.340	0.266	0.174	0.113	0.063
150	0.532	0.450	0.333	0.243	0.156	150	0.447	0.366	0.258	0.179	0.110
200	0.638	0.561	0.441	0.340	0.236	200	0.545	0.463	0.346	0.253	0.166
300	0.791	0.729	0.623	0.522	0.402	300	0.707	0.634	0.518	0.413	0.300

Таблица Б.39 –Мощность критериев $HY_1(m^*, n)$ и $HY_2(m^*, n)$ со статистиками (2.29-2.30)относительно гипотезы H_3

$HY_1(m^*, n)$						$HY_2(m^*, n)$					
n	α					n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.169	0.115	0.059	0.031	0.013	10	0.168	0.114	0.059	0.030	0.013
20	0.193	0.134	0.072	0.038	0.017	20	0.191	0.133	0.071	0.038	0.016
30	0.215	0.153	0.084	0.046	0.021	30	0.212	0.150	0.082	0.045	0.020
40	0.238	0.172	0.098	0.055	0.026	40	0.233	0.167	0.094	0.053	0.024
50	0.261	0.191	0.111	0.064	0.031	50	0.254	0.185	0.107	0.061	0.029
100	0.356	0.275	0.176	0.110	0.059	100	0.347	0.267	0.169	0.105	0.055
150	0.442	0.357	0.242	0.162	0.093	150	0.430	0.344	0.231	0.153	0.087
200	0.522	0.435	0.313	0.219	0.135	200	0.507	0.419	0.297	0.206	0.125
300	0.651	0.569	0.441	0.334	0.224	300	0.634	0.549	0.421	0.314	0.207

Таблица Б.40 –Мощность критерия $S_n^{(m)}$, $m = m^*$ (2.31) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.069	0.037	0.012	0.004	0.001
20	0.081	0.047	0.016	0.006	0.001
30	0.096	0.055	0.021	0.008	0.002
40	0.115	0.068	0.027	0.010	0.003
50	0.134	0.082	0.035	0.015	0.005
100	0.264	0.187	0.102	0.054	0.023
150	0.404	0.311	0.194	0.118	0.059
200	0.541	0.444	0.308	0.207	0.118
300	0.763	0.684	0.551	0.430	0.297

Таблица Б.41 –Мощность критерия $S_n^{(m)}$, $m = m^*$ (2.31) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.220	0.157	0.088	0.049	0.022
20	0.246	0.179	0.103	0.058	0.027
30	0.272	0.201	0.118	0.068	0.032
40	0.297	0.222	0.133	0.079	0.038
50	0.316	0.239	0.146	0.088	0.044
100	0.400	0.314	0.202	0.127	0.067
150	0.482	0.391	0.267	0.177	0.099
200	0.560	0.467	0.335	0.233	0.139
300	0.679	0.593	0.456	0.340	0.221

Таблица Б.42 – Мощность критерия $S_n^{(m)}$, $m = m^*$ (2.31) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.173	0.118	0.061	0.032	0.013
20	0.188	0.130	0.069	0.036	0.016
30	0.204	0.143	0.077	0.042	0.018
40	0.219	0.156	0.086	0.047	0.021
50	0.233	0.167	0.094	0.052	0.024
100	0.292	0.218	0.129	0.076	0.037
150	0.352	0.270	0.169	0.104	0.054
200	0.409	0.323	0.212	0.136	0.074
300	0.509	0.419	0.293	0.200	0.118

Таблица Б.43 – Мощность критерия $L_n^{(m)}$, $m = m^*$ (2.32) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.283	0.201	0.109	0.058	0.024
20	0.436	0.335	0.207	0.123	0.061
30	0.570	0.465	0.315	0.206	0.112
40	0.681	0.582	0.424	0.298	0.176
50	0.736	0.644	0.492	0.360	0.225
100	0.878	0.820	0.707	0.587	0.436
150	0.958	0.930	0.867	0.787	0.662
200	0.987	0.977	0.948	0.904	0.826
300	0.998	0.997	0.991	0.980	0.954

Таблица Б.44 – Мощность критерия $L_n^{(m)}$, $m = m^*$ (2.32) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.172	0.120	0.066	0.036	0.016
20	0.175	0.122	0.067	0.037	0.017
30	0.177	0.124	0.068	0.038	0.018
40	0.178	0.125	0.069	0.039	0.018
50	0.196	0.140	0.079	0.045	0.021
100	0.287	0.217	0.134	0.082	0.042
150	0.352	0.275	0.178	0.115	0.063
200	0.415	0.333	0.226	0.151	0.088
300	0.543	0.458	0.336	0.242	0.154

Таблица Б.45 – Мощность критерия $L_n^{(m)}$, $m = m^*$ (2.32) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.178	0.123	0.065	0.034	0.015
20	0.195	0.136	0.073	0.039	0.017
30	0.208	0.147	0.080	0.044	0.020
40	0.221	0.157	0.087	0.048	0.022
50	0.236	0.170	0.096	0.054	0.025
100	0.302	0.226	0.137	0.081	0.040
150	0.360	0.278	0.176	0.110	0.058
200	0.416	0.329	0.217	0.140	0.078
300	0.514	0.424	0.298	0.206	0.122

Таблица Б.46 – Мощность критерия $E_{m,n}$, $m = m^*$ (2.33) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.247	0.168	0.084	0.041	0.015
20	0.260	0.175	0.085	0.039	0.014
30	0.298	0.203	0.099	0.046	0.015
40	0.344	0.240	0.121	0.057	0.020
50	0.363	0.255	0.131	0.062	0.021
100	0.526	0.408	0.247	0.138	0.058
150	0.705	0.600	0.429	0.284	0.149
200	0.836	0.757	0.608	0.457	0.286
300	0.956	0.924	0.846	0.744	0.585

Таблица Б.47 – Мощность критерия $E_{m,n}$, $m = m^*$ (2.33) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.172	0.121	0.066	0.036	0.016
20	0.226	0.166	0.098	0.058	0.029
30	0.275	0.210	0.132	0.083	0.045
40	0.322	0.253	0.167	0.109	0.061
50	0.369	0.296	0.202	0.136	0.080
100	0.542	0.463	0.350	0.259	0.171
150	0.671	0.598	0.485	0.385	0.278
200	0.769	0.707	0.603	0.504	0.389
300	0.886	0.845	0.769	0.687	0.578

Таблица Б.48 – Мощность критерия $E_{m,n}$, $m = m^*$ (2.33) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.173	0.118	0.061	0.032	0.013
20	0.200	0.141	0.077	0.042	0.018
30	0.228	0.164	0.094	0.053	0.025
40	0.256	0.189	0.111	0.065	0.032
50	0.279	0.208	0.126	0.075	0.037
100	0.372	0.291	0.188	0.120	0.064
150	0.462	0.376	0.260	0.175	0.102
200	0.544	0.457	0.333	0.236	0.146
300	0.670	0.589	0.461	0.352	0.238

Таблица Б.49 –Мощность критерия Шварца A_n^* (2.34) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.220	0.154	0.081	0.040	0.014
20	0.309	0.233	0.142	0.083	0.038
30	0.377	0.296	0.193	0.123	0.065
40	0.433	0.350	0.239	0.160	0.091
50	0.482	0.398	0.284	0.198	0.119
100	0.661	0.583	0.463	0.361	0.252
150	0.773	0.708	0.598	0.496	0.378
200	0.847	0.794	0.701	0.608	0.490
300	0.930	0.900	0.837	0.767	0.668

Таблица Б.50 –Мощность критерия Шварца A_n^* (2.34) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.193	0.136	0.074	0.040	0.018
20	0.212	0.150	0.083	0.045	0.020
30	0.227	0.162	0.091	0.050	0.023
40	0.241	0.174	0.098	0.055	0.025
50	0.254	0.184	0.105	0.059	0.027
100	0.304	0.226	0.133	0.078	0.037
150	0.344	0.261	0.160	0.095	0.047
200	0.381	0.293	0.184	0.113	0.059
300	0.443	0.350	0.229	0.145	0.077

Таблица Б.51 –Мощность критерия Шварца A_n^* (2.34) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.184	0.129	0.070	0.038	0.017
20	0.202	0.143	0.080	0.045	0.021
30	0.215	0.154	0.087	0.049	0.023
40	0.227	0.163	0.093	0.053	0.026
50	0.237	0.172	0.100	0.058	0.028
100	0.277	0.206	0.123	0.073	0.036
150	0.309	0.233	0.143	0.087	0.044
200	0.336	0.257	0.161	0.099	0.052
300	0.384	0.300	0.193	0.123	0.067

Таблица Б.52 –Мощность модификации Андерсона-Дарлинга (2.35) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.199	0.131	0.062	0.029	0.010
20	0.297	0.208	0.109	0.055	0.022
30	0.386	0.283	0.159	0.085	0.036
40	0.467	0.356	0.212	0.119	0.053
50	0.544	0.429	0.268	0.157	0.073
100	0.820	0.730	0.560	0.396	0.227
150	0.943	0.897	0.784	0.638	0.441
200	0.985	0.967	0.911	0.818	0.649
300	0.999	0.998	0.990	0.969	0.908

Таблица Б.53 –Мощность модификации Андерсона-Дарлинга (2.35) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.195	0.135	0.070	0.035	0.013
20	0.257	0.189	0.110	0.062	0.028
30	0.319	0.245	0.153	0.093	0.047
40	0.378	0.299	0.197	0.126	0.068
50	0.435	0.354	0.243	0.162	0.091
100	0.662	0.585	0.461	0.352	0.236
150	0.810	0.750	0.642	0.531	0.399
200	0.897	0.856	0.773	0.680	0.551
300	0.972	0.957	0.919	0.866	0.781

Таблица Б.54 –Мощность модификации Андерсона-Дарлинга (2.35) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.195	0.135	0.070	0.035	0.013
20	0.257	0.189	0.110	0.062	0.028
30	0.319	0.245	0.153	0.093	0.047
40	0.378	0.299	0.197	0.126	0.068
50	0.435	0.354	0.243	0.162	0.091
100	0.662	0.585	0.461	0.352	0.236
150	0.810	0.750	0.642	0.531	0.399
200	0.897	0.856	0.773	0.680	0.551
300	0.972	0.957	0.919	0.866	0.781

ПРИЛОЖЕНИЕ В ТАБЛИЦЫ ПРОЦЕНТНЫХ ТОЧЕК СТАТИСТИК КРИТЕРИЕВ ПОКАЗАТЕЛЬНОСТИ

Таблица В.1 – Критические значения статистики (3.1) Шапиро-Уилка W_E

n	$1-\alpha$							
	0.9		0.95		0.975		0.99	
	$W_{E,1}$	$W_{E,2}$	$W_{E,1}$	$W_{E,2}$	$W_{E,1}$	$W_{E,2}$	$W_{E,1}$	$W_{E,2}$
5	0.120	0.665	0.104	0.760	0.093	0.834	0.083	0.902
6	0.097	0.519	0.083	0.604	0.073	0.683	0.064	0.774
7	0.082	0.421	0.070	0.489	0.061	0.558	0.053	0.646
8	0.072	0.351	0.061	0.406	0.053	0.463	0.046	0.539
9	0.064	0.298	0.054	0.344	0.047	0.391	0.040	0.455
10	0.057	0.258	0.049	0.296	0.043	0.336	0.036	0.390
11	0.052	0.226	0.045	0.259	0.039	0.292	0.033	0.338
12	0.048	0.201	0.041	0.229	0.036	0.258	0.031	0.296
13	0.045	0.179	0.039	0.204	0.034	0.229	0.029	0.263
14	0.042	0.163	0.036	0.184	0.032	0.206	0.027	0.236
15	0.039	0.148	0.034	0.167	0.030	0.186	0.025	0.212
16	0.037	0.136	0.032	0.153	0.028	0.170	0.024	0.193
17	0.035	0.125	0.030	0.141	0.027	0.156	0.023	0.177
18	0.033	0.116	0.029	0.130	0.026	0.144	0.022	0.162
19	0.032	0.108	0.028	0.121	0.024	0.133	0.021	0.150
20	0.030	0.101	0.027	0.112	0.023	0.124	0.020	0.139
21	0.029	0.095	0.025	0.105	0.023	0.116	0.019	0.130
22	0.028	0.089	0.025	0.099	0.022	0.109	0.019	0.121
23	0.027	0.084	0.024	0.093	0.021	0.102	0.018	0.114
24	0.026	0.080	0.023	0.088	0.020	0.096	0.018	0.107
25	0.025	0.075	0.022	0.083	0.020	0.091	0.017	0.101
26	0.024	0.072	0.021	0.079	0.019	0.086	0.017	0.096
27	0.023	0.068	0.021	0.075	0.018	0.082	0.016	0.090
28	0.023	0.065	0.020	0.072	0.018	0.078	0.016	0.086
29	0.022	0.062	0.020	0.068	0.017	0.074	0.015	0.082
30	0.021	0.060	0.019	0.065	0.017	0.071	0.015	0.078
35	0.019	0.049	0.017	0.053	0.015	0.058	0.013	0.063
40	0.017	0.042	0.015	0.045	0.014	0.048	0.012	0.053
50	0.013	0.032	0.012	0.034	0.011	0.036	0.010	0.039
100	0.007	0.014	0.007	0.015	0.007	0.015	0.006	0.016
150	0.005	0.009	0.005	0.009	0.005	0.009	0.004	0.010
200	0.004	0.006	0.004	0.007	0.004	0.007	0.003	0.007
300	0.003	0.004	0.003	0.004	0.003	0.004	0.002	0.004

Таблица В.2 – Критические значения статистики (3.3) Шапиро-Уилка \tilde{W}_{E_0}

n	$1-\alpha$							
	0.9		0.95		0.975		0.99	
	$W_{E_0,1}$	$W_{E_0,2}$	$W_{E_0,1}$	$W_{E_0,2}$	$W_{E_0,1}$	$W_{E_0,2}$	$W_{E_0,1}$	$W_{E_0,2}$
5	0.098	0.520	0.083	0.605	0.073	0.684	0.064	0.774
6	0.082	0.421	0.070	0.489	0.061	0.558	0.053	0.645
7	0.072	0.351	0.061	0.406	0.053	0.462	0.046	0.538
8	0.064	0.298	0.054	0.344	0.047	0.390	0.040	0.455
9	0.057	0.258	0.049	0.296	0.043	0.336	0.036	0.389
10	0.052	0.226	0.045	0.259	0.039	0.292	0.033	0.337
11	0.048	0.200	0.042	0.229	0.036	0.258	0.031	0.297
12	0.045	0.180	0.039	0.204	0.034	0.229	0.029	0.263
13	0.042	0.162	0.036	0.184	0.032	0.206	0.027	0.235
14	0.039	0.148	0.034	0.167	0.030	0.187	0.025	0.213
15	0.037	0.136	0.032	0.153	0.028	0.170	0.024	0.193
16	0.035	0.125	0.030	0.140	0.027	0.156	0.023	0.177
17	0.033	0.116	0.029	0.130	0.026	0.144	0.022	0.162
18	0.031	0.108	0.028	0.121	0.025	0.133	0.021	0.150
19	0.030	0.101	0.027	0.112	0.023	0.124	0.020	0.139
20	0.029	0.095	0.026	0.105	0.023	0.116	0.019	0.130
21	0.028	0.089	0.025	0.099	0.022	0.108	0.019	0.121
22	0.027	0.084	0.024	0.093	0.021	0.102	0.018	0.114
23	0.026	0.079	0.023	0.088	0.020	0.096	0.018	0.107
24	0.025	0.075	0.022	0.083	0.020	0.091	0.017	0.101
25	0.024	0.072	0.021	0.079	0.019	0.086	0.017	0.096
26	0.023	0.068	0.021	0.075	0.018	0.082	0.016	0.091
27	0.023	0.065	0.020	0.072	0.018	0.078	0.016	0.086
28	0.022	0.062	0.020	0.068	0.017	0.074	0.015	0.082
29	0.021	0.060	0.019	0.065	0.017	0.071	0.015	0.078
30	0.020	0.057	0.018	0.063	0.017	0.068	0.015	0.075
35	0.018	0.047	0.016	0.052	0.015	0.056	0.013	0.061
40	0.016	0.040	0.015	0.044	0.013	0.047	0.012	0.051
50	0.013	0.031	0.012	0.033	0.011	0.035	0.010	0.038
100	0.007	0.014	0.007	0.014	0.006	0.015	0.006	0.016
150	0.005	0.009	0.005	0.009	0.005	0.009	0.005	0.010
200	0.004	0.006	0.004	0.007	0.004	0.007	0.003	0.007
300	0.003	0.004	0.003	0.004	0.003	0.004	0.002	0.004

Таблица В.3 – Критические значения статистики (3.4) критерия показательности Фросини

n	α			n	α		
	0.1	0.05	0.01		0.1	0.05	0.01
5	0.326	0.367	0.445	18	0.337	0.381	0.4735
6	0.327	0.370	0.455	19	0.337	0.382	0.474
7	0.329	0.373	0.459	20	0.337	0.3815	0.474
8	0.331	0.375	0.462	25	0.338	0.383	0.4755
9	0.333	0.377	0.464	30	0.338	0.383	0.476
10	0.333	0.377	0.466	35	0.338	0.384	0.477
11	0.334	0.378	0.468	40	0.338	0.384	0.477
12	0.334	0.379	0.469	50	0.339	0.384	0.478
13	0.335	0.379	0.470	100	0.340	0.385	0.480
14	0.335	0.380	0.471	150	0.340	0.385	0.480
15	0.336	0.380	0.4715	200	0.340	0.3855	0.480
16	0.336	0.380	0.4715	300	0.340	0.386	0.480
17	0.337	0.381	0.473	500	0.340	0.3855	0.481

Таблица В.4 – Критические значения статистик (3.6-3.7) корреляционного критерия показательности

n	$K(z, m, \alpha)$			$K(z, \tilde{m}, \alpha)$		
	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
5	1.012	1.321	1.957	0.964	1.182	1.739
10	1.553	1.9165	2.671	1.533	1.925	2.733
15	1.913	2.384	3.426	1.943	2.508	3.812
20	2.204	2.771	4.116	2.288	3.014	4.790
25	2.447	3.101	4.724	2.584	3.451	5.628
30	2.660	3.391	5.309	2.846	3.846	6.410
40	3.016	3.881	6.318	3.292	4.517	7.723
50	3.311	4.292	7.167	3.662	5.066	8.822
100	4.320	5.704	10.150	4.943	6.965	12.601
150	4.964	6.606	11.978	5.756	8.145	14.897
200	5.432	7.260	13.317	6.351	9.006	16.571
300	6.119	8.195	15.167	7.193	10.199	18.870

Таблица В.5 – Критические значения статистики (3.8) критерия Кимбера-Мичела

n	α			n	α		
	0.1	0.05	0.01		0.1	0.05	0.01
3	0.241	0.266	0.302	18	0.152	0.170	0.208
4	0.232	0.262	0.308	20	0.147	0.164	0.200
5	0.223	0.252	0.301	30	0.126	0.140	0.171
6	0.215	0.2415	0.292	40	0.1125	0.125	0.152
7	0.206	0.232	0.281	50	0.103	0.114	0.139
8	0.199	0.224	0.272	60	0.096	0.106	0.128
9	0.192	0.216	0.263	80	0.085	0.094	0.113
10	0.186	0.209	0.254	100	0.077	0.085	0.103
12	0.175	0.197	0.240	150	0.065	0.072	0.086
14	0.167	0.187	0.228	200	0.057	0.063	0.075
16	0.159	0.178	0.218	300	0.048	0.053	0.063

Таблица В.6 – Критические значения статистики (3.11) критерия показательности Пиэтра

n	$1-\alpha$							
	0.9		0.95		0.975		0.99	
	$\omega_{n,1}$	$\omega_{n,2}$	$\omega_{n,1}$	$\omega_{n,2}$	$\omega_{n,1}$	$\omega_{n,2}$	$\omega_{n,1}$	$\omega_{n,2}$
2	0.025	0.475	0.012	0.487	0.006	0.494	0.002	0.498
3	0.091	0.538	0.065	0.576	0.046	0.602	0.029	0.626
4	0.136	0.518	0.108	0.566	0.085	0.604	0.063	0.642
5	0.163	0.509	0.138	0.544	0.116	0.578	0.092	0.622
6	0.183	0.502	0.159	0.536	0.138	0.565	0.115	0.600
7	0.198	0.494	0.174	0.525	0.155	0.553	0.133	0.587
8	0.210	0.488	0.188	0.517	0.169	0.543	0.147	0.575
9	0.220	0.482	0.198	0.510	0.180	0.535	0.159	0.564
10	0.228	0.478	0.208	0.504	0.190	0.527	0.170	0.555
11	0.235	0.473	0.215	0.498	0.198	0.520	0.179	0.547
12	0.241	0.470	0.222	0.493	0.206	0.515	0.186	0.540
13	0.247	0.466	0.228	0.489	0.212	0.510	0.194	0.534
14	0.251	0.463	0.233	0.485	0.218	0.505	0.200	0.528
15	0.256	0.460	0.238	0.481	0.223	0.500	0.205	0.523
16	0.259	0.458	0.242	0.478	0.228	0.496	0.211	0.518
17	0.263	0.456	0.246	0.475	0.232	0.493	0.215	0.514
18	0.266	0.453	0.250	0.473	0.236	0.490	0.219	0.510
19	0.269	0.451	0.253	0.470	0.239	0.487	0.224	0.507
20	0.272	0.449	0.256	0.468	0.243	0.484	0.227	0.503
30	0.290	0.436	0.277	0.450	0.266	0.464	0.253	0.479
40	0.301	0.427	0.290	0.440	0.280	0.451	0.268	0.465
50	0.308	0.421	0.298	0.433	0.289	0.443	0.278	0.455
100	0.326	0.406	0.319	0.414	0.313	0.421	0.305	0.430
150	0.334	0.400	0.328	0.406	0.323	0.412	0.316	0.419
200	0.339	0.395	0.334	0.401	0.329	0.406	0.323	0.412
300	0.344	0.390	0.340	0.395	0.336	0.399	0.332	0.404

Таблица В.7 – Критические значения статистики (3.14) критерия показательности Холландера-Прошана

n	$1-\alpha$							
	0.9		0.95		0.975		0.99	
	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2
10	-1.902	1.312	-2.427	1.443	-2.951	1.508	-3.541	1.640
15	-1.875	1.339	-2.354	1.499	-2.832	1.636	-3.425	1.772
20	-1.841	1.384	-2.321	1.558	-2.778	1.700	-3.356	1.852
25	-1.833	1.407	-2.296	1.592	-2.734	1.746	-3.283	1.913
30	-1.819	1.426	-2.269	1.620	-2.697	1.784	-3.225	1.958
40	-1.801	1.455	-2.234	1.664	-2.640	1.838	-3.145	2.032
50	-1.786	1.474	-2.208	1.694	-2.603	1.878	-3.106	2.083
100	-1.749	1.525	-2.140	1.769	-2.504	1.980	-2.954	2.218
150	-1.731	1.548	-2.108	1.804	-2.455	2.027	-2.885	2.283

Таблица В.8 – Критические значения статистики (3.12) критерия Эпса-Палли

n	$1-\alpha$							
	0.9		0.95		0.975		0.99	
	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2
5	-1.603	1.193	-1.734	1.581	-1.826	1.941	-1.908	2.387
10	-1.653	1.404	-1.843	1.795	-1.999	2.158	-2.168	2.596
15	-1.667	1.470	-1.883	1.854	-2.063	2.205	-2.262	2.633
20	-1.675	1.503	-1.903	1.880	-2.101	2.223	-2.318	2.642
25	-1.677	1.523	-1.918	1.894	-2.123	2.234	-2.354	2.647
30	-1.679	1.536	-1.926	1.904	-2.137	2.239	-2.377	2.646
35	-1.677	1.550	-1.931	1.910	-2.147	2.239	-2.395	2.645
40	-1.680	1.555	-1.937	1.916	-2.156	2.247	-2.408	2.643
45	-1.678	1.561	-1.938	1.920	-2.166	2.245	-2.426	2.641
50	-1.677	1.569	-1.943	1.924	-2.171	2.243	-2.441	2.637
60	-1.676	1.576	-1.945	1.928	-2.178	2.251	-2.449	2.645
70	-1.675	1.582	-1.947	1.931	-2.185	2.248	-2.461	2.630
80	-1.673	1.585	-1.948	1.936	-2.187	2.252	-2.469	2.635
90	-1.673	1.589	-1.952	1.935	-2.193	2.250	-2.477	2.635
100	-1.671	1.595	-1.951	1.939	-2.198	2.254	-2.485	2.634
150	-1.669	1.607	-1.956	1.947	-2.209	2.253	-2.503	2.616
200	-1.669	1.608	-1.959	1.946	-2.214	2.252	-2.517	2.615
300	-1.662	1.615	-1.959	1.947	-2.222	2.248	-2.528	2.609

Таблица В.9 – Критические значения статистики (3.15) критерия наибольшего интервала

n	α							
	0.9		0.95		0.975		0.99	
	η_1	η_2	η_1	η_2	η_1	η_2	η_1	η_2
2	0.050	0.900	0.025	0.950	0.013	0.975	0.005	0.990
3	0.047	0.778	0.024	0.843	0.012	0.889	0.005	0.930
4	0.065	0.679	0.038	0.745	0.021	0.797	0.009	0.851
5	0.083	0.602	0.057	0.666	0.038	0.719	0.020	0.776
6	0.092	0.543	0.070	0.602	0.053	0.653	0.034	0.712
7	0.097	0.495	0.078	0.550	0.062	0.599	0.045	0.656
8	0.100	0.455	0.081	0.506	0.067	0.553	0.052	0.607
9	0.100	0.422	0.083	0.470	0.071	0.514	0.056	0.567
10	0.099	0.393	0.084	0.438	0.072	0.480	0.059	0.530
15	0.088	0.297	0.078	0.331	0.070	0.363	0.061	0.403
20	0.078	0.241	0.070	0.268	0.064	0.294	0.057	0.328
30	0.064	0.177	0.058	0.197	0.054	0.216	0.049	0.240
40	0.054	0.142	0.050	0.157	0.046	0.172	0.042	0.191
50	0.047	0.119	0.044	0.131	0.041	0.143	0.038	0.159
60	0.042	0.102	0.039	0.113	0.037	0.123	0.034	0.137
100	0.030	0.067	0.028	0.074	0.026	0.080	0.025	0.089
120	0.026	0.058	0.025	0.063	0.023	0.069	0.022	0.076
150	0.022	0.048	0.021	0.052	0.020	0.057	0.019	0.062
200	0.018	0.037	0.017	0.041	0.016	0.044	0.015	0.049
300	0.013	0.026	0.013	0.029	0.012	0.031	0.012	0.034

Таблица В.10 – Критические значения статистики (3.16) критерия Кочара

n	$1-\alpha$							
	0.9		0.95		0.975		0.99	
	$T_{n,1}$	$T_{n,2}$	$T_{n,1}$	$T_{n,2}$	$T_{n,1}$	$T_{n,2}$	$T_{n,1}$	$T_{n,2}$
5	0.750	2.486	0.568	2.606	0.416	2.706	0.251	2.814
6	0.600	2.499	0.395	2.635	0.218	2.747	0.019	2.871
7	0.469	2.503	0.248	2.651	0.052	2.776	-0.170	2.913
8	0.358	2.502	0.125	2.660	-0.083	2.793	-0.325	2.943
9	0.260	2.497	0.016	2.665	-0.203	2.804	-0.460	2.963
10	0.175	2.490	-0.078	2.664	-0.303	2.812	-0.574	2.976
11	0.100	2.481	-0.159	2.662	-0.391	2.817	-0.668	2.994
12	0.034	2.471	-0.233	2.659	-0.475	2.820	-0.762	3.001
13	-0.029	2.462	-0.301	2.654	-0.548	2.819	-0.838	3.006
14	-0.081	2.453	-0.359	2.650	-0.609	2.821	-0.909	3.016
15	-0.129	2.443	-0.413	2.644	-0.667	2.817	-0.971	3.013
16	-0.174	2.433	-0.462	2.639	-0.721	2.815	-1.025	3.019
17	-0.219	2.425	-0.510	2.634	-0.772	2.812	-1.081	3.017
18	-0.255	2.416	-0.549	2.629	-0.812	2.812	-1.127	3.019
19	-0.292	2.407	-0.590	2.621	-0.859	2.808	-1.177	3.021
20	-0.326	2.396	-0.622	2.615	-0.891	2.805	-1.208	3.023
25	-0.464	2.356	-0.767	2.588	-1.045	2.787	-1.375	3.018
30	-0.564	2.322	-0.876	2.559	-1.158	2.769	-1.498	3.009
40	-0.714	2.266	-1.031	2.517	-1.320	2.734	-1.667	2.985
50	-0.814	2.218	-1.134	2.479	-1.423	2.707	-1.771	2.972
100	-1.066	2.087	-1.393	2.365	-1.685	2.610	-2.038	2.898
150	-1.178	2.020	-1.504	2.308	-1.797	2.560	-2.144	2.855
200	-1.241	1.978	-1.565	2.270	-1.858	2.527	-2.209	2.828
300	-1.317	1.922	-1.640	2.217	-1.931	2.481	-2.284	2.795

Таблица В.11 – Критические значения статистики (3.17) критерия Клишко-Антла-Радемакера-Рокетта

n	$1-\alpha$							
	0.9		0.95		0.975		0.99	
	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2	c_1	c_2
5	-0.538	2.030	-0.666	2.346	-0.758	2.581	-0.843	2.789
10	-0.816	2.098	-1.003	2.509	-1.158	2.904	-1.324	3.410
20	-1.053	2.051	-1.289	2.441	-1.492	2.810	-1.722	3.279
30	-1.171	2.010	-1.432	2.389	-1.662	2.744	-1.929	3.181
40	-1.249	1.988	-1.526	2.355	-1.776	2.698	-2.064	3.115
50	-1.304	1.966	-1.594	2.328	-1.851	2.663	-2.156	3.081
100	-1.449	1.915	-1.767	2.266	-2.053	2.584	-2.397	2.964
150	-1.516	1.890	-1.842	2.237	-2.137	2.550	-2.503	2.922
200	-1.554	1.877	-1.888	2.222	-2.188	2.529	-2.554	2.905
300	-1.600	1.859	-1.937	2.196	-2.243	2.504	-2.615	2.880

Таблица В.12– Критические значения статистики (3.19) критерия Гринвуда

n	$1-\alpha$							
	0.9		0.95		0.975		0.99	
	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2	G_1	G_2
5	1.154	2.545	1.109	2.839	1.077	3.118	1.049	3.442
6	1.197	2.590	1.149	2.890	1.113	3.190	1.079	3.566
7	1.232	2.618	1.183	2.919	1.146	3.227	1.107	3.621
8	1.262	2.635	1.212	2.933	1.173	3.237	1.133	3.639
9	1.288	2.644	1.237	2.939	1.198	3.237	1.157	3.647
10	1.311	2.646	1.261	2.932	1.220	3.229	1.179	3.633
11	1.332	2.644	1.281	2.924	1.240	3.217	1.197	3.615
13	1.368	2.637	1.317	2.906	1.276	3.188	1.232	3.576
15	1.398	2.624	1.347	2.882	1.306	3.148	1.261	3.521
17	1.423	2.612	1.372	2.859	1.332	3.114	1.287	3.473
19	1.445	2.597	1.395	2.834	1.354	3.081	1.309	3.428
20	1.456	2.590	1.405	2.818	1.364	3.056	1.319	3.395
21	1.466	2.583	1.414	2.809	1.374	3.045	1.329	3.377
26	1.505	2.550	1.456	2.754	1.416	2.967	1.372	3.267
30	1.531	2.525	1.483	2.714	1.443	2.913	1.400	3.192
31	1.538	2.521	1.490	2.709	1.450	2.904	1.406	3.177
36	1.563	2.494	1.516	2.669	1.477	2.847	1.435	3.094
40	1.581	2.476	1.534	2.641	1.497	2.811	1.455	3.049
41	1.585	2.472	1.539	2.634	1.501	2.800	1.458	3.033
46	1.604	2.452	1.559	2.603	1.521	2.758	1.480	2.977
50	1.617	2.438	1.572	2.583	1.535	2.730	1.494	2.938
51	1.620	2.434	1.576	2.578	1.539	2.722	1.498	2.927
100	1.713	2.327	1.675	2.424	1.644	2.520	1.608	2.651
150	1.760	2.271	1.726	2.347	1.698	2.421	1.666	2.521
200	1.789	2.236	1.758	2.300	1.732	2.361	1.702	2.443
300	1.824	2.194	1.798	2.243	1.775	2.291	1.748	2.352

Таблица В.13 – Критические значения статистики (3.21) критерия Лоулесса

n	$1-\alpha$							
	0.9		0.95		0.975		0.99	
	W_1	W_2	W_1	W_2	W_1	W_2	W_1	W_2
5	0.330	0.917	0.274	0.943	0.229	0.960	0.181	0.975
6	0.342	0.891	0.289	0.920	0.247	0.940	0.201	0.959
7	0.352	0.869	0.303	0.899	0.263	0.922	0.219	0.944
8	0.361	0.851	0.315	0.881	0.276	0.905	0.234	0.929
9	0.368	0.835	0.324	0.866	0.288	0.890	0.247	0.914
10	0.376	0.821	0.334	0.851	0.298	0.876	0.259	0.902
11	0.382	0.809	0.342	0.839	0.308	0.864	0.270	0.890
12	0.388	0.798	0.349	0.828	0.316	0.853	0.279	0.879
13	0.393	0.788	0.356	0.818	0.323	0.843	0.287	0.869
14	0.398	0.780	0.361	0.810	0.330	0.834	0.295	0.860
15	0.402	0.772	0.367	0.801	0.337	0.825	0.303	0.852
16	0.406	0.766	0.372	0.794	0.343	0.809	0.818	0.844

n	$1-\alpha$							
	0.9		0.95		0.975		0.99	
	W_1	W_2	W_1	W_2	W_1	W_2	W_1	W_2
17	0.410	0.759	0.377	0.787	0.348	0.811	0.315	0.837
18	0.413	0.753	0.381	0.781	0.353	0.804	0.321	0.830
19	0.416	0.748	0.385	0.775	0.357	0.798	0.326	0.824
20	0.419	0.743	0.389	0.770	0.362	0.792	0.331	0.818
21	0.422	0.7385	0.392	0.765	0.366	0.787	0.336	0.812
22	0.425	0.734	0.395	0.760	0.370	0.782	0.340	0.807
23	0.427	0.730	0.398	0.755	0.374	0.777	0.344	0.802
24	0.430	0.727	0.401	0.752	0.377	0.773	0.348	0.797
25	0.432	0.723	0.404	0.748	0.380	0.769	0.352	0.793
30	0.442	0.708	0.416	0.731	0.394	0.751	0.368	0.774
40	0.456	0.688	0.434	0.708	0.414	0.726	0.391	0.746
50	0.466	0.674	0.446	0.692	0.429	0.709	0.408	0.728
100	0.492	0.6395	0.478	0.653	0.465	0.665	0.450	0.680
150	0.504	0.625	0.492	0.636	0.482	0.646	0.470	0.658
200	0.511	0.616	0.501	0.626	0.492	0.634	0.482	0.645
300	0.520	0.606	0.512	0.614	0.505	0.621	0.496	0.629

Таблица В.14 – Критические значения статистики (3.23) критерия Эпштейна

n	$1-\alpha$							
	0.9		0.95		0.975		0.99	
	$EPS_{n,1}$	$EPS_{n,2}$	$EPS_{n,1}$	$EPS_{n,2}$	$EPS_{n,1}$	$EPS_{n,2}$	$EPS_{n,1}$	$EPS_{n,2}$
10	0.984	19.847	0.100	22.774	-0.591	25.527	-1.292	29.078
20	7.762	32.560	6.257	35.925	5.017	39.080	3.672	43.029
30	15.406	44.562	13.456	48.253	11.804	51.710	9.975	55.987
40	23.438	56.235	21.113	60.259	19.156	63.982	16.931	68.568
50	31.720	67.703	29.067	71.975	26.776	75.951	24.200	80.831
100	74.783	123.427	70.866	128.872	67.465	133.823	63.542	139.852
150	119.316	177.766	114.416	184.159	110.166	189.986	105.299	197.004
200	164.597	231.406	158.908	238.515	153.961	244.895	148.242	252.853
300	256.499	337.328	249.463	345.757	243.286	353.408	236.096	362.634

Таблица В.15 – Критические значения статистики (3.24) критерия Морана

n	$1-\alpha$							
	0.9		0.95		0.975		0.99	
	$T_{n,1}^+$	$T_{n,2}^+$	$T_{n,1}^+$	$T_{n,2}^+$	$T_{n,1}^+$	$T_{n,2}^+$	$T_{n,1}^+$	$T_{n,2}^+$
10	-0.402	0.380	-0.520	0.416	-0.632	0.445	-0.773	0.474
20	-0.292	0.280	-0.368	0.316	-0.440	0.345	-0.528	0.376
30	-0.239	0.232	-0.299	0.264	-0.353	0.291	-0.421	0.321
40	-0.208	0.203	-0.258	0.232	-0.304	0.257	-0.361	0.285
50	-0.1865	0.182	-0.230	0.209	-0.270	0.233	-0.320	0.259
100	-0.132	0.130	-0.161	0.151	-0.188	0.170	-0.221	0.191
150	-0.108	0.107	-0.131	0.125	-0.153	0.140	-0.178	0.158
200	-0.094	0.093	-0.113	0.108	-0.131	0.122	-0.153	0.138
300	-0.076	0.076	-0.092	0.089	-0.107	0.101	-0.124	0.114

Таблица В.16 – Критические значения статистик (3.27-3.28) критерия показательности Хегazi-Грина

n	T_1			T_2		
	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$	$\alpha=0.1$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.01$
10	0.583	0.718	1.013	0.800	1.257	2.630
20	0.412	0.493	0.678	0.470	0.713	1.428
30	0.337	0.398	0.538	0.338	0.505	0.985
40	0.292	0.342	0.457	0.267	0.393	0.755
50	0.261	0.304	0.403	0.222	0.014	0.614
100	0.184	0.213	0.277	0.123	0.175	0.323
150	0.150	0.173	0.224	0.087	0.122	0.221
200	0.130	0.150	0.193	0.068	0.094	0.169
300	0.107	0.122	0.156	0.047	0.065	0.115

ПРИЛОЖЕНИЕ Г ТАБЛИЦЫ ОЦЕНОК МОЩНОСТИ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ ПОКАЗАТЕЛЬНОСТИ

Таблица Г.1 – Мощность критерия Шапиро-Уилка со статистиками (3.1) и (3.3)

относительно гипотезы H_1

W_E						\tilde{W}_{E0}					
n	α					n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.257	0.197	0.128	0.084	0.049	10	0.253	0.192	0.1205	0.076	0.043
20	0.343	0.280	0.201	0.146	0.097	20	0.313	0.250	0.174	0.123	0.079
30	0.409	0.346	0.261	0.198	0.139	30	0.358	0.296	0.217	0.161	0.110
40	0.463	0.399	0.312	0.244	0.178	40	0.397	0.335	0.254	0.195	0.139
50	0.511	0.448	0.359	0.288	0.215	50	0.434	0.372	0.290	0.227	0.166
100	0.681	0.629	0.541	0.464	0.376	100	0.580	0.524	0.440	0.370	0.294
150	0.788	0.744	0.670	0.599	0.508	150	0.689	0.639	0.560	0.490	0.407
200	0.857	0.823	0.762	0.700	0.618	200	0.769	0.727	0.656	0.589	0.507
300	0.935	0.915	0.878	0.836	0.774	300	0.874	0.845	0.793	0.740	0.667

Таблица Г.2 – Мощность критерия Шапиро-Уилка со статистиками (3.1) и (3.3)

относительно гипотезы H_2

W_E						\tilde{W}_{E0}					
n	α					n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.322	0.253	0.168	0.11	0.064	10	0.383	0.310	0.214	0.146	0.088
20	0.491	0.411	0.300	0.215	0.136	20	0.545	0.465	0.348	0.255	0.1645
30	0.622	0.543	0.422	0.318	0.213	30	0.666	0.589	0.466	0.358	0.243
40	0.722	0.650	0.529	0.415	0.292	40	0.757	0.688	0.568	0.454	0.324
50	0.798	0.735	0.621	0.509	0.374	50	0.825	0.766	0.657	0.545	0.406
100	0.963	0.943	0.893	0.827	0.718	100	0.969	0.951	0.906	0.844	0.740
150	0.994	0.989	0.976	0.952	0.901	150	0.995	0.991	0.979	0.958	0.910
200	0.322	0.253	0.168	0.11	0.064	200	0.999	0.998	0.996	0.990	0.974
300	0.491	0.411	0.300	0.215	0.136	300	1	1	1	1	0.999

Таблица Г.3 – Мощность критерия Шапиро-Уилка со статистиками (3.1) и (3.3) относительно гипотезы H_3

W_E						\tilde{W}_{E0}					
n	α					n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01		0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.170	0.116	0.061	0.031	0.013	10	0.202	0.142	0.078	0.042	0.018
20	0.231	0.168	0.096	0.055	0.025	20	0.278	0.208	0.125	0.073	0.035
30	0.295	0.224	0.136	0.081	0.041	30	0.348	0.270	0.172	0.107	0.056
40	0.356	0.278	0.1785	0.112	0.060	40	0.412	0.329	0.219	0.143	0.079
50	0.414	0.332	0.223	0.145	0.079	50	0.471	0.386	0.266	0.179	0.102
100	0.650	0.568	0.438	0.327	0.215	100	0.696	0.617	0.489	0.374	0.253
150	0.799	0.734	0.618	0.504	0.370	150	0.830	0.771	0.662	0.551	0.415
200	0.887	0.842	0.751	0.652	0.518	200	0.907	0.867	0.785	0.692	0.563
300	0.967	0.949	0.906	0.848	0.751	300	0.974	0.959	0.922	0.870	0.782

Таблица Г.4 – Мощность критерия Фросини (3.4) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.244	0.178	0.103	0.061	0.032
20	0.329	0.249	0.154	0.096	0.054
30	0.408	0.317	0.204	0.131	0.075
40	0.483	0.385	0.255	0.168	0.098
50	0.554	0.452	0.310	0.208	0.123
100	0.814	0.733	0.585	0.444	0.294
150	0.936	0.891	0.791	0.670	0.506
200	0.981	0.962	0.910	0.830	0.696
300	0.999	0.997	0.988	0.969	0.918

Таблица Г.5 – Мощность критерия Фросини (3.4) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.376	0.311	0.228	0.168	0.114
20	0.591	0.525	0.426	0.342	0.253
30	0.738	0.681	0.587	0.499	0.397
40	0.835	0.791	0.711	0.631	0.528
50	0.898	0.866	0.804	0.735	0.640
100	0.992	0.988	0.977	0.961	0.933
150	0.9995	0.999	0.998	0.996	0.991
200	1	1	1	0.999	0.998
300	1	1	1	1	1

Таблица Г.6 – Мощность критерия Фросини (3.4) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.231	0.165	0.092	0.049	0.020
20	0.304	0.230	0.139	0.081	0.037
30	0.373	0.293	0.188	0.117	0.059
40	0.438	0.355	0.239	0.155	0.084
50	0.499	0.414	0.291	0.196	0.111
100	0.732	0.658	0.533	0.414	0.280
150	0.865	0.814	0.716	0.608	0.467
200	0.936	0.905	0.838	0.756	0.631
300	0.987	0.978	0.955	0.919	0.852

Таблица Г.7 – Мощности корреляционного критерия (3.6-3.7) относительно гипотезы H_1

n	$K(z, m)$					$K(z, \tilde{m})$				
	α					α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.211	0.155	0.093	0.056	0.028	0.257	0.198	0.129	0.086	0.051
20	0.305	0.248	0.178	0.131	0.088	0.368	0.303	0.218	0.156	0.099
30	0.379	0.319	0.242	0.185	0.128	0.447	0.378	0.281	0.205	0.135
40	0.439	0.379	0.296	0.231	0.162	0.509	0.437	0.331	0.247	0.167
50	0.492	0.431	0.344	0.271	0.192	0.561	0.488	0.377	0.285	0.196
100	0.680	0.621	0.525	0.432	0.321	0.734	0.665	0.548	0.439	0.321
150	0.794	0.744	0.653	0.556	0.430	0.833	0.775	0.667	0.558	0.429
200	0.868	0.828	0.748	0.656	0.526	0.894	0.849	0.756	0.654	0.521
300	0.947	0.924	0.871	0.801	0.683	0.958	0.933	0.872	0.793	0.673

Таблица Г.8 – Мощности корреляционного критерия (3.6-3.7) относительно гипотезы H_2

n	$K(z, m)$					$K(z, \tilde{m})$				
	α					α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.208	0.148	0.084	0.049	0.023	0.269	0.205	0.129	0.083	0.047
20	0.295	0.230	0.153	0.104	0.063	0.372	0.296	0.199	0.131	0.075
30	0.360	0.289	0.201	0.140	0.086	0.440	0.356	0.243	0.161	0.092
40	0.414	0.339	0.241	0.170	0.103	0.493	0.404	0.278	0.186	0.108
50	0.463	0.383	0.276	0.195	0.118	0.539	0.446	0.311	0.208	0.122
100	0.644	0.557	0.422	0.306	0.186	0.701	0.602	0.442	0.310	0.186
150	0.767	0.685	0.542	0.404	0.255	0.804	0.713	0.549	0.399	0.250
200	0.851	0.782	0.644	0.497	0.322	0.874	0.797	0.640	0.483	0.312
300	0.944	0.903	0.800	0.661	0.460	0.951	0.904	0.783	0.632	0.438

Таблица Г.9 – Мощности корреляционного критерия (3.6-3.7) относительно гипотезы H_3

n	$K(z, m)$					$K(z, \tilde{m})$				
	α					α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.170	0.117	0.062	0.033	0.015	0.139	0.090	0.042	0.020	0.008
20	0.171	0.114	0.055	0.025	0.008	0.122	0.073	0.029	0.011	0.003
30	0.175	0.115	0.053	0.022	0.006	0.115	0.066	0.024	0.008	0.002
40	0.181	0.118	0.052	0.020	0.005	0.111	0.061	0.021	0.007	0.002
50	0.188	0.122	0.053	0.019	0.004	0.109	0.059	0.019	0.006	0.002
100	0.226	0.146	0.060	0.019	0.003	0.114	0.058	0.016	0.005	0.001
150	0.267	0.175	0.072	0.022	0.003	0.129	0.063	0.017	0.005	0.001
200	0.309	0.207	0.087	0.027	0.004	0.149	0.072	0.018	0.005	0.001
300	0.391	0.273	0.123	0.040	0.005	0.197	0.099	0.024	0.005	0.001

Таблица Г.10 – Мощность критерия Кимбера-Мичела (3.8) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.261	0.189	0.107	0.060	0.028
20	0.409	0.315	0.196	0.117	0.057
30	0.546	0.444	0.300	0.192	0.101
40	0.666	0.567	0.409	0.280	0.159
50	0.763	0.673	0.516	0.375	0.229
100	0.972	0.947	0.879	0.782	0.626
150	0.998	0.995	0.981	0.952	0.879
200	1	1	0.998	0.993	0.973
300	1	1	1	1	0.999

Таблица Г.11 – Мощность критерия Кимбера-Мичела (3.8) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.370	0.296	0.197	0.128	0.072
20	0.559	0.475	0.345	0.242	0.142
30	0.696	0.618	0.486	0.365	0.232
40	0.795	0.729	0.606	0.482	0.331
50	0.865	0.811	0.706	0.588	0.432
100	0.986	0.975	0.947	0.902	0.8115
150	0.999	0.9975	0.993	0.983	0.956
200	1	1	0.999	0.998	0.992
300	1	1	1	1	1

Таблица Г.12 – Мощность критерия Кимбера-Мичела (3.8) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.233	0.169	0.097	0.055	0.025
20	0.311	0.237	0.147	0.089	0.044
30	0.380	0.299	0.193	0.121	0.063
40	0.441	0.355	0.237	0.153	0.083
50	0.496	0.406	0.279	0.185	0.103
100	0.703	0.615	0.472	0.345	0.213
150	0.828	0.759	0.628	0.493	0.333
200	0.905	0.855	0.748	0.624	0.459
300	0.972	0.951	0.894	0.811	0.669

Таблица Г.13 – Мощность критерия Фишера (3.9) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.103	0.067	0.037	0.023	0.013
20	0.099	0.066	0.037	0.024	0.014
30	0.098	0.064	0.037	0.024	0.015
40	0.097	0.064	0.037	0.024	0.015
50	0.096	0.064	0.037	0.024	0.015
100	0.095	0.063	0.037	0.024	0.015
150	0.095	0.063	0.037	0.024	0.015
200	0.094	0.062	0.036	0.024	0.015
300	0.094	0.062	0.037	0.024	0.015

Таблица Г.14 – Мощность критерия Фишера (3.9) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.286	0.221	0.143	0.093	0.052
20	0.283	0.218	0.141	0.092	0.052
30	0.282	0.217	0.140	0.091	0.052
40	0.282	0.217	0.140	0.091	0.052
50	0.282	0.217	0.140	0.091	0.051
100	0.281	0.217	0.139	0.090	0.051
150	0.280	0.217	0.139	0.090	0.051
200	0.281	0.216	0.139	0.090	0.051
300	0.280	0.216	0.139	0.090	0.051

Таблица Г.15 – Мощность критерия Фишера (3.9) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.095	0.056	0.023	0.009	0.003
20	0.096	0.057	0.023	0.009	0.003
30	0.097	0.057	0.023	0.009	0.003
40	0.097	0.057	0.023	0.009	0.003
50	0.097	0.057	0.023	0.009	0.003
100	0.097	0.057	0.023	0.009	0.003
150	0.097	0.057	0.023	0.009	0.003
200	0.097	0.057	0.023	0.009	0.003
300	0.097	0.057	0.023	0.009	0.003

Таблица Г.16 – Мощность критерия Бартлетта-Морана (3.10) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.172	0.117	0.060	0.031	0.013
20	0.219	0.157	0.087	0.047	0.021
30	0.252	0.186	0.108	0.062	0.029
40	0.279	0.210	0.1265	0.075	0.037
50	0.304	0.231	0.143	0.087	0.044
100	0.398	0.320	0.218	0.1445	0.081
150	0.472	0.394	0.283	0.199	0.121
200	0.5345	0.458	0.344	0.252	0.162
300	0.637	0.565	0.451	0.352	0.246

Таблица Г.17 – Мощность критерия Бартлетта-Морана (3.10) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.501	0.429	0.325	0.243	0.163
20	0.714	0.651	0.547	0.451	0.342
30	0.840	0.794	0.709	0.624	0.513
40	0.912	0.880	0.818	0.749	0.651
50	0.952	0.932	0.890	0.839	0.759
100	0.998	0.997	0.993	0.987	0.973
150	1	1	1	0.999	0.998
200	1	1	1	1	1
300	1	1	1	1	1

Таблица Г.18 – Мощность критерия Бартлетта-Морана (3.10) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.206	0.146	0.080	0.043	0.018
20	0.299	0.225	0.136	0.080	0.038
30	0.384	0.302	0.196	0.122	0.064
40	0.461	0.375	0.255	0.169	0.093
50	0.532	0.444	0.315	0.216	0.125
100	0.779	0.708	0.582	0.462	0.323
150	0.903	0.859	0.769	0.666	0.528
200	0.959	0.936	0.881	0.809	0.697
300	0.994	0.988	0.973	0.948	0.896

Таблица Г.19 – Мощность критерия Пиэтра (3.11) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.216	0.158	0.094	0.057	0.031
20	0.240	0.181	0.114	0.073	0.042
30	0.252	0.194	0.125	0.082	0.049
40	0.263	0.203	0.133	0.089	0.054
50	0.271	0.211	0.140	0.095	0.058
100	0.303	0.241	0.167	0.117	0.074
150	0.329	0.266	0.188	0.136	0.089
200	0.354	0.291	0.210	0.154	0.1035
300	0.399	0.336	0.251	0.188	0.129

Таблица Г.20 – Мощность критерия Пиэтра (3.11) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.431	0.358	0.258	0.184	0.116
20	0.627	0.557	0.446	0.352	0.251
30	0.760	0.701	0.599	0.501	0.388
40	0.848	0.802	0.716	0.628	0.514
50	0.904	0.870	0.804	0.730	0.626
100	0.992	0.987	0.974	0.956	0.920
150	0.999	0.998	0.997	0.994	0.988
200	1	1	1	0.999	0.998
300	1	1	1	1	1

Таблица Г.21 – Мощность критерия Пиэтра (3.11) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.198	0.140	0.076	0.041	0.018
20	0.278	0.208	0.124	0.072	0.034
30	0.353	0.274	0.174	0.107	0.055
40	0.422	0.338	0.225	0.146	0.079
50	0.487	0.399	0.277	0.186	0.104
100	0.7275	0.650	0.520	0.401	0.270
150	0.863	0.809	0.705	0.593	0.451
200	0.934	0.900	0.828	0.741	0.613
300	0.986	0.976	0.949	0.909	0.836

Таблица Г.22 – Мощность критерия Эппса-Палли (3.12) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.231	0.171	0.103	0.063	0.034
20	0.264	0.203	0.132	0.087	0.052
30	0.282	0.221	0.149	0.101	0.063
40	0.296	0.235	0.161	0.112	0.072
50	0.308	0.246	0.171	0.122	0.079
100	0.354	0.293	0.214	0.159	0.109
150	0.394	0.331	0.250	0.191	0.137
200	0.430	0.369	0.285	0.221	0.161
300	0.495	0.433	0.347	0.278	0.209

Таблица Г.23 – Мощность критерия Эппса-Палли (3.12) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.445	0.371	0.270	0.194	0.124
20	0.650	0.581	0.471	0.375	0.272
30	0.784	0.728	0.629	0.534	0.419
40	0.868	0.826	0.747	0.662	0.552
50	0.921	0.891	0.831	0.764	0.665
100	0.995	0.991	0.982	0.968	0.940
150	1	0.999	0.9985	0.997	0.993
200	1	1	1	1	0.999
300	1	1	1	1	1

Таблица Г.24 – Мощность критерия Эппса-Палли (3.12) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.205	0.145	0.079	0.043	0.018
20	0.293	0.220	0.133	0.078	0.038
30	0.375	0.294	0.189	0.118	0.061
40	0.451	0.365	0.246	0.163	0.090
50	0.521	0.433	0.304	0.208	0.118
100	0.769	0.697	0.570	0.448	0.311
150	0.896	0.850	0.757	0.652	0.512
200	0.956	0.930	0.872	0.797	0.679
300	0.993	0.987	0.970	0.942	0.886

Таблица Г.25 – Мощность критерия T^* Холландера-Прошана (3.14) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.148	0.094	0.048	0.0246	0.0098
20	0.168	0.117	0.061	0.032	0.013
30	0.198	0.140	0.076	0.041	0.018
40	0.228	0.164	0.092	0.051	0.023
50	0.258	0.189	0.109	0.062	0.028
100	0.401	0.314	0.202	0.125	0.064
150	0.525	0.432	0.299	0.200	0.111

Таблица Г.26 – Мощность критерия T^* Холландера-Прошана (3.14) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.414	0.315	0.217	0.171	0.091
20	0.624	0.548	0.437	0.342	0.241
30	0.765	0.707	0.607	0.510	0.398
40	0.856	0.811	0.730	0.645	0.534
50	0.912	0.881	0.818	0.748	0.650
100	0.993	0.990	0.980	0.964	0.936
150	0.9996	0.999	0.998	0.996	0.991

Таблица Г.27 – Мощность критерия T^* Холландера-Прошана (3.14) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.199	0.137	0.075	0.040	0.018
20	0.275	0.208	0.124	0.072	0.034
30	0.354	0.275	0.175	0.108	0.056
40	0.426	0.341	0.227	0.147	0.080
50	0.491	0.404	0.280	0.188	0.106
100	0.738	0.661	0.530	0.409	0.276
150	0.873	0.820	0.717	0.607	0.463

Таблица Г.28 – Мощность критерия наибольшего интервала (3.15) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.239	0.180	0.113	0.072	0.040
20	0.292	0.231	0.158	0.111	0.071
30	0.333	0.271	0.194	0.142	0.097
40	0.368	0.305	0.225	0.169	0.118
50	0.399	0.337	0.254	0.194	0.138
100	0.522	0.458	0.366	0.293	0.221
150	0.608	0.544	0.449	0.368	0.286
200	0.672	0.610	0.514	0.431	0.341
300	0.762	0.706	0.613	0.528	0.430

Таблица Г.29 – Мощность критерия наибольшего интервала (3.15) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.323	0.258	0.177	0.122	0.075
20	0.395	0.324	0.232	0.167	0.108
30	0.451	0.378	0.277	0.204	0.135
40	0.496	0.421	0.315	0.234	0.157
50	0.534	0.458	0.347	0.261	0.177
100	0.661	0.583	0.462	0.358	0.253
150	0.736	0.662	0.538	0.427	0.309
200	0.787	0.717	0.595	0.482	0.355
300	0.852	0.792	0.677	0.564	0.430

Таблица Г.30 – Мощность критерия наибольшего интервала (3.15) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.151	0.100	0.049	0.024	0.009
20	0.193	0.135	0.073	0.039	0.017
30	0.224	0.163	0.093	0.052	0.024
40	0.251	0.185	0.109	0.063	0.030
50	0.273	0.206	0.125	0.075	0.037
100	0.355	0.281	0.185	0.120	0.065
150	0.412	0.335	0.232	0.156	0.091
200	0.455	0.378	0.270	0.190	0.115
300	0.516	0.441	0.330	0.244	0.158

Таблица Г.31 – Мощность критерия Кочара (3.16) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.226	0.168	0.102	0.063	0.035
20	0.271	0.212	0.141	0.096	0.060
30	0.304	0.244	0.170	0.121	0.079
40	0.332	0.271	0.195	0.143	0.097
50	0.358	0.296	0.218	0.164	0.115
100	0.466	0.404	0.320	0.255	0.191
150	0.554	0.494	0.408	0.337	0.263
200	0.627	0.571	0.486	0.412	0.332
300	0.741	0.693	0.614	0.542	0.454

Таблица Г.32 – Мощность критерия Кочара (3.16) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.414	0.342	0.246	0.176	0.111
20	0.603	0.531	0.422	0.330	0.236
30	0.734	0.672	0.568	0.472	0.360
40	0.824	0.773	0.683	0.592	0.478
50	0.884	0.846	0.772	0.693	0.587
100	0.987	0.980	0.963	0.939	0.896
150	0.999	0.998	0.995	0.990	0.980
200	1	1	1	0.999	0.997
300	1	1	1	1	1

Таблица Г.33 – Мощность критерия Кочара (3.16) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.194	0.136	0.074	0.040	0.018
20	0.272	0.202	0.120	0.070	0.033
30	0.346	0.267	0.168	0.103	0.052
40	0.414	0.330	0.217	0.140	0.076
50	0.480	0.391	0.268	0.178	0.100
100	0.722	0.643	0.510	0.390	0.260
150	0.860	0.804	0.696	0.582	0.439
200	0.932	0.898	0.822	0.732	0.602
300	0.986	0.976	0.948	0.906	0.828

Таблица Г.34 – Мощность критерия Клишко-Антла-Радемакера-Рокетта со статистикой (3.17) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.257	0.198	0.128	0.084	0.049
20	0.343	0.280	0.201	0.146	0.097
30	0.409	0.346	0.261	0.198	0.139
40	0.463	0.399	0.312	0.244	0.178
50	0.511	0.448	0.359	0.288	0.215
100	0.681	0.627	0.541	0.464	0.376
150	0.788	0.744	0.670	0.599	0.508
200	0.857	0.824	0.762	0.701	0.618
300	0.935	0.915	0.878	0.836	0.774

Таблица Г.35 – Мощность критерия Клишко-Антла-Радемакера-Рокетта со статистикой (3.17) относительно гипотезы относительно H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.322	0.253	0.168	0.111	0.064
20	0.491	0.412	0.300	0.215	0.136
30	0.622	0.543	0.422	0.318	0.213
40	0.722	0.650	0.529	0.415	0.292
50	0.798	0.735	0.621	0.509	0.374
100	0.963	0.943	0.893	0.827	0.718
150	0.994	0.989	0.976	0.952	0.901
200	0.999	0.998	0.995	0.989	0.971
300	1	1	1	0.9995	0.998

Таблица Г.36 – Мощность критерия Клишко-Антла-Радемакера-Рокетта (3.17) от-но H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.170	0.116	0.061	0.031	0.013
20	0.231	0.168	0.096	0.055	0.025
30	0.295	0.224	0.136	0.081	0.041
40	0.356	0.278	0.179	0.112	0.060
50	0.414	0.332	0.223	0.145	0.079
100	0.650	0.568	0.438	0.327	0.215
150	0.799	0.734	0.618	0.504	0.370
200	0.887	0.842	0.751	0.652	0.518
300	0.967	0.949	0.906	0.848	0.751

Таблица Г.37 – Мощность критерия Гринвуда (3.19) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.253	0.192	0.1205	0.076	0.043
20	0.313	0.250	0.174	0.123	0.079
30	0.358	0.296	0.217	0.161	0.110
40	0.397	0.335	0.254	0.195	0.139
50	0.434	0.372	0.290	0.227	0.166
100	0.580	0.524	0.440	0.370	0.294
150	0.689	0.639	0.560	0.490	0.407
200	0.770	0.727	0.656	0.589	0.507
300	0.874	0.845	0.793	0.740	0.667

Таблица Г.38 – Мощность критерия Гринвуда (3.19) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.383	0.310	0.214	0.146	0.088
20	0.545	0.465	0.348	0.255	0.1645
30	0.666	0.589	0.466	0.358	0.243
40	0.757	0.688	0.568	0.454	0.324
50	0.825	0.766	0.657	0.545	0.406
100	0.969	0.951	0.906	0.844	0.740
150	0.995	0.991	0.979	0.958	0.910
200	0.999	0.9985	0.996	0.990	0.974
300	1	1	1	1	0.999

Таблица Г.39 – Мощность критерия Гринвуда (3.19) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.202	0.142	0.078	0.042	0.018
20	0.278	0.208	0.125	0.073	0.035
30	0.348	0.270	0.172	0.107	0.056
40	0.412	0.329	0.219	0.143	0.079
50	0.471	0.386	0.267	0.179	0.102
100	0.696	0.617	0.489	0.374	0.253
150	0.830	0.771	0.662	0.551	0.415
200	0.907	0.867	0.785	0.692	0.563
300	0.974	0.959	0.922	0.870	0.782

Таблица Г.40 – Мощность критерия Дешпанде (3.22) относительно гипотезы H_1

n	Дешпанде (0.1)					Дешпанде (0.3)				
	α					α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.170	0.166	0.166	0.165	0.165	0.156	0.120	0.066	0.037	0.012
20	0.286	0.221	0.111	0.068	0.022	0.221	0.159	0.091	0.048	0.021
30	0.402	0.306	0.187	0.107	0.043	0.284	0.214	0.122	0.071	0.034
40	0.496	0.395	0.251	0.151	0.072	0.341	0.260	0.160	0.094	0.045
50	0.589	0.482	0.329	0.216	0.110	0.394	0.309	0.194	0.118	0.059
100	0.864	0.798	0.669	0.531	0.364	0.621	0.527	0.386	0.271	0.160
150	0.961	0.934	0.866	0.771	0.625	0.777	0.699	0.563	0.434	0.290
200	0.990	0.981	0.953	0.906	0.813	0.873	0.817	0.704	0.584	0.432
300	0.9995	0.999	0.996	0.988	0.967	0.963	0.939	0.880	0.802	0.677

Таблица Г.41 – Мощность критерия Дешпанде (3.22) относительно гипотезы H_2

n	Дешпанде (0.1)					Дешпанде (0.3)				
	α					α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.430	0.310	0.256	0.158	0.119	0.362	0.283	0.205	0.139	0.086
20	0.617	0.552	0.440	0.331	0.232	0.643	0.564	0.449	0.362	0.250
30	0.757	0.697	0.598	0.501	0.380	0.775	0.719	0.627	0.523	0.412
40	0.851	0.801	0.717	0.626	0.510	0.866	0.824	0.744	0.662	0.559
50	0.907	0.874	0.807	0.731	0.621	0.921	0.890	0.831	0.766	0.669
100	0.993	0.988	0.976	0.958	0.924	0.995	0.992	0.983	0.970	0.944
150	0.9995	0.999	0.998	0.995	0.988	0.9997	0.999	0.9986	0.997	0.993
200	1	1	1	0.9995	0.999	1	1	1	1	0.999
300	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Таблица Г.42 – Мощность критерия Дешпанде (3.22) относительно гипотезы H_2

n	Дешпанде (0.1)					Дешпанде (0.3)				
	α					α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.211	0.200	0.198	0.195	0.194	0.195	0.154	0.089	0.053	0.019
20	0.264	0.213	0.124	0.084	0.034	0.282	0.213	0.131	0.076	0.036
30	0.329	0.254	0.163	0.103	0.051	0.362	0.286	0.179	0.113	0.060
40	0.382	0.303	0.198	0.126	0.067	0.431	0.347	0.234	0.151	0.082
50	0.442	0.355	0.241	0.162	0.089	0.494	0.408	0.284	0.190	0.109
100	0.664	0.579	0.449	0.335	0.218	0.733	0.656	0.527	0.407	0.276
150	0.805	0.740	0.622	0.504	0.366	0.869	0.815	0.712	0.601	0.458
200	0.891	0.845	0.753	0.651	0.514	0.938	0.905	0.835	0.750	0.624
300	0.968	0.949	0.904	0.843	0.745	0.987	0.978	0.953	0.915	0.844

Таблица Г.43 – Мощность критерия Эпштейна (3.23) относительно гипотезы H_1

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.159	0.107	0.054	0.027	0.011
20	0.224	0.158	0.087	0.047	0.020
30	0.271	0.200	0.116	0.065	0.030
40	0.309	0.235	0.143	0.085	0.041
50	0.341	0.264	0.166	0.100	0.050
100	0.453	0.372	0.258	0.175	0.100
150	0.530	0.451	0.332	0.239	0.150
200	0.592	0.515	0.397	0.299	0.198
300	0.687	0.619	0.506	0.403	0.289

Таблица Г.44 – Мощность критерия Эпштейна (3.23) относительно гипотезы H_2

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.442	0.369	0.266	0.190	0.118
20	0.662	0.592	0.481	0.382	0.275
30	0.803	0.750	0.655	0.559	0.442
40	0.888	0.851	0.777	0.698	0.590
50	0.939	0.914	0.863	0.801	0.711
100	0.997	0.996	0.990	0.982	0.966
150	1	1	0.9995	0.999	0.997
200	1	1	1	1	1
300	1	1	1	1	1

Таблица Г.45 – Мощность критерия Эпштейна (3.23) относительно гипотезы H_3

n	α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.195	0.137	0.074	0.040	0.017
20	0.276	0.206	0.123	0.072	0.034
30	0.354	0.275	0.176	0.109	0.056
40	0.429	0.345	0.231	0.151	0.083
50	0.498	0.412	0.288	0.194	0.111
100	0.754	0.680	0.552	0.432	0.297
150	0.888	0.841	0.745	0.639	0.501
200	0.952	0.926	0.866	0.790	0.674
300	0.992	0.986	0.969	0.940	0.885

Таблица Г.46 – Мощности критерия Хегази-Грина со статистиками (3.27) и (3.28) относительно гипотезы H_1

n	T_1					T_2				
	α					α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.609	0.547	0.449	0.366	0.279	0.595	0.529	0.432	0.354	0.274
20	0.787	0.739	0.656	0.574	0.474	0.763	0.708	0.617	0.535	0.439
30	0.884	0.851	0.789	0.723	0.632	0.856	0.815	0.740	0.665	0.571
40	0.937	0.916	0.873	0.824	0.750	0.913	0.883	0.825	0.761	0.675
50	0.966	0.953	0.925	0.891	0.835	0.947	0.926	0.882	0.831	0.757
100	0.999	0.998	0.996	0.992	0.984	0.996	0.993	0.985	0.973	0.950
150	1	1	1	0.9995	0.999	0.9997	0.999	0.998	0.996	0.991
200	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9996	0.9987
300	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Таблица Г.47 – Мощности критерия Хегази-Грина со статистиками (3.27) и (3.28) относительно гипотезы H_2

n	T_1					T_2				
	α					α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.503	0.424	0.320	0.244	0.173	0.509	0.443	0.354	0.284	0.211
20	0.661	0.587	0.471	0.374	0.275	0.665	0.603	0.508	0.427	0.335
30	0.766	0.700	0.590	0.488	0.373	0.763	0.709	0.621	0.538	0.440
40	0.837	0.783	0.685	0.587	0.467	0.830	0.785	0.706	0.628	0.530
50	0.888	0.845	0.761	0.672	0.554	0.878	0.840	0.772	0.702	0.607
100	0.984	0.974	0.948	0.910	0.845	0.976	0.964	0.938	0.904	0.848
150	0.998	0.996	0.991	0.980	0.957	0.995	0.992	0.984	0.971	0.946
200	1	0.9995	0.9986	0.996	0.990	0.999	0.998	0.996	0.992	0.982
300	1	1	1	1	0.9997	1	1	0.9998	0.99946	0.9984

Таблица Г.48 – Мощности критерия Хегази-Грина со статистиками (3.27) и (3.28) относительно гипотезы H_3

n	T_1					T_2				
	α					α				
	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01	0.15	0.1	0.05	0.025	0.01
10	0.055	0.030	0.011	0.004	0.001	0.039	0.019	0.005	0.0015	0.0003
20	0.047	0.024	0.008	0.003	0.001	0.024	0.0098	0.002	0.0006	0.0001
30	0.050	0.024	0.007	0.002	0.0004	0.020	0.007	0.0014	0.0004	0.0001
40	0.059	0.028	0.007	0.002	0.0004	0.023	0.007	0.001	0.0002	0.0001
50	0.074	0.034	0.009	0.002	0.0004	0.030	0.009	0.001	0.0002	0
100	0.199	0.109	0.033	0.008	0.0011	0.106	0.043	0.006	0.0005	0
150	0.376	0.243	0.095	0.030	0.005	0.232	0.119	0.027	0.0038	0.0001
200	0.555	0.408	0.202	0.080	0.017	0.378	0.229	0.071	0.015	0.001
300	0.818	0.705	0.480	0.274	0.099	0.649	0.489	0.239	0.083	0.012

**ПРИЛОЖЕНИЕ Д АКТЫ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ И СВИДЕТЕЛЬСТВА О
ГОСУДАРСТВЕННОЙ РЕГИСТРАЦИИ**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ
№ 2015663326

**Статистический анализ интервальных наблюдений
одномерных непрерывных случайных величин
"Интервальная статистика 5.3"**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»
(RU)*

Авторы: *Лемешко Борис Юрьевич (RU), Лемешко Станислав
Борисович (RU), Блинов Павел Юрьевич (RU), Веретельникова
Ирина Викторовна (RU)*

Заявка № **2015617223**
Дата поступления **05 августа 2015 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **15 декабря 2015 г.**



*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Г.П. Волков Г.П. Волков

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018666213

**Статистический анализ интервальных наблюдений
одномерных непрерывных случайных величин
«Интервальная статистика 5.4»**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»
(RU)*

Авторы: *Лемешко Борис Юрьевич (RU), Лемешко Станислав
Борисович (RU), Блинов Павел Юрьевич (RU), Веретельникова
Ирина Викторовна (RU), Новикова Алена Юрьевна (RU)*

Заявка № **2018663206**

Дата поступления **22 ноября 2018 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **13 декабря 2018 г.**



*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Г.П. Ивлиев



УТВЕРЖДАЮ

Директор УНИИМ

Медведевских С.В.

2018 г.

АКТ

об использовании результатов диссертационных исследований

Результаты диссертационных исследований Блинова Павла Юрьевича, в частности, разработанные алгоритмы и программное обеспечение, реализующее совокупность критериев проверки статистических гипотез о принадлежности выборок равномерному закону, о принадлежности выборок показательному закону, а также позволяющее исследовать законы распределения функций от случайных величин, представляющее собой составные части программной системы "Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин (ISW)", разработанной Новосибирским государственным техническим университетом под руководством д.т.н., профессора Б.Ю. Лемешко, используются Уральским научно-исследовательским институтом метрологии при статистическом анализе результатов измерений, связанных с установлением метрологических характеристик стандартных образцов утверждённых типов, а также другими задачами метрологического обеспечения, менеджмента качества и метрологического контроля.

Зам. заведующего лабораторией
метрологического обеспечения наноиндустрии,
спектральных методов анализа и СО


П.В. Мигаль

Зам. директора по инновациям


Е.П. Собина

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе НГТУ

д.т.н., доцент

Громинов С.В.

« » 2018 г.

**АКТ О ВНЕДРЕНИИ**

результатов диссертационной работы Блинова П.Ю.
в учебный процесс факультета прикладной математики и информатики

Результаты диссертационной работы Блинова Павла Юрьевича, в частности, разработанные алгоритмы и программное обеспечение внедрены в учебный процесс факультета прикладной математики и информатики (ФПМИ) ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет» и используются при изучении дисциплины «Компьютерные технологии анализа данных и статистических закономерностей» по направлению 01.04.02 – «Прикладная математика и информатика» в рамках магистерской программы «Математическое моделирование детерминированных и стохастических процессов». Освоение магистрантами соответствующих разделов дисциплины способствует приобретению необходимых знаний и умений для применения на практике аппарата проверки статистических гипотез о принадлежности выборок равномерному и показательному законам распределений при статистическом анализе данных.

Декан ФПМИ,
д.т.н., доцент

Заведующий кафедрой ТПИ,
д.т.н., доцент

Тимофеев В.С.

Чубич В.М.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ТЕХНИЧЕСКОМУ
РЕГУЛИРОВАНИЮ И МЕТРОЛОГИИ
РОССТАНДАРТ



Федеральное государственное
унитарное предприятие «Всероссийский
научно-исследовательский институт
метрологии им. Д.И.Менделеева»

ФГУП «ВНИИМ им. Д.И.Менделеева»

190005, Санкт-Петербург, Московский пр., д. 19
Тел.: (812) 251-76-01, факс: (812) 713-01-14
e-mail: info@vniim.ru, http://www.vniim.ru
ОКПО 02566450, ОГРН 1027810219007
ИНН/КПП 7809022120/783901001

00055923

№ _____
на № _____ от _____

УТВЕРЖДАЮ

И.о. директора ФГУП
«ВНИИМ им. Д.И. Менделеева»



А.Н. Пронин


2018 г.

АКТ

об использовании результатов диссертационных исследований

Результаты диссертационных исследований Блинова Павла Юрьевича, в частности, разработанные алгоритмы и программное обеспечение, реализующее совокупность критериев проверки статистических гипотез о принадлежности выборок равномерному закону, о принадлежности выборок показательному закону, а также позволяющее исследовать законы распределения функций от случайных величин, представляющее собой составные части программной системы «Статистический анализ интервальных наблюдений одномерных непрерывных случайных величин (ISW)», разработанной Новосибирским государственным техническим университетом под руководством д.т.н., профессора Б.Ю. Лемешко, используются Всероссийским научно-исследовательским институтом метрологии имени Д.И. Менделеева при статистическом анализе результатов измерений, при анализе результатов сличений эталонов, при аттестации методик измерений и валидации методик калибровок эталонов.

Руководитель метрологического отдела,
Д.т.н.

 А.Г. Чуновкина