

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»

На правах рукописи



ФИЛОНЕНКО ПЕТР АЛЕКСАНДРОВИЧ

**СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КРИТЕРИЕВ
ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗЫ ОДНОРОДНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ
ПО СЛУЧАЙНО ЦЕНЗУРИРОВАННЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ**

Специальность 05.13.17 – Теоретические основы информатики

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, доцент
Постовалов Сергей Николаевич

Новосибирск – 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	7
ГЛАВА 1 НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗЫ ОДНОРОДНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ.....	21
1.1 Случайные величины.....	21
1.1.1 Функция распределения вероятностей случайной величины.....	22
1.1.2 Непараметрическая оценка функции распределения вероятностей случайной величины.....	23
1.1.3 Мера различия двух распределений случайных величин.....	23
1.2 Данные типа времени жизни.....	24
1.2.1 Непараметрические оценки функции надежности.....	26
1.2.1.1 Множительная оценка Каплана-Мейера.....	27
1.2.1.2 Экспоненциальная оценка Бреслоу.....	27
1.2.1.3 Степенная оценка Абдушукурова.....	28
1.2.2 Функция интенсивности рисков.....	29
1.3 Проверка статистической гипотезы однородности распределений	29
1.4 Ошибки первого и второго рода.....	30
1.5 Критерии однородности распределений.....	32
1.5.1 Критерии однородности распределений для полных данных.....	35
1.5.1.1 Критерий Колмогорова-Смирнова.....	35
1.5.1.2 Критерий Лемана-Розенблатта.....	36
1.5.1.3 Критерий Андерсона-Дарлинга-Петита.....	37
1.5.1.4 Модифицированный Жангом критерий Колмогорова- Смирнова.....	39
1.5.1.5 Модифицированный Жангом критерий Лемана-Розенблатта	40
1.5.1.6 Модифицированный Жангом критерий Андерсона- Дарлинга.....	40
1.5.2 Критерии однородности распределений для данных типа времени жизни.....	41

1.5.2.1	Обобщенный Геханом критерий Уилкоксона.....	42
1.5.2.2	Обобщенный Пето критерий Уилкоксона.....	42
1.5.2.3	Логарифмический ранговый критерий.....	43
1.5.2.4	Критерий Кокса-Мантела.....	44
1.5.2.5	Q -критерий.....	44
1.5.2.6	Взвешенный логарифмический ранговый критерий.....	46
1.5.2.7	Взвешенный критерий Каплана-Мейера.....	48
1.5.2.8	Критерий Багдонавичуса-Никулина (обобщенная модель Кокса).....	49
1.5.2.9	Критерий Багдонавичуса-Никулина (многократные пересечения).....	51
1.5.2.10	Критерий Багдонавичуса-Никулина (однократные пересечения).....	52
1.5.3	Критерии однородности средних.....	54
1.5.3.1	Параметрический критерий однородности Стьюдента.....	54
1.5.3.2	Непараметрический критерий однородности Крамера-Уэлча.....	55
1.6	Выводы.....	56
ГЛАВА 2 ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ		
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИКИ КРИТЕРИЯ К ПРЕДЕЛЬНОМУ		
ЗАКОНУ В СЛУЧАЕ СПРАВЕДЛИВОСТИ ОСНОВНОЙ ГИПОТЕЗЫ		
2.1	Оценка скорости сходимости.....	58
2.2	Моделирование закона распределения статистики критерия при конечном объеме выборок.....	60
2.3	Аппроксимация расстояния до предельного закона степенной функцией.....	62
2.4	Исследование оценки скорости сходимости распределения статистики критериев однородности распределений.....	63
2.4.1	Статистическое моделирование (имитационный метод Монте-Карло).....	65

2.4.1.1	Метод поиска параметров распределения моментов цензурирования для достижения необходимой степени цензурирования.....	67
2.4.2	Обобщенный Геханом критерий Уилкоксона.....	68
2.4.3	Обобщенный Пето критерий Уилкоксона.....	70
2.4.4	Логарифмический ранговый критерий.....	73
2.4.5	Критерий Кокса-Мантела.....	75
2.4.6	Взвешенный логарифмический ранговый критерий (Тэрон-Вэр)...	78
2.4.7	Критерий Багдонавичуса-Никулина (обобщенная модель Кокса)...	80
2.4.8	Критерий Багдонавичуса-Никулина (однократные пересечения)...	83
2.5	Выводы.....	86
ГЛАВА 3 СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОЩНОСТИ КРИТЕРИЕВ ОДНОРОДНОСТИ НА БЛИЗКИХ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ГИПОТЕЗАХ		88
3.1	Близкие альтернативные гипотезы.....	88
3.2	Исследование мощности критериев однородности.....	94
3.2.1	Сравнительный анализ мощности критериев однородности в случае полных данных.....	94
3.2.2	Сравнительный анализ мощности критериев однородности в случае случайно цензурированных данных.....	97
3.2.3	Влияние разных объемов выборок на мощность критериев.....	115
3.2.4	Влияние разных степеней цензурирования выборок на мощность критериев.....	119
3.2.5	Выбор статистического критерия как наилучшей стратегии с помощью правил принятия решений в условиях риска и неопределенности.....	123
3.3	Выводы.....	131
ГЛАВА 4 НОВЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ГИПОТЕЗЫ ОДНОРОДНОСТИ		134
4.1	Непараметрический критерий однородности максимального	

значения как альтернатива Q -критерию.....	134
4.1.1 Критерий однородности распределений максимального значения для данных типа времени жизни.....	135
4.1.2 Сравнительный анализ мощности предложенного и существующих критериев.....	138
4.2 Непараметрический критерий однородности $MIN3$ как устойчивый критерий к неопределенности вида альтернативной гипотезы.....	140
4.2.1 Критерий однородности распределений $MIN3$ для данных типа времени жизни.....	140
4.2.2 Сравнительный анализ мощности критериев на группах альтернативных гипотез с применением правил Вальда и Сэвиджа для принятия решений в условиях риска и неопределенности	142
4.3 Модификация критериев однородности средних на случай данных типа времени жизни.....	148
4.3.1 Модифицированный критерий однородности средних Стьюдента	149
4.3.2 Модифицированный критерий однородности средних Крамера-Уэлча.....	150
4.3.3 Сравнительный анализ мощности критериев однородности средних.....	151
4.4 Гладкая оценка функции надежности на основе интерполяционного сплайна Эрмита.....	153
4.4.1 Гладкая оценка функции надежности.....	153
4.4.2 Алгоритм вычисления достигнутого уровня значимости по двум исходным выборкам в случае полных данных.....	156
4.4.3 Сравнительный анализ погрешности вычисления достигнутого уровня значимости.....	157
4.5 Выводы.....	160

ГЛАВА 5 ОПИСАНИЕ РАЗРАБОТАННОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ НА РЕАЛЬНЫХ ДАННЫХ.....	163
5.1 Описание разработанного программного обеспечения.....	163
5.2 Анализ процесса статистического контроля качества при производстве электродной продукции.....	165
5.2.1 Нормативные требования при производстве электродной продукции.....	166
5.2.2 Текущая организация контроля качества на предприятии.....	168
5.2.3 Статистический анализ сравнения распределений толщин покрытия электродов между разными партиями.....	169
5.3 Анализ процесса статистического контроля качества при производстве колбасной продукции.....	173
5.3.1 Нормативные требования при производстве колбасной продукции	174
5.3.2 Текущая организация контроля качества на предприятии.....	175
5.3.3 Статистический анализ сравнения распределений масс одинаковой колбасной продукции.....	176
5.4 Выводы.....	181
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	183
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	186
ПРИЛОЖЕНИЕ А Значения оценок мощности статистических критериев однородности на группах близких альтернативных гипотез...	205
ПРИЛОЖЕНИЕ Б Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.....	224
ПРИЛОЖЕНИЕ В Акты о внедрении результатов диссертационной работы.....	226

ВВЕДЕНИЕ

Современное состояние и актуальность темы исследования. На сегодняшний день математический аппарат проверки статистических гипотез является эффективным и гибким средством для анализа данных и исследования статистических закономерностей. В таких задачах статистический критерий представляет собой инструмент для анализа данных, для которого необходимо понимать что он измеряет, особенности его применения, достоинства и недостатки, а также какие результаты можно получить и с какими ошибками при этом можно столкнуться.

Проверка гипотезы о принадлежности двух выборок случайных величин одной генеральной совокупности, или гипотезы однородности распределений, – это отдельная задача в теории проверки статистических гипотез [1, 2]. С необходимостью решения таких задач зачастую сталкиваются при анализе погрешности средств измерений, при статистическом контроле качества технологических процессов и др. Такая задача естественным образом возникает при тестировании нового лекарственного средства, когда пытаются убедиться в том, что закон распределения продолжительности наличия симптомов болезни контрольной группы существенно отличается в меньшую сторону от аналогичного распределения группы пациентов, принимающих препарат-плацебо. Особенно широкое применение проверка статистической гипотезы однородности распределений получила в анализе продолжительности бесперебойной работы объектов в задачах теории надежности, где каждое наблюдение выборки – это время наблюдения за объектом.

Для идентификации различий между распределениями могут использоваться разнообразные подходы: проверка статистической гипотезы однородности распределений [3, 4], проверка статистической гипотезы о

равенстве характеристик распределений (средних [5, 6], дисперсий [7, 8], медиан [9] и др.), анализ оценок функций распределений вероятностей и др.

В отечественной литературе широкое распространение получил критерий однородности распределений Колмогорова-Смирнова [10, 11], предложенный членом-корреспондентом АН СССР Н.В. Смирновым в 1939 году [3], который взял за основу критерий согласия Колмогорова [12]. В основе статистики критерия лежит метрика Колмогорова – наибольшее отклонение между эмпирическими функциями сравниваемых распределений, при этом распределение статистики критерия при выполнении гипотезы однородности подчиняется распределению Колмогорова [13, 14]. Также в отечественной литературе можно встретить критерий Лемана-Розенблатта [15, 16]. В основе вычисления статистики этого критерия лежит суммарное отклонение между эмпирическими функциями сравниваемых распределений с использованием квадратичной меры. Данный критерий есть не что иное, как обобщение критерия согласия типа ω^2 [17] для случая двух выборок. Помимо приведенных выше критериев Колмогорова-Смирнова и Лемана-Розенблатта в современной литературе имеется критерий типа Ω^2 [18] для проверки гипотезы однородности распределений – критерий Андерсона-Дарлинга-Петита. Принципиальное отличие критерия типа ω^2 от критерия типа Ω^2 заключается в том, что статистика критерия для последнего имеет весовую функцию, с помощью которой отклонениям в ранние и поздние моменты времени («на хвостах» распределений) устанавливается больший вес, чем в остальные моменты времени. Данные критерии можно объединить в группу дистанционных критериев, т.к. статистики этих критериев измеряют насколько одно распределение отличается от другого по определенной мере. Вследствие простоты и очевидности такого подхода в литературе встречаются разные модификации и аналоги этих критериев [20].

Все сказанное до этого момента справедливо при выполнении предположения о том, что у исследователя имеются выборки продолжительности наблюдений за объектами, состоящие из полных

наблюдений, т.е. наблюдение за каждым объектом велось от момента начала эксперимента и до момента окончания эксперимента (событие, наступлению которого соответствует окончание эксперимента, называется в теории надежности *отказом*, например, выход устройства из строя). Однако на практике это не всегда бывает так, поскольку в процессе проведения эксперимента некоторые объекты могут выйти из-под наблюдения, но для них имеется информация о том, что на момент выхода из-под наблюдения отказ еще не наступил. Примером такого события может быть переезд пациента, который еще не до конца завершил лечение. Такие наблюдения называются *цензурированными*. Анализом таких наблюдений с использованием специальных математических моделей [20] занимается теория надежности [21]. Цензурированное наблюдение представляет собой интервал от момента цензурирования до правой границы области определения случайной величины (*цензурирование слева*) или от левой границы области определения случайной величины до момента цензурирования (*цензурирование справа*). Цензурированные справа наблюдения еще могут называться *данными типа времени жизни*. Распределение вероятностей случайной величины, состоящей из цензурированных наблюдений, задается с помощью функции надежности [22, 23]. Функция надёжности является одним из основных понятий в теории надёжности и определяет вероятность безотказной работы объекта за некоторую наработку [24]. Среди отечественных публикаций, направленных на анализ и обработку цензурированных данных, стоит отметить работы Благовещенского Ю.Н., Скрипника В.М., Приходько Ю.Г., Назина А.Е., Ушакова И.А., Острейковского В.А., Антонова А.В., Никулина М.С., Аронова И.З. и др. [25-30]. В зарубежной литературе изучению теории надежности и использованию цензурированных данных посвящено множество работ, среди которых стоит выделить работы В. Багдонавичуса (V. Bagdonavičius), А. Абдушукурова (A.A. Abdushukurov), Н. Балакришнана (N. Balakrishnan), Д. Кокса (D.R. Cox), У. Нельсона (W. Nelson) и др. [31-35].

Разработка методов проверки статистической гипотезы однородности распределений для цензурированных наблюдений берет свое начало с обобщения существующих классических методов на случай цензурированных данных. Так, например, в 1965 году Гехан (Gehan E.A.) и в 1972 году Пето и Пето (Peto R., Peto J.) предложили модификации [36, 37] непараметрического рангового критерия Уилкоксона [38] для цензурированных справа наблюдений. Кроме того, в ряде работ разными авторами были обобщены дистанционные критерии Колмогорова-Смирнова и Лемана-Розенблатта [39-43] на случай цензурированных справа данных. Суть модификаций для этих критериев заключалась в получении новых оценок функции надежности, которые использовались вместо эмпирической функции распределения для полных наблюдений. Однако распределение предложенных статистик, как утверждают авторы, зависит от распределения исходных данных, что не позволяет использовать предельные распределения для вычисления достигнутого уровня значимости. Среди существующих непараметрических оценок функции надежности широко известны и хорошо изучены: множительная оценка Каплана-Мейера [44-46], экспоненциальная оценка Бреслоу [47-50] и степенная оценка Абдушукурова [51-52], которая, в отличие от первых двух, всегда обращается в ноль до наступления момента времени, равного бесконечности. В 1989 году был предложен еще один дистанционный критерий – взвешенный критерий Каплана-Мейера [53], использующий множительную оценку функции надежности Каплана-Мейера и специальную весовую функцию.

Помимо дистанционных критериев для проверки гипотезы однородности распределений различными авторами предлагались ранговые критерии: в 1966 году Н. Мантел (N. Mantel) в своей работе [54], обобщив критерий Сэвиджа (I.R. Savage) [55], предложил логарифмический ранговый критерий, а Мантел (N. Mantel) [56] и Кокс (D.R. Cox) [57] описали и исследовали ранговый критерий, который получил совместное название обоих авторов – критерий Кокса-Мантела. Для логарифмического рангового

критерия в литературе существуют модификации в виде взвешенных логарифмически ранговых критериев [58, 59]. Каждая выбранная весовая функция позволяет получить новую статистику с совершенно другими свойствами: весовые функции Тэрона-Вэра [60], Пето-Прентиса и Прентиса [61, 62].

Совершенно другой подход использовали В. Багдонавичус (V. Bagdonavičius) и М.С. Никулин при разработке критериев однородности распределений: на основе различных моделей поведения сравниваемых функций надежности SCE (Single Cross-Effect model – модель с однократным пересечением функций надежности [63]), MCE (Multiple Cross-Effect model – модель с многократными пересечениями функций надежности [63]) и обобщенной модели Кокса [64] авторами были предложены статистики критериев однородности распределений для однократных [64] и многократных [63] пересечений функций надежности, а также для обобщенной модели Кокса [65].

Еще один существующий подход проверки статистической гипотезы однородности распределений – это двухэтапный способ вычисления статистики критерия. Статистика такого двухэтапного критерия есть значение некоторой специальной функции на множестве значений статистик других известных статистик критериев. Выбор такой специальной функции обусловлен стремлением объединить определенные достоинства статистических критериев, которые лежат в основе двухэтапного критерия. Двухэтапные критерии встречаются в работах Н. Балакришнана (N. Balakrishnan) [66], Р. Мартинез (R.L.M.C. Martinez) [67], Г.Бёнинга (H. Büning) [68, 69] и др. [70-74].

Проверить статистическую гипотезу однородности распределений можно не только с помощью критерия однородности распределений, но также с помощью критериев проверки других статистических гипотез, например, однородности характеристик распределений (средних, дисперсий, медиан и др.) и/или их комбинаций. В случае отклонения гипотезы

однородности характеристик распределений можно сделать вывод о наличии оснований, что выборочные данные взяты из разных распределений. В литературе для проверки гипотезы однородности средних широко известны критерии Стьюдента [6, 75] и Крамера-Уэлча [76]. Однако для данных критериев отсутствуют модификации для цензурированных данных, тем самым не позволяя воспользоваться целой группой методов для проверки гипотезы однородности распределений. Среди критериев однородности дисперсий в литературе существует большое разнообразие методов, например, критерии Бартлетта [77, 78], Кохрена [77, 79], Хартли [77, 80], Левене [77, 81], Ансари-Бредли [77,82], Сижела-Тьюки [77,83], Муда [77, 84], Кейпена [77, 85], Клотца [77, 86] и др. [87]. Тем не менее, при всем разнообразии статистических критериев описано не так много аналогов для цензурированных данных [88, 89].

Таким образом, на данный момент существует множество статистических критериев для проверки гипотезы однородности, но остается открытым вопрос, какой из критериев и в каком случае лучше использовать.

Кроме того, зачастую, в работах авторов, предлагающих новый статистический критерий, отсутствует информация о том, насколько быстро с ростом объемов выборок распределение статистик критерия достигает своего предельного распределения [4, 90]. Отсутствие подобной информации может привести к неправильным статистическим выводам, т.к. в общем случае распределение статистик критерия для конечного фиксированного объема выборок и предельное распределение различны. Следовательно, в одних случаях для вычисления достигнутого уровня значимости можно воспользоваться предельным распределением, а в других случаях нельзя. Однако в каких именно случаях воспользоваться предельным распределением нельзя, как правило, информация отсутствует.

Поэтому, с учетом всего сказанного, актуальными задачами являются:

- сравнительный анализ статистических критериев для проверки гипотезы однородности на основе сравнения мощности критериев при близких альтернативных;
- исследование различий между распределением статистики критерия проверки гипотезы однородности на выборках конечного фиксированного объема и предельным законом распределения, в том числе исследование скорости сходимости распределения к предельному закону.

Цель и задачи исследования. Целью данной диссертационной работы является повышение надежности получаемых статистических выводов при проверке гипотезы однородности по случайно цензурированным справа наблюдениям.

В соответствии с поставленной целью предусмотрено решение следующих задач:

1. Исследование скорости сходимости распределений статистик критериев к предельному закону распределения в случае цензурированных справа данных;
2. Сравнительный анализ мощности критериев для проверки гипотезы однородности на парах близких конкурирующих гипотез в случае цензурированных справа данных;
3. Исследование поведения мощности статистических критериев в случае разных объемов и разной степени цензурирования выборок для цензурированных справа данных;
4. Исследование влияния закона распределения моментов цензурирования на мощность статистических критериев для проверки гипотезы однородности распределений в случае цензурированных справа данных;
5. Формирование рекомендаций по выбору оптимального критерия для проверки гипотезы однородности распределений по

цензурированным данным на основе теории принятия решений в условиях риска и неопределенности;

6. Разработка и/или модификация статистических критериев для проверки статистической гипотезы однородности распределений по цензурированным данным справа при использовании статистик известных критериев.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовались методы математической статистики [91-98], теории вероятностей [99-101], математического программирования и статистического моделирования [102-104].

Научная новизна диссертационной работы заключается в:

- результатах исследования скорости сходимости распределений статистик критериев однородности к соответствующему предельному распределению в случае цензурированных справа данных;
- результатах сравнительного анализа мощности критериев для проверки гипотезы однородности распределений при близких альтернативных гипотезах в случае цензурированных справа наблюдений;
- формировании рекомендаций выбора статистического критерия для проверки гипотезы однородности распределений на основе статистической мощности критериев и правил Вальда и Сэвиджа для принятия решений в условиях риска и неопределенности;
- результатах исследования влияния закона распределения моментов цензурирования на мощность статистических критериев для проверки гипотезы однородности распределений в случае цензурированных справа наблюдений;
- модификации известных статистических критериев однородности средних Стьюдента и Крамера-Уэлча для цензурированных справа наблюдений;

- разработке новых статистических критериев максимального значения и $MIN3$ для проверки гипотезы однородности распределений по цензурированным справа наблюдениям;
- разработке алгоритма вычисления достигаемого уровня значимости для критериев проверки гипотезы однородности распределений по двум исходным выборкам в случае полных данных.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся:

1. результаты исследования скорости сходимости распределений статистик критериев однородности к соответствующему предельному закону в случае цензурированных справа данных;
2. результаты сравнительного анализа мощности критериев для проверки гипотезы однородности распределений на группах альтернативных гипотез;
3. новые статистические критерии максимального значения и $MIN3$ для проверки гипотезы однородности распределений по цензурированным справа наблюдениям;
4. модификации статистических критериев Стьюдента и Крамера-Уэлча для цензурированных справа данных;

Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций обеспечивается:

- корректным применением математического аппарата и методов статистического моделирования для исследования свойств и распределений статистик критериев;
- совпадением результатов статистического моделирования с известными теоретическими результатами.

Личный творческий вклад автора в совместных публикациях заключается в:

- исследовании скорости сходимости распределений статистик критериев однородности к соответствующему предельному распределению в случае цензурированных справа данных;

- проведении сравнительного анализа мощности критериев для проверки гипотезы однородности распределений на близких альтернативных гипотезах в случае цензурированных справа наблюдений;
- формировании рекомендаций выбора статистического критерия для проверки гипотезы однородности распределений на основе статистической мощности критериев и правил Вальда и Сэвиджа для принятия решений в условиях риска и неопределенности;
- исследовании влияния закона распределения моментов цензурирования на мощность статистических критериев для проверки гипотезы однородности распределений в случае цензурированных данных справа;
- модификации известных статистических критериев однородности средних Стьюдента и Крамера-Уэлча для цензурированных справа данных;
- разработке новых статистических критериев максимального значения и $MIN3$ для проверки гипотезы однородности распределений по цензурированным данным справа;
- разработке алгоритма вычисления достигнутого уровня значимости для критериев проверки гипотезы однородности распределений по двум исходным выборкам в случае полных данных;
- разработке программного обеспечения для статистического моделирования распределений статистик критериев для разных законов распределения моментов отказа и цензурирования, а также различной степени цензурирования.

Практическая ценность и реализация результатов заключается в формировании рекомендаций по проведению статистического эксперимента проверки гипотезы однородности распределений в случае данных типа времени жизни. Классические критерии однородности средних Стьюдента и Крамера-Уэлча на основе разработанных модификаций могут применяться в случае данных типа времени жизни. Разработанный статистический критерий

MIN3 является устойчивым критерием для проверки гипотезы однородности распределений при неизвестной альтернативной гипотезе в случае данных типа времени жизни. Разработанные алгоритмы моделирования распределений статистик критериев для проверки гипотезы однородности распределений по цензурированным справа выборкам реализованы в зарегистрированной программе ЭВМ «Программа для вычисления значений статистик критериев однородности по двум выборкам» (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2017615277 (2017 г.). – М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент)) [105].

Полученные результаты в рамках данной диссертационной работы были внедрены в практику деятельности общества с ограниченной ответственностью «Российские мясопродукты – Холдинг» для решения задачи статистического контроля качества производственного процесса выпуска готовой продукции, что подтверждается соответствующим актом о внедрении от 27.02.2017 г.

Диссертационные исследования выполнены при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках проектной части государственного задания (проекты №2.541.2014/К и №1.1009.2017/4.6), при поддержке федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» (далее – НГТУ) в рамках реализуемой программы стратегического развития НГТУ по итогам конкурса проектов среди молодых учёных (проект №С-15, 2017г.) и в рамках студенческих грантов НГТУ (№034 – НСГ – 13, 2013-2014 гг.; №042 – НСГ – 14, 2014-2015 гг.).

Апробация результатов диссертации. Результаты работы докладывались на международном семинаре “Applied Methods of Statistical Analysis”, Новосибирск, 2013г., 2015г. и Красноярск, 2017г.; международном форуме по стратегическим технологиям “International Forum on Strategic

Technology, IFOST-2016”, Новосибирск, 2016 г.; республиканской научно-практической конференции “Statistics and its applications”, Ташкент, Узбекистан, 2015г.; международной научно-технической конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения”, Новосибирск, 2012г., 2014г. и 2016г.; международной конференции "Вычислительная и прикладная математика", Новосибирск, 2017г; международной конференции «Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing XI», Глазго, Шотландия, 2017г.; российской научно-технической конференции “Обработка информационных сигналов и математическое моделирование”, Новосибирск, 2013г., 2014г., 2015г., 2016г. и 2017г.; Всероссийской научной конференции молодых ученых “Наука. Технология. Инновации”, Новосибирск, 2012г., 2013г. и 2015г.; городской конференции молодых исследователей “Progress through Innovations”, Новосибирск, 2015г.

Публикации. По результатам диссертационных исследований опубликованы 27 печатных работ, в том числе: 3 статьи в научных журналах и изданиях, рекомендуемых ВАК; 2 статьи в рецензируемых международных журналах, индексируемых в Web of Science и Scopus; глава в монографии международного рецензируемого издания; 21 публикация в материалах международных и российских конференций; одно свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 5-ти глав основного содержания, заключения, списка использованных источников (180 наименований) и 3-х приложений. Общий объем диссертации составляет 228 страниц (основное содержание изложено на 204 страницах), включая 76 рисунков и 58 таблиц.

Краткое содержание работы. В первой главе приводится постановка задачи, список основных определений, оценки функции надежности, статистики критериев для проверки гипотезы однородности распределений.

Во второй главе приведены результаты исследований скорости сходимости распределений статистик критериев к соответствующим предельным законам в случае данных типа времени жизни.

В третьей главе приведены результаты сравнительного анализа мощности критериев для проверки гипотезы однородности распределений на группах альтернативных гипотез для случайно цензурированных данных. С помощью применения правил для принятия решений в условиях риска и неопределенности приводятся рекомендации о том, какие критерии являются оптимальными в соответствии с правилами Вальда и Сэвиджа на каждом типе альтернативных гипотез.

В четвертой главе приведены новые и модифицированные критерии для проверки гипотезы однородности распределений в случае данных типа времени жизни, а также предлагаемая процедура для вычисления достигнутого уровня значимости по двум исходным выборкам, состоящим из полных наблюдений.

В пятой главе приведено описание разработанного программного обеспечения для статистического моделирования распределений статистик критериев для проверки гипотезы однородности распределений по данным типа времени жизни, а также описано внедрение статистических методов в практику работы действующего предприятия для проведения статистического контроля качества.

В заключении приводится перечень основных результатов данного диссертационного исследования.

Нумерация приводимых соотношений, утверждений и других элементов в каждом разделе самостоятельная. Первое число указывает номер раздела, второе число указывает номер соответствующего соотношения в этом разделе.

Автор выражает глубокую признательность за ценные советы и оказанную помощь в написании диссертации своему научному руководителю д.т.н., доценту Постовалову Сергею Николаевичу, научным консультантам

д.т.н., доценту Чимитовой Екатерине Владимировне, д.т.н., профессору Лемешко Борису Юрьевичу и коллективу кафедры теоретической и прикладной информатики НГТУ.

ГЛАВА 1 НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗЫ ОДНОРОДНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

1.1 Случайные величины

Случайная величина является одним из фундаментальных понятий теории вероятностей и математической статистики. Случайной величиной ξ называется исход случайного эксперимента (событие), т.е. такой исход, который неоднозначно определяется начальными условиями и заранее не может быть предсказан [101]. Производя наблюдение за такой случайной величиной, можно обратить внимание, что некоторые случайные события происходят чаще, чем другие. Это говорит о том, что природа появления этих событий различна, а, следовательно, вероятности появления у таких случайных событий будут не одинаковы. В теории вероятностей рассматриваются случайные величины с заранее известным распределением или случайные эксперименты, свойства которых полностью известны. Однако в экспериментах на практике никакой информации о распределении нет.

Делать вывод о распределении с вероятностью 1 можно лишь тогда, когда проведено бесконечное число испытаний, что не представляется возможным. Методы математической статистики позволяют по результатам конечного числа экспериментов сделать с определенной степенью достоверности выводы о распределении случайной величины, наблюдаемой в этих экспериментах.

Совокупность исходов случайной величины ξ будем обозначать множеством $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, где n – это количество случайных исходов, которые удалось пронаблюдать, а x_i – значение i -го исхода. Также множество $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ называется выборкой конечного числа случайных исходов x_i случайной величины ξ .

1.1.1 Функция распределения вероятностей случайной величины

Случайная величина ξ описывается некоторым законом, который описывает область значений случайной величины и вероятности их исхода. Такой закон называется распределением вероятностей случайной величины и задается с помощью функции распределения вероятностей $F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\}$ [99]. Помимо функции $F_\xi(x)$ непрерывная случайная величина может быть описана с помощью функции плотности вероятностей $f_\xi(x)$ [99] случайной величины ξ . Функции $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$ связаны между собой:

$$f_\xi(x) = \frac{d}{dx} F_\xi(x), \quad F_\xi(x) = P\{\xi \leq x\} = \int_{-\infty}^x f_\xi(t) dt.$$

В таблице 1.1 приведем список распространенных в приложениях законов распределений случайных величин и соответствующие им функции распределений плотности вероятностей, которые встречаются в диссертации. Таблица 1.1 – Список законов распределений случайных величин и соответствующих им функций распределения плотности вероятностей

№	Закон распределения случайной величины ξ	Соответствующая функция распределения плотности $f_\xi(x)$
1	Экспоненциальное, $\xi \sim \text{Exp}$	$f_{\text{Exp}}(x; \mu, \lambda) = \lambda \exp\{-\lambda(x - \mu)\}, x \geq \mu$
2	Вейбулла-Гнеденко, $\xi \sim \text{We}$	$f_{\text{We}}(x; \mu, \lambda, \nu) = \nu(x - \mu)^{\nu-1} \exp\left(-\left(\frac{x - \mu}{\lambda}\right)^\nu\right) / \lambda^\nu, x \geq \mu$
3	Гамма, $\xi \sim \Gamma$	$f_\Gamma(x; \mu, \lambda, \nu) = \left(\frac{x - \mu}{\lambda}\right)^{\nu-1} \exp\left(-\frac{x - \mu}{\lambda}\right) / \lambda \Gamma(\nu), x \geq \mu$
4	Логнормальное, $\xi \sim \text{LgN}$	$f_{\text{LgN}}(x; \mu, \lambda) = \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\lambda^2}\right\} / x\sqrt{2\pi\lambda^2}, x \geq 0$
5	Хи квадрат, $\xi \sim \chi^2$	$f_{\chi^2}(x; \mu, \nu) = f_\Gamma\left(x; \mu, 2, \frac{\nu}{2}\right), x \geq \mu$
6	Обобщенное Вейбулла-Гнеденко, $\xi \sim \text{GWe}$	$f_{\text{GWe}}(x; \lambda, \nu) = \frac{\nu}{\lambda} (1 + x^\nu)^{\frac{1}{\lambda}-1} \exp\left\{1 - (1 + x^\nu)^{\frac{1}{\lambda}}\right\} / x^{1-\nu}, x \geq 0$
7	Нормальное, $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$	$f_N(x; \mu, \sigma^2) = \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\} / \sigma\sqrt{2\pi}, x \in R$
8	Равномерное, $\xi \sim U(a, b)$	$f_U(x; a, b) = \frac{1}{b - a}, x \in [a, b]$

1.1.2 Непараметрическая оценка функции распределения вероятностей случайной величины

Имея выборку $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ конечного объема из n наблюдений, мы ничего не можем достоверно сказать о законе распределения событий такой случайной величины $F_\xi(x)$, однако можем оценить неизвестную функцию распределения $F_\xi(x)$ по этой выборке X с помощью непараметрической оценки $\hat{F}_E(x)$ (или $\hat{F}_n(x)$) – эмпирической функции распределения:

$$\hat{F}_E(x) = \hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(x_i \leq x), \quad I(A) = \begin{cases} 1, & \text{условие } A \text{ верно} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Суть этой оценки $\hat{F}_E(x)$ заключается в применении схемы Бернулли для оценивания вероятности каждого события $P\{x_i \leq x\}, i = \overline{1, n}$, где вероятность такого события – это доля успешных испытаний от общего числа всех испытаний [100].

Эмпирическая функция распределения $\hat{F}_E(x)$ относится к методам непараметрической статистики и является непараметрической оценкой, т.е. для ее применения не требуется проверка дополнительных априорных предположений, например, о виде распределения [92].

1.1.3 Мера различия двух распределений случайных величин

Как только мы перестаем оперировать реальным законом распределения вероятностей $F_\xi(x)$, а переходим к некоторой оценке $\hat{F}(x)$, составленной из конечного числа наблюдений n этой случайной величины ξ , то возникает необходимость введения меры сравнения двух оценок между собой на наличие различий. Для этого следует в конечномерном пространстве функций распределений выбрать норму, которая будет задавать метрику (меру отклонения) $d(F_1, F_2)$ между двумя любыми функциями распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ этого пространства. В силу теоремы 1.1, приведенной ниже, все нормы в конечномерном пространстве эквивалентны

[106], поэтому для определения различий между функциями распределений воспользуемся мерой, которая имеет очевидный геометрический смысл – это суммарная площадь отклонений между двумя распределениями:

$$d(F_1, F_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} |F_1(x) - F_2(x)| dx, \quad (1.1)$$

что соответствует пространству Лебега L^1 [107].

Теорема 1.1. Любые две нормы $\| \cdot \|_1$ или $\| \cdot \|_2$ в конечномерном пространстве L эквивалентны в том смысле, что существуют положительные константы $0 < c \leq C$ с условием $c\|l\|_2 \leq \|l\|_1 \leq C\|l\|_2$ для всех $l \in L$.

1.2 Данные типа времени жизни

Все вышесказанное справедливо для предположения о том, что исследователь наблюдает за продолжительностью случайного исхода, начиная от момента начала эксперимента до момента окончания эксперимента. Такое наблюдение называют *полным наблюдением*, а событие, наступлению которого соответствует окончание эксперимента, называется *отказом* (например, выход устройства из строя) [23, 108].

Однако на практике не всегда удастся произвести наблюдения за объектом от самого начала эксперимента до момента отказа, поскольку в процессе проведения эксперимента некоторые объекты могут выйти из-под наблюдения, но для них имеется информация о том, что на момент выхода из-под наблюдения отказ еще не наступил. Примером такого события может быть переезд пациента, который до конца еще не завершил лечение. Такие наблюдения называются *цензурированными*, а рассматриваются такие данные в рамках задач теории надежности.

Цензурированные наблюдения бывают двух видов: *цензурированные слева* – это интервал бесконечной длины от бесконечности до момента цензурирования $(-\infty, C]$ (неизвестен момент времени начала эксперимента, например, неизвестно время появления первых симптомов заболевания пациента) и *цензурированные справа* – это интервал бесконечной длины от

момента цензурирования до бесконечности $[C, +\infty)$ (неизвестен момент времени отказа, например, неизвестно в какой момент времени у пациента исчезли симптомы заболевания) [61]. Цензурированные справа наблюдения анализируются в задачах данных типа времени жизни, а также являются подклассом задач интервальной статистики [93].

Выборкой, состоящей из цензурированных справа наблюдений (наблюдений типа времени жизни), называются множество Z :

$$Z = \{(T_i, \delta_i), i = \overline{1, n}\}, \quad (1.2)$$

где T_i – это значение наблюдения, $\delta_i = \begin{cases} 0, & i\text{-е наблюдение полное,} \\ 1, & i\text{-е наблюдение цензурированное.} \end{cases}$

Если в ходе эксперимента был зафиксирован момент времени отказа, то $T_i = X_i, \delta_i = 0$ – это полное наблюдение. Если в ходе эксперимента зафиксировать момент времени отказа не удалось, но известен момент времени выбытия объекта из эксперимента, то $T_i = C_i, \delta_i = 1$ – это цензурированное справа наблюдение.

В зависимости от определенного количества цензурированных наблюдений в выборке Z будем говорить о степени цензурирования выборки. *Степень цензурирования выборки* $R(Z)$ – это доля всех цензурированных наблюдений к общему числу наблюдений n в выборке, т.е.

$$R(Z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i \cdot 100\% .$$

Существует несколько типов цензурированных наблюдений [20, 33, 52]:

- *Цензурирование I типа.* В этом случае все объекты наблюдаются до заранее определенного момента времени X_C , а все объекты, для которых к этому моменту времени не наступил отказ, становятся цензурированными справа, т.е. $T_i = X_C, \delta_i = 1$.
- *Цензурирование II типа.* Наблюдение за объектами продолжается до наступления первых $k < n$ отказов. Для оставшихся объектов момент

цензурирования $T_i = X_{(k)}, \delta_i = 1$, где $X_{(k)}$ – момент времени отказа k -го объекта в упорядоченной последовательности среди значений $X_i, i = \overline{1, n}$.

– *Цензурирование III типа.* Каждое наблюдение T_i представляет собой

$$T_i = \min(X_i, C_i), \quad (1.3)$$

где $X_i \sim \xi$ – момент времени отказа с функцией распределения $F(t)$, $C_i \sim \xi^C$ – момент времени цензурирования с функцией распределения $F^C(t)$. Эти случайные величины ξ и ξ^C независимы, т.е. для соответствующих функций распределений $F(t)$ и $F^C(t)$ справедливо следующее соотношение:

$$F(t, \tau) = F(t) \cdot F^C(\tau),$$

где $F(t, \tau)$ – совместная функция распределения случайных величин ξ и ξ^C [91]. В диссертации будет рассмотрено именно цензурирование III типа, т.к. такая модель проведения статистического эксперимента наиболее близко совпадает с анализом данных на практике в медицине, биостатистике и инженерных исследованиях [94].

1.2.1 Непараметрические оценки функции надежности

В задачах обработки данных типа времени жизни распределение случайной величины описывается с помощью функции надежности. *Функцией надежности* $S(t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t :

$$S(t) = P\{T > t\} = 1 - P\{T \leq t\} = 1 - F(t),$$

где $F(t)$ – функция распределения моментов отказов.

В силу особой специфики распределение вероятностей случайной величины на основе данных типа времени жизни не может быть оценено с помощью эмпирической функции распределения, т.к. требуется учитывать цензурированные (интервальные) наблюдения. В рамках диссертации

рассматриваются три оценки функции надежности, которые хорошо изучены и прошли многолетнюю апробацию [52].

1.2.1.1 Множительная оценка Каплана-Мейера

В середине XX века Капланом и Мейером [44] была опубликована работа, предлагающая непараметрическую оценку, которая может учитывать специфику цензурированных данных. Кроме того, предложенная оценка в случае полных данных эквивалентна эмпирической функции распределения. Строится оценка Каплана-Мейера $\hat{S}_{KM}(t)$ по исходной выборке $Z = \{(T_i, \delta_i), i = \overline{1, n}\}$ следующим образом:

$$\hat{S}_{KM}(t) = \hat{S}_{KM}(t, Z) = P\{T > t\} = \prod_{i: T_{(i)} \leq t, \delta_{(i)} = 0} \frac{n-i}{n-i+1}, t \in R, \quad (1.4)$$

где $T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \dots \leq T_{(n)}$.

Можно выделить один существенный недостаток данной оценки: если последнее наблюдение цензурированное, $\delta_{(n)} = 1$, то оценка $\hat{S}_{KM}(t)$ не достигает нуля.

1.2.1.2 Экспоненциальная оценка Бреслоу

Другая оценка функции надежности была предложена Бреслоу в работе 1972 года [47]. Суть данной непараметрической оценки заключается в том, что функция надежности может быть представлена в следующем виде:

$$S(t) = P\{T > t\} = \exp\{-H(t)\},$$

где $H(t)$ – кумулятивная (накопительная) функция риска (об этой характеристике будет сказано в 1.2.2). Вместо неизвестной функции $H(t)$ используется ее непараметрическая оценка Нельсона-Аалена $\hat{H}_{NA}(t)$, которая с учетом введенных обозначений имеет следующим вид:

$$\hat{H}_{NA}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_{(i)} I(T_{(i)} \leq t)}{n-i+1}.$$

Таким образом, непараметрическая оценка Бреслоу имеет следующий вид:

$$\hat{S}_{Br}(t) = \hat{S}_{Br}(t, Z) = P\{T > t\} = \exp\{-\hat{H}_{NA}(t)\} = \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \frac{\delta_{(i)} I(T_{(i)} \leq t)}{n-i+1}\right\}, t \in R. \quad (1.5)$$

По аналогии с оценкой функции надежности Каплана-Мейера у оценки Бреслоу имеется схожий недостаток: оценка $\hat{S}_{Br}(t)$ принимает нулевое значение только при $t = +\infty$, это следует из решения уравнения $\exp(-x) = 0, x \geq 0$.

1.2.1.3 Степенная оценка Абдушукурова

Еще одна оценка функции надежности, которая заслуживает внимания при анализе данных типа времени жизни, – это оценка Абдушукурова $\hat{S}_A(t)$ [52]. Это степенная оценка, в основе которой лежит экспоненциальная оценка функции надежности $\hat{S}_{Br}(t)$. С учетом введенных ранее обозначений оценка Абдушукурова может быть записана следующим образом:

$$\hat{S}_A(t) = \hat{S}_A(t, Z) = P\{T > t\} = \begin{cases} 1, & t < T_{(1)}, \\ \left(\frac{n-j}{n}\right)^{R_n(t)}, & T_{(j)} \leq t < T_{(j+1)}, 1 \leq j \leq n-1, \\ 0, & t \geq T_{(n)}, \end{cases} \quad (1.6)$$

где

$$R_n(t) = \frac{-\ln(\hat{S}_{Br}(t))}{\sum_{j=1}^n \frac{I(T_{(j)} \leq t)}{n-j+1}}.$$

В сравнении с предыдущими оценками функции надежности Каплана-Мейера $\hat{S}_{KM}(t)$ и Бреслоу $\hat{S}_{Br}(t)$ оценка Абдушукурова $\hat{S}_A(t)$ лишена недостатка неопределенного поведения оценки и обращается в ноль до момента $t = +\infty$ в соответствии со свойствами, заложенными в модель оценки функции надежности.

1.2.2 Функция интенсивности рисков

Помимо функции надежности, закон распределения случайной величины с цензурированными наблюдениями может также быть описан с помощью функции интенсивности рисков. Термин функции интенсивности рисков был впервые опубликован в работе Барлоу (Barlow) 1963 года [109]. *Функция интенсивности* $h(t)$ определяется как вероятность того, что объект, не отказавший к началу соответствующего интервала, откажет в течение этого интервала:

$$h(t) = \lim_{h \rightarrow 0} (P\{t \leq T < t+h | T > t\} / h). \quad (1.7)$$

В случае непрерывной случайной величины T функцию интенсивности рисков $h(t)$ можно определить следующим образом:

$$h(t) = \frac{\frac{d}{dt}(1-S(t))}{S(t)} = \frac{\frac{d}{dt}F(t)}{S(t)} = \frac{f(t)}{S(t)}. \quad (1.8)$$

С функцией надежности связана еще одна функция, с помощью которой может быть описана случайная величина с цензурированными данными – кумулятивная (накопительная) функция риска:

$$H(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau = -\ln(S(t)). \quad (1.9)$$

1.3 Проверка статистической гипотезы однородности распределений

Статистическая гипотеза однородности распределений может быть сформулирована следующим образом.

Пусть имеются две выборки $Z_1 = \{(T_{1i}, \delta_{1i}), i = \overline{1, n_1}\}$ и $Z_2 = \{(T_{2i}, \delta_{2i}), i = \overline{1, n_2}\}$, соответствующие двум независимым случайным величинам ξ_1 и ξ_2 . Каждой такой случайной величине соответствует функция надежности – $S_1(t)$ и $S_2(t)$. Тогда нулевая гипотеза H_0 с учетом обозначений может быть записана в следующем виде:

$$H_0 : S_1(t) = S_2(t), \quad (1.10)$$

против альтернативной гипотезы H_1

$$H_1 : S_1(t) \neq S_2(t). \quad (1.11)$$

В дальнейшем выборки Z_1 и Z_2 могут быть объединены:

$$Z = Z_1 \cup Z_2 = \{(T_i, \delta_i, v_i), i = \overline{1, n}\}, n = n_1 + n_2, v_i = \begin{cases} 0, T_i \in Z_1 \\ 1, T_i \in Z_2 \end{cases},$$

а элементы выборки могут быть упорядочены:

$$T_{(11)} \leq T_{(12)} \leq \dots T_{(1n_1)},$$

$$T_{(21)} \leq T_{(22)} \leq \dots T_{(2n_2)},$$

$$T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq \dots T_{(n)}.$$

Проверяемая гипотеза говорит о равенстве этих распределений, конкурирующая – о неравенстве. Противоположным понятием является «различие». Можно переформулировать задачу: требуется проверить, есть ли существенное различие между выборками. Если различия нет, то для дальнейшего анализа данных такие выборки можно объединить.

В процессе проверки данной гипотезы по выборкам Z_1 и Z_2 вычисляется значение статистики S_n используемого критерия S^* . Затем, для того, чтобы принять решение относительно справедливости основной гипотезы H_0 , необходимо знать ее критическую область (наименее вероятные значения статистики), при попадании в которую гипотеза H_0 отклоняется. Более подробно ознакомиться с алгоритмом проверки статистической гипотезы однородности можно в разделе 1.5 (Алгоритм 1.1).

1.4 Ошибки первого и второго рода

В результате проверки статистической гипотезы мы либо отклоняем, либо не отклоняем гипотезу H_0 . Однако этот статистический вывод не всегда может совпадать с действительностью, что может привести к ошибочным статистическим выводам. Это напрямую связано с тем, что решение о справедливости нулевой гипотезы H_0 принимается на основании выборочных данных, а значит, недостаточный объем исследуемых данных

может влиять на точность статистических выводов. Приведем все возможные исходы проверки статистической гипотезы с указанием вероятностей появления этих исходов в таблице 1.2.

Таблица 1.2 – Возможные исходы проверки статистической гипотезы

	Гипотеза H_0 не отклоняется	Гипотеза H_0 отклоняется
Гипотеза H_0 верна	$P\{H_0 \text{ верно не отклонена}\} = 1 - \alpha$	$P\{H_0 \text{ неверно отклонена}\} = \alpha$ (ошибка I-го рода)
Гипотеза H_0 не верна	$P\{H_0 \text{ неверно принята}\} = \beta$ (ошибка II-го рода)	$P\{H_0 \text{ верно отклонена}\} = 1 - \beta$

Ошибка I-го рода – это исход проверки статистической гипотезы, при котором верная гипотеза H_0 отклоняется. Вероятность такого исхода обозначается α , где $\alpha = P\{S_n \in \Omega_\alpha | H_0\}$. При проверке статистической гипотезы величина α фиксируется из соображений допустимости совершить ошибку I-го рода в рамках решаемой задачи.

Ошибка II-го рода – это исход проверки статистической гипотезы, при котором неверная гипотеза H_0 не отклоняется. Вероятность такого исхода обозначается β , где $\beta = P\{S_n \notin \Omega_\alpha | H_1\}$.

Очевидно, что при проведении анализа данных особый интерес представляют критерии, которые при заданной вероятности ошибки I-го рода реже других совершают ошибку II-го рода, т.к. такие критерии лучше различают пару конкурирующих гипотез H_0 и H_1 . Следовательно, критерий S_1^* является более предпочтительным, чем другой критерий S_2^* , если у него ниже вероятность совершить ошибку II-го рода β при прочих равных условиях (объемы и степени цензурирования выборок и др.). Величину $1 - \beta$ называют *мощностью критерия*.

Между вероятностями ошибок I-го и II-го родов существует такая функциональная зависимость $\beta(\alpha)$, что с ростом одной величины α уменьшается другая величина – β , т.е. α и β обратно пропорциональны. На

рисунке 1.1 показан пример зафиксированной ошибки I-го рода α и соответствующей ошибки II-го рода β . Однако на практике в аналитическом виде определить эту функциональную зависимость, зачастую, не представляется возможным, т.к. распределение статистики критерия при справедливости альтернативной гипотезы $G(S_n|H_1)$ в общем случае неизвестно.

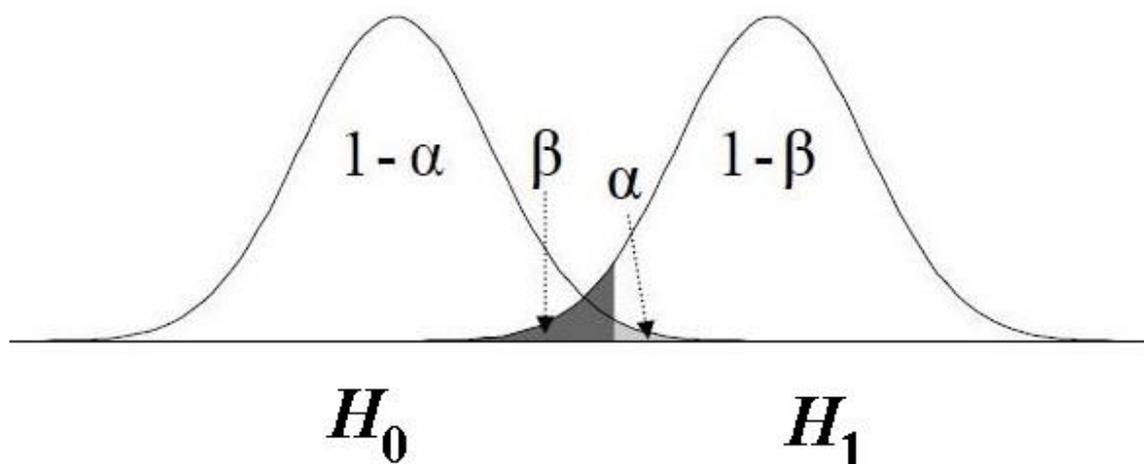


Рисунок 1.1 – Пример зафиксированной ошибки I-го рода α и соответствующей ошибки II-го рода β

1.5 Критерии однородности распределений

Проверка гипотезы о принадлежности двух выборок наблюдений одной генеральной совокупности является распространенной задачей в рамках статистического анализа. Однородность распределений задает отношение равенства двух объектов – двух функций надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$. В силу соотношения (1.1) две функции надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ будут однородными, если справедливо $d(S_1, S_2) = 0$. Однако мы имеем дело с выборками конечного объема, поэтому не знаем соответствующих функций надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$, а можем оперировать только оценками этих функций надежности – $\hat{S}_1(t)$ и $\hat{S}_2(t)$. Поскольку выборки конечного объема, то оценки функции надежности отклоняются от реальной функции надежности на величину

случайной ошибки. Это значит, что даже в случае, когда исходные функции надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ являются однородными, мера отклонения между оценками $\hat{S}_1(t)$ и $\hat{S}_2(t)$ не нулевая: $d(\hat{S}_1, \hat{S}_2) = \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n > 0$. Однако при $n \rightarrow +\infty$ величина случайного отклонения ε_n будет стремиться к нулю.

Следовательно, необходимо строгое математическое правило, на основании которого будет приниматься решение об однородности двух выборок. Таким правилом является *статистический критерий проверки гипотезы однородности*, или *критерий однородности*.

Аппарат проверки статистических гипотез – это гибкий и эффективный инструмент для анализа данных и исследования статистических закономерностей [2]. Для получения одного и того же статистического вывода могут использоваться различные подходы к проверке статистических гипотез. Например, проверку гипотезы однородности можно анализировать не только с помощью критериев однородности распределений, но и с помощью критериев однородности характеристик случайной величины: между распределениями отсутствуют значимые отклонения в средних (гипотеза однородности средних [6]), в дисперсиях (гипотеза однородности дисперсий [77]) и других характеристиках случайных величин. Алгоритм проверки указанных выше статистических гипотез приведен ниже.

Алгоритм 1.1. Проверка статистической гипотезы однородности для двух исходных выборок Z_1 и Z_2 :

1. Определяем нулевую $H_0: S_1(t) = S_2(t)$ и альтернативную $H_1: S_1(t) \neq S_2(t)$ гипотезы;
2. Фиксируется допустимая для решаемой задачи вероятность ошибки I-го рода $\alpha \in (0,1)$;
3. По двум выборкам Z_1 и Z_2 вычисляется значение статистики S_n критерия S^* : $S_n = S^*(Z_1, Z_2)$;

4. На множестве допустимых значений статистики S_n определяют критическое множество Ω_α такое, что $P\{S_n \in \Omega_\alpha | H_0\} = \alpha$;

5. Если $S_n \in \Omega_\alpha$, то делают вывод, что данные противоречат нулевой гипотезе H_0 при уровне значимости α (гипотеза H_0 отклоняется).

Если $S_n \notin \Omega_\alpha$, то делают вывод, что данные не противоречат нулевой гипотезе H_0 при уровне значимости α (гипотеза H_0 не отклоняется).

Если гипотеза H_0 не отклоняется, то это еще не значит, что гипотеза верна. Тому есть следующие причины:

- нулевая гипотеза H_0 может не отклоняться, но по мере увеличения объема выборок могут выявляться более тонкие несоответствия данных и проверяемой гипотезы, что приведет к отклонению гипотезы H_0 ;
- выбранная статистика критерия S^* может не в полной мере отражать информацию, содержащуюся в гипотезе H_0 , что увеличивает вероятность ошибки II-го рода β (например, если для проверки гипотезы однородности распределений применять критерии однородности средних, т.к. однородность средних для однородности распределений необходима, но не достаточна).

Обозначим через S_α , значение, которое является корнем уравнения $F(S_\alpha) = \alpha$, где $F(t) = P\{S_n \leq t\}$ – непрерывная монотонная функция распределения статистики S_n критерия S^* :

$$S_\alpha = F^{-1}(\alpha).$$

Критическая область Ω_α в случае унимодальной плотности распределения статистики критерия S^* может быть трех типов:

- левосторонней с областью $\Omega_\alpha = (-\infty, S_\alpha)$, достигнутый уровень значимости $p_v = F(S_n)$;
- правосторонней с областью $\Omega_\alpha = (S_\alpha, +\infty)$, достигнутый уровень значимости $p_v = 1 - F(S_n)$;

- двусторонней с областью $\Omega_\alpha = \left(-\infty, S_{\alpha/2}\right) \cup \left(S_{1-\alpha/2}, +\infty\right)$, достигнутый уровень значимости $pv = 2 \min \{F(S_n), 1 - F(S_n)\}$.

Статистические критерии обладают рядом свойств:

- несмещенность критерия, т.е. $1 - \beta(H_i) \geq \alpha, \forall i \geq 0$;
- состоятельность критерия, т.е. $\beta(H_i) \rightarrow 0, \forall i$ при $n \rightarrow \infty$;
- равномерно более мощный критерий, т.е. критерий, мощность которого является наибольшей для всех альтернативных гипотез.

1.5.1 Критерии однородности распределений для полных данных

К группе критериев однородности распределений для полных данных относятся критерии и их модификации, применяемые в классическом статистическом анализе. Единственное ограничение в применимости этих критериев в задачах анализа данных типа времени жизни, чтобы у каждой выборки $Z_i, i=1,2$ степень цензурирования $R(Z_i), i=1,2$ была равна нулю, т.е. $R(Z_i) = 0, \forall i$.

1.5.1.1 Критерий Колмогорова-Смирнова

Двухвыборочный критерий Колмогорова-Смирнова является модификацией критерия согласия Колмогорова [12]. Критерий был получен Смирновым [11]. Данный критерий можно отнести к типу дистанционных критериев, т.к. статистические выводы основаны на мере Колмогорова между распределениями.

Статистика критерия Колмогорова-Смирнова имеет следующий вид:

$$S_{KS} = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} D_{n_1, n_2}, \quad (1.12)$$

где

$$D_{n_1, n_2} = \max \{D_{n_1, n_2}^+, D_{n_1, n_2}^-\},$$

$$D_{n_1, n_2}^+ = \max_{1 \leq j \leq n_1} \left\{ \left| \frac{j}{n_1} - \hat{F}_2(T_{1j}) \right| \right\}, D_{n_1, n_2}^- = \max_{1 \leq j \leq n_1} \left\{ \left| \hat{F}_2(T_{1j}) - \frac{j-1}{n_1} \right| \right\},$$

$\hat{F}_2(t)$ – эмпирическая функция распределения, соответствующая выборке Z_2 .

Статистика критерия Колмогорова-Смирнова S_{KS} асимптотически распределена по распределению Колмогорова K с функцией распределения вероятностей $F_K(t)$:

$$F_K(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \exp\{-2k^2 t^2\}, t \geq 0.$$

Гипотеза H_0 отклоняется, если $S_{KS} > K_{1-\alpha}$, где $K_{1-\alpha}$ – это $(1-\alpha)$ квантиль распределения Колмогорова. В противном случае нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

В работе [104] показаны оценки мощности критерия, а также тот факт, что гладкость функции распределения статистики сильно зависит от наименьшего общего кратного объемов выборок n_1, n_2 . Поэтому предпочтительно применять этот критерий в случае, когда объемы выборок n_1 и n_2 не равны и представляют собой взаимно простые числа, т.к. в таком случае распределение статистики S_{KS} больше напоминает непрерывную функцию распределения. Асимптотические формулы распределения расстояния Колмогорова D_{n_1, n_2} показаны в [1, 110, 111].

1.5.1.2 Критерий Лемана-Розенблатта

Критерий Лемана-Розенблатта является двухвыборочной модификацией критерия согласия Крамера-Мизеса-Смирнова [112-114]. Критерий был описан в работах Лемана [15] и Розенблатта [16]. Данный критерий можно отнести к группе дистанционных критериев, т.к. статистические выводы основаны на накопленном отклонении двух оценок функций надежности в квадратичной метрике

$$S_{LR} = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{F}_{n_1}(t) - \hat{F}_{n_2}(t))^2 d\hat{F}_n(t),$$

где $\hat{F}_{n_1}(x)$ – эмпирическая функция распределения, соответствующая выборке Z_1 , $\hat{F}_{n_2}(x)$ – эмпирическая функция распределения, соответствующая выборке Z_2 , $\hat{F}_n(t) = \frac{n_1}{n_1+n_2} \hat{F}_{n_1}(t) + \frac{n_2}{n_1+n_2} \hat{F}_{n_2}(t)$ – эмпирическая функция распределения, построенная по вариационному ряду объединения двух выборок. Как правило, статистика критерия Лемана-Розенблатта используется в следующем виде:

$$S_{LR} = \frac{1}{n_1 n_2 (n_1 + n_2)} \left\{ n_2 \sum_{j=1}^{n_2} (r_j - j)^2 + n_1 \sum_{j=1}^{n_1} (s_j - j)^2 \right\} - \frac{4n_1 n_2}{6(n_1 + n_2)}, \quad (1.13)$$

где r_j – порядковый номер (ранг) наблюдения T_{2j} в объединенном вариационном ряду T_j , а s_j – порядковый номер (ранг) наблюдения T_{1j} в объединенном вариационном ряду T_j .

Розенблаттом было показано в 1952 году [16], что статистика S_{LR} асимптотически распределена по закону $a1$, как и распределение критерия согласия Крамера-Мизеса-Смирнова ω^2 .

Гипотеза H_0 отклоняется, если $S_{LR} > a1_{1-\alpha}$, где $a1_{1-\alpha}$ – это $(1-\alpha)$ квантиль распределения $a1$. В противном случае нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

В отличие от статистики критерия Колмогорова-Смирнова распределение статистики S_{LR} быстро сходится к предельному закону [3]. В работе [104] отмечается, что мощность критерия Лемана-Розенблатта, как правило, оказывается выше мощности критерия Колмогорова-Смирнова.

1.5.1.3 Критерий Андерсона-Дарлингга-Петита

Как и два предыдущих статистических критерия, критерий Андерсона-Дарлингга-Петита является модификацией критерия согласия – Андерсона-Дарлингга Ω^2 . Именно в работе Петита (Pettitt) 1976 года [115, 116] впервые приведены соотношения для двухвыборочного критерия, а позднее Шольц

(Scholz) и Стефенс (Stephens) привели обобщение на n -мерный случай [117]. Данный критерий можно отнести к группе дистанционных критериев, т.к. статистические выводы основаны на накопленном отклонении двух оценок функций надежности в квадратичной метрике. Однако, в отличие от критерия Лемана-Розенблатта, в статистике критерия Андерсона-Дарлинга-Петита используется весовая функция $\psi(t) = \frac{1}{\hat{F}_n(t)(1-\hat{F}_n(t))}$, за счет которой наибольший вес получают наблюдения "на хвостах" сравниваемых распределений.

Статистика критерия Андерсона-Дарлинга-Петита выглядит следующим образом:

$$S_{ADP} = \frac{1}{n_1 + n_2} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_1+n_2-1} \frac{((n_1 + n_2)m_{ij} - j \cdot n_i)^2}{j(n-j)}, \quad (1.14)$$

где m_{ij} – число наблюдений в i -выборке, которые не превышают значения T_j в объединенном вариационном ряду.

Статистика критерия асимптотически распределена по закону $a2$.

Гипотеза H_0 отклоняется, если $S_{ADP} > a2_{1-\alpha}$, где $a2_{1-\alpha}$ – это $(1-\alpha)$ квантиль распределения $a2$. В противном случае нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

Сходимость распределения статистики при справедливости нулевой гипотезы $G(S_{ADP} | H_0)$ к предельному распределению исследована в [118]. В работе [119] по результатам сравнительного анализа мощности отмечается, критерий Андерсона-Дарлинга-Петита, как правило, имеет выше мощность, чем критерий Лемана-Розенблатта, особенно относительно различий в характеристиках сравниваемых распределений, однако при небольших объемах выборок $n_1, n_2 < 20$ мощности критериев близки.

1.5.1.4 Модифицированный Жангом критерий Колмогорова-Смирнова

В более поздней работе 2006-го года Жангом [19] были описаны модификации рассмотренных выше статистик критериев. В работе приводится сравнительный анализ мощности критериев: предложенные критерии имеют более высокую мощность.

Статистика модифицированного Жангом критерия Колмогорова-Смирнова выглядит следующим образом:

$$S_{ZK} = S_{ZK}^{n_1, n_2} = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^2 n_i \left(F_{ik} \ln \left(\frac{F_{ik}}{F_k} \right) + (1 - F_{ik}) \ln \left(\frac{1 - F_{ik}}{1 - F_k} \right) \right) \right\}, \quad (1.15)$$

где

$$F_k = \frac{k - 1/2}{n_1 + n_2}, \quad F_{ik} = \begin{cases} \frac{j - 1/2}{n_i}, & \text{если } k = r_{ij} \text{ для некоторого } j \\ \frac{j}{n_i}, & \text{если } r_{ij} < k < r_{i, j+1} \text{ для некоторого } j \end{cases},$$

r_{ij} – это ранг наблюдения T_{ij} в объединенной и упорядоченной выборке $Z = Z_1 \cup Z_2$, $r_{i0} = 1$, $r_{i, n_i+1} = n + 1$.

Для распределения статистики S_{ZK} отсутствует асимптотическая сходимость. Автором приводятся процентные точки для проверки гипотезы однородности.

Гипотеза H_0 отклоняется, если $S_{ZK} > G(S_{ZK}^{n_1, n_2} | H_0)_{1-\alpha}$, где $G(S_{ZK}^{n_1, n_2} | H_0)_{1-\alpha}$ – это $(1-\alpha)$ квантиль распределения статистики S_{ZK} при справедливости гипотезы H_0 и объемах выборок n_1 и n_2 . В противном случае нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

На рассмотренных автором альтернативных гипотезах мощность модифицированного Жангом критерия Колмогорова-Смирнова S_{ZK} превышает мощности классических критериев со статистиками S_{KS} , S_{LR} и S_{ADP} [19].

1.5.1.5 Модифицированный Жангом критерий Лемана-Розенблатта

Статистика модифицированного Жангом критерия Лемана-Розенблатта выглядит следующим образом:

$$S_{ZC} = S_{ZC}^{n_1, n_2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} \ln \left(\frac{n_i}{j-0.5} - 1 \right) \ln \left(\frac{n_1 + n_2}{r_{ij} - 0.5} - 1 \right), \quad (1.16)$$

где

$$F_k = \frac{k - 1/2}{n_1 + n_2}, \quad F_{ik} = \begin{cases} \frac{j - 1/2}{n_i}, & \text{если } k = r_{ij} \text{ для некоторого } j \\ \frac{j}{n_i}, & \text{если } r_{ij} < k < r_{i, j+1} \text{ для некоторого } j \end{cases},$$

r_{ij} – это ранг наблюдения T_{ij} в объединенной и упорядоченной выборке $Z = Z_1 \cup Z_2$, $r_{i0} = 1$, $r_{i, n_i+1} = n+1$.

Для распределения статистики S_{ZC} отсутствует асимптотическая сходимость. Автором приводятся процентные точки для проверки гипотезы однородности [19].

Гипотеза H_0 отклоняется, если $S_{ZC} < G(S_{ZC}^{n_1, n_2} | H_0)_\alpha$, где $G(S_{ZC}^{n_1, n_2} | H_0)_\alpha$ – это α квантиль распределения статистики S_{ZC} при справедливости гипотезы H_0 и объемах выборок n_1 и n_2 . В противном случае нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

На рассмотренных автором альтернативных гипотезах мощность модифицированного Жангом критерия Лемана-Розенблатта S_{ZC} превышает мощности классических критериев со статистиками S_{KS} , S_{LR} и S_{ADP} [19].

1.5.1.6 Модифицированный Жангом критерий Андерсона-Дарлингга

Статистика модифицированного Жангом критерия Андерсона-Дарлингга выглядит следующим образом:

$$S_{ZA} = S_{ZA}^{n_1, n_2} = - \sum_{k=1}^{n_1+n_2} \sum_{i=1}^2 n_i \frac{F_{ik} \ln(F_{ik}) + (1-F_{ik}) \ln(1-F_{ik})}{(k-0.5)(n-k+0.5)}, \quad (1.17)$$

где

$$F_k = \frac{k - 1/2}{n_1 + n_2}, F_{ik} = \begin{cases} \frac{j - 1/2}{n_i}, & \text{если } k = r_{ij} \text{ для некоторого } j \\ \frac{j}{n_i}, & \text{если } r_{ij} < k < r_{i,j+1} \text{ для некоторого } j \end{cases},$$

r_{ij} – это ранг наблюдения T_{ij} в объединенной и упорядоченной выборке $Z = Z_1 \cup Z_2$, $r_{i0} = 1$, $r_{i,n_i+1} = n + 1$.

Для распределения статистики S_{ZA} отсутствует асимптотическая сходимость. Автором приводятся процентные точки для проверки гипотезы однородности [19].

Гипотеза H_0 отклоняется, если $S_{ZA} < G(S_{ZA}^{n_1, n_2} | H_0)_\alpha$, где $G(S_{ZA}^{n_1, n_2} | H_0)_\alpha$ – это α квантиль распределения статистики S_{ZA} при справедливости гипотезы H_0 и объемах выборок n_1 и n_2 . В противном случае нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

На рассмотренных автором альтернативных гипотезах мощность модифицированного Жангом критерия Андерсона-Дарлингга S_{ZA} превышает мощности классических критериев со статистиками S_{KS} , S_{LR} и S_{ADP} [19].

1.5.2 Критерии однородности распределений для данных типа времени жизни

Последующие критерии для проверки гипотезы однородности распределений предназначены для обработки данных и исследования статистических закономерностей как в задачах классического статистического анализа, так и в задачах обработки данных типа времени жизни. При построении статистик данных критериев использовались самые различные подходы, например, обобщение классических критериев на случай данных типа времени жизни, использование специальных моделей, учитывающих тип альтернативной гипотезы, и др.

1.5.2.1 Обобщенный Геханом критерий Уилкоксона

В 1965 году Геханом (Gehan) [36, 120] предложен статистический критерий проверки гипотезы однородности, который обобщает ранговый непараметрический критерий Уилкоксона [38] на случай цензурированных справа данных.

Статистика критерия Гехана имеет следующий вид:

$$S_G = \sum_{i=1}^n (1-v_i) h_i / \sqrt{\frac{n_1 n_2}{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 - 1)} \sum_{i=1}^n (1-v_i) h_i^2}, \quad (1.18)$$

где

$$h_i = \sum_{j=1}^{n_1+n_2} v_j h_{ij}, \quad h_{ij} = \begin{cases} 1, T_i > T_j & \& \delta_j = 0 \& v_i = 0 \& v_j = 1 \\ -1, T_i < T_j & \& \delta_j = 0 \& v_i = 0 \& v_j = 1. \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Распределение статистики S_G имеет асимптотическую сходимость к стандартному нормальному закону z .

Гипотеза H_0 отклоняется, если $|S_G| > z_{1-\alpha/2}$, где $z_{1-\alpha/2}$ – это $(1-\alpha/2)$ квантиль стандартного нормального распределения. В противном случае нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

1.5.2.2 Обобщенный Пето критерий Уилкоксона

В 1972 году Пето (Peto R., Peto J.) в работе [37, 120] приводят свое обобщение статистики критерия Уилкоксона на случай данных типа времени жизни.

Статистика критерия Пето с учетом введенных обозначений имеет следующий вид:

$$S_P = \left\{ n(n-1) \sum_{i=1}^n u_i (1-v_i) \right\} / \left\{ n_1 n_2 \sum_{i=1}^n u_i^2 \right\}, \quad (1.19)$$

где

$$u_i = \begin{cases} \hat{S}_{KM}(T_i) + \hat{S}_{KM}(T_{k_i}) - 1, & c_i = 0 \\ \hat{S}_{KM}(T_{k_i}) - 1, & c_i = 1 \end{cases}, \quad k_i = \max \{ j \mid j \in \{0, 1, \dots, i-1\}, c_j = 0 \}, \quad c_0 = 0,$$

$\hat{S}_{KM}(t)$ – это оценка функции надежности Каплана-Мейера для объединенной выборки $Z = Z_1 \cup Z_2$. Распределение статистики S_p имеет асимптотическую сходимость к стандартному нормальному закону Z .

Гипотеза H_0 отклоняется, если $|S_p| > z_{1-\alpha/2}$, где $z_{1-\alpha/2}$ – это $(1-\alpha/2)$ квантиль стандартного нормального распределения. В противном случае нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

1.5.2.3 Логарифмический ранговый критерий

Обобщение критерия Сэвиджа [55], сделанное Мантелом в работе [54], называют логарифмическим ранговым критерием. Идея данного критерия заключается в том, что каждое наблюдение вносит строго определенный вклад в общее значение статистики. Размер такого вклада каждого наблюдения – это некоторый вес, который является функцией от логарифма функции надежности [120]. В качестве оценки данной функции используется оценка Альтшулера [121].

Статистика логарифмического рангового (логрангового) критерия с учетом введенных обозначений имеет следующий вид:

$$S_{LG} = \frac{U}{I}, \quad (1.20)$$

где

$$U = \sum_{i=1}^n (1 - \delta_i) - \sum_{j=1}^i \frac{1}{n - j + 1},$$

$$I = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (1 - \delta_i) \frac{n-i}{n-i+1}},$$

$$n = n_1 + n_2.$$

Распределение статистики S_{LG} имеет асимптотическую сходимость к стандартному нормальному закону Z .

Гипотеза H_0 отклоняется, если $|S_{LG}| > z_{1-\alpha/2}$, где $z_{1-\alpha/2}$ – это $(1-\alpha/2)$ квантиль стандартного нормального распределения. В противном случае нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

1.5.2.4 Критерий Кокса-Мантела

Статистика критерия Кокса-Мантела [54, 57, 120] с учетом используемых обозначений выглядит следующим образом:

$$S_{CM} = \frac{U}{I}, \quad (1.21)$$

где

$$U = r_2 - \sum_{i=1}^{n_1+n_2} (1-\delta_i) A_{(i)},$$

$$I = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_1+n_2} (1-\delta_i) A_{(i)} (1-A_{(i)})},$$

$$r_2 = \sum_{i=1}^{n_1+n_2} v_i (1-\delta_i),$$

$$A_{(i)} = \frac{1}{n-i} \sum_{j=i}^n v_j.$$

Распределение статистики S_{CM} имеет асимптотическую сходимость к стандартному нормальному закону \mathcal{Z} .

Гипотеза H_0 отклоняется, если $|S_{CM}| > z_{1-\alpha/2}$, где $z_{1-\alpha/2}$ – это $(1-\alpha/2)$ квантиль стандартного нормального распределения. В противном случае нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

1.5.2.5 Q-критерий

Мартинез и Норанхо обратили внимание на тот факт, что обобщенные критерии Уилкоксона (критерии Гехана и Пето) лучше различают пару конкурирующих гипотез, если функции надежности имеют различия в ранние моменты времени, а логарифмический ранговый критерий – в

поздние моменты времени. Таким образом, две группы критериев дополняют друг друга. Пытаясь объединить достоинства обеих групп критериев, авторы в работе 2010 года [67] предложили статистическую процедуру выбора определенного критерия. Эта статистическая процедура получила название *Q-критерий*.

В диссертационной работе *Q-критерий* используется в качестве двухэтапного критерия: на первом этапе вычисляется значение дополнительной статистики (находятся различия между оценками функций надежности, как показано на рисунке 1.2), на втором этапе по значению дополнительной статистики выбираем каким критерием стоит воспользоваться – обобщенным критерием Уилкоксона или логранговым.

С учетом используемых обозначений статистика *Q-критерия* выглядит следующим образом:

$$S_Q = S_Q^{n_1, n_2} = \begin{cases} S_{LG}, Q < 0 \\ S_p, Q \geq 0 \end{cases}, \quad (1.22)$$

где

$$Q = \left| \hat{S}_2(t_{0.6}) - \hat{S}_1(t_{0.6}) \right| - \left| \hat{S}_2(t_{0.2}) - \hat{S}_1(t_{0.2}) \right|,$$

$$t_p = \hat{S}_1^{-1}(p),$$

$\hat{S}_i(t), i=1,2$ – оценка функции надежности Каплана-Мейера, соответствующая выборке $Z_i, i=1,2$.

В работе Мартинез [67] приводится сравнительный анализ статистической мощности *Q-критерия* с ранее рассмотренными обобщенными критериями Уилкоксона (Гехана и Пето) и логарифмического рангового критерия. По результатам этого сравнительного анализа мощности видно, что на рассматриваемых альтернативных гипотезах для разных степеней цензурирования мощность *Q-критерия* близка к наибольшей.

Для распределения статистики S_Q отсутствует информация об асимптотической сходимости.

Гипотеза H_0 отклоняется, если $|S_Q| > G(S_Q^{n_1, n_2} | H_0)_{1-\alpha/2}$, где $G(S_Q^{n_1, n_2} | H_0)_{1-\alpha/2}$ – это $(1-\alpha/2)$ квантиль распределения статистики S_Q при справедливости гипотезы H_0 и объемах выборок n_1 и n_2 . В противном случае нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

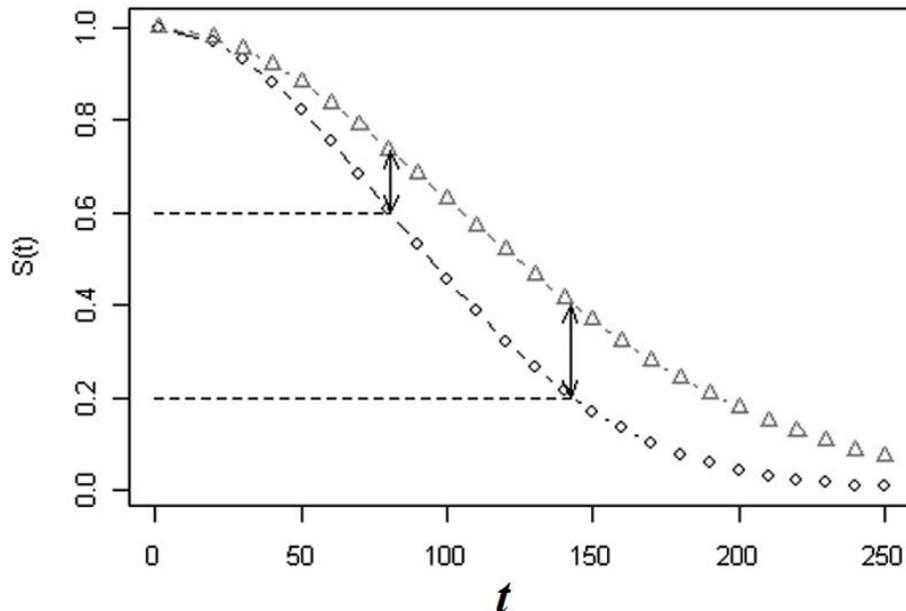


Рисунок 1.2 – Графическое представление способа определения наибольших отклонений между функциями надежности в ранние или поздние моменты времени

1.5.2.6 Взвешенный логарифмический ранговый критерий

В работе Флеминга и Харрингтона [122] предложено обобщение логарифмического рангового критерия. Используя различные весовые функций, можно влиять на поведение статистики критерия, добиваясь эффекта, что статистика критерия будет лучше различать такие пары конкурирующих гипотез, которые не различала исходная статистика критерия.

Статистика взвешенного логарифмического (логрангового) критерия выглядит следующим образом:

$$S_{WLG} = \frac{U^2}{\sigma}, \quad (1.23)$$

где

$$U = \sum_{j=1}^{n_1} (1 - \delta_{1j}) K(T_{1j}) \frac{Y_2(T_{1j})}{Y(T_{1j})} - \sum_{j=1}^{n_2} (1 - \delta_{2j}) K(T_{2j}) \frac{Y_1(T_{2j})}{Y(T_{2j})},$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} (1 - \delta_{ij}) K^2(T_{ij}) \frac{Y_1(T_{ij}) Y_2(T_{ij})}{Y^2(T_{ij})},$$

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t), \quad Y_i(t) = \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}(t), \quad Y_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & T_{ij} \geq t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

В [64] показаны к применению следующие весовые функции $K(t)$:

- 1) логарифмическая ранговая статистика, $K(t) = 1/\sqrt{n_1 + n_2}$;
- 2) статистика Тэрона-Вэра, $K(t) = \sqrt{Y(t)/(n_1 + n_2)}$;
- 3) статистика Бреслоу, $K(t) = Y(t)/\sqrt{(n_1 + n_2)^3}$;
- 4) статистика Пето-Прентиса, $K(t) = \hat{S}(t)/\sqrt{n_1 + n_2}$;
- 5) статистика Прентиса, $K(t) = \frac{\hat{S}(t)}{\sqrt{n_1 + n_2}} \cdot \frac{Y(t)}{Y(t) + 1}$;

где $\hat{S}(t)$ – оценка функции надежности Каплана-Мейера на основе объединенной выборки $Z = Z_1 \cup Z_2$.

Стоит отметить, что некоторые из указанных весовых функций позволяют получить уже рассмотренные статистики критериев однородности. Так, например, весовая функция №1 позволяет получить статистику критерия S_{LG} из соотношения (1.20), а весовая функция №3 позволяет получить статистику критерия S_G из соотношения (1.18).

Распределение статистики S_{WLG} имеет асимптотическую сходимость к закону хи-квадрат $\chi^2(1)$ со степенью свободы 1.

Гипотеза H_0 отклоняется, если $S_{WLG} > \chi_{1-\alpha}^2(1)$, где $\chi_{1-\alpha}^2(1)$ – это $(1-\alpha)$ квантиль распределения хи-квадрат со степенью свободы 1. В противном случае нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

1.5.2.7 Взвешенный критерий Каплана-Мейера

Данный критерий был предложен в работе Пепе и Флеминга [53, 123] в 1989 году. Идея вычисления статистики данного критерия состоит в том, чтобы не просто найти суммарные отклонения между двумя оценками функции надежности, а в каждый момент времени установить таким отклонениям определенный вес, что схоже со статистикой S_{ADP} . Поэтому этот критерий относится к группе дистанционных критериев.

Для описания статистики критерия введем дополнительные обозначения. Для каждой исходной выборки $Z_i, i=1,2$ сформируем дополнительную выборку $\bar{Z}_i = \{(T_j, 1 - \delta_j), j=1, n_i\}, i=1,2$. Тогда соответствующая оценка функции надежности для выборки $Z_i, i=1,2$ будет обозначаться как $\hat{S}_i(t), i=1,2$, для объединенной выборки $Z = Z_1 \cup Z_2$ будет обозначаться как $\hat{S}(t)$, а для выборки $\bar{Z}_i, i=1,2$ – это $\hat{S}_i^c(t), i=1,2$.

Статистика взвешенного критерия Каплана-Мейера с учетом введенных обозначений выглядит следующим образом:

$$S_{WKM} = \frac{U}{\sqrt{\sigma}}, \quad (1.24)$$

где

$$U = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \int_0^{T_C} \hat{w}(t) \{ \hat{S}_2(t) - \hat{S}_1(t) \} dt,$$

$$\sigma = - \int_0^{T_C} \left(\int_t^{T_C} \hat{w}(\tau) \hat{S}(\tau) d\tau \right)^2 \frac{n_1 \hat{S}_1^c(t-) + n_2 \hat{S}_2^c(t)}{(n_1 + n_2) (\hat{S}_1^c(t-) \hat{S}_2^c(t-))} \frac{d\hat{S}(t)}{\hat{S}(t) \hat{S}(t-)},$$

$$\hat{w}(t) = \frac{(n_1 + n_2) \hat{S}_1^c(t-) \hat{S}_2^c(t-)}{n_1 \hat{S}_1^c(t-) + n_2 \hat{S}_2^c(t-)},$$

$$d\hat{S}(t) = \hat{S}(t) - \hat{S}(t-),$$

$$T_C = \max_{t \in R} \left(\min \{ \hat{S}_1(t), \hat{S}_2(t), \hat{S}_1^c(t), \hat{S}_2^c(t) \} > 0 \right),$$

$\hat{S}_i(t), \hat{S}_i^c(t), i=1,2$ – это непараметрические оценки функции надежности Каплана-Мейера.

Для распределения статистики S_{WKM} имеется асимптотическая сходимость к стандартному нормальному закону z .

Гипотеза H_0 отклоняется, если $|S_{WKM}| > z_{1-\alpha/2}$, где $z_{1-\alpha/2}$ – это $(1-\alpha/2)$ квантиль стандартного нормального распределения. В противном случае нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

В работе [53] приводится сравнительный анализ мощности взвешенного критерия Каплана-Мейера с обобщенными критериями Уилкоксона и логранговым на множестве альтернативных гипотез, состоящих из кусочных функций. Логранговый критерий S_{LG} предпочтительней в случае модели пропорциональных рисков, т.е. $h_1(t)/h_2(t) = const$, обобщенные критерии Уилкоксона предпочтительны в случае различий между функциями надежности около момента времени $t = 0$ и в случае наличия пересечения функций надежности, а взвешенный критерий Каплана-Мейера предпочтителен в случае различий между функциями надежности на «правых хвостах» распределений.

1.5.2.8 Критерий Багдонавичуса-Никулина (обобщенная модель Кокса)

Совершенно иной способ при разработке критериев однородности использовали В. Багдонавичус (V. Bagdonavičius) и М.С. Никулин. Для каждого предложенного статистического критерия они формально описали функциональную зависимость (модель) поведения функций надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$, для которой при использовании оценок неизвестных величин была получена соответствующая статистика критерия.

В работе авторов [65] рассматривается обобщенная модель Кокса, которая предполагает, что функции интенсивности $h_1(t)$ и $h_2(t)$ могут расходиться, сходиться и пересекаться. В таком случае пара конкурирующих гипотез представима следующим образом:

$$H_1 : h_1(t) = e^\beta \{1 + e^{\beta+\gamma} H_2(t)\}^{\exp(-\gamma)-1} h_2(t), \quad (1.25)$$

где $H_2(t)$ – кумулятивная функция риска, соответствующая функции надежности $S_2(t)$, β и γ – это параметры обобщенной модели Кокса.

С учетом используемых обозначений статистика критерия Багдонавичуса-Никулина для обобщенной модели Кокса примет следующий вид:

$$S_{BN1} = (U_1, U_2) \Sigma^{-1} (U_1, U_2)^T, \quad (1.26)$$

где

$$U_1 = \sum_{j:\delta_{1j}=0} Y_2(T_{1j})/Y(T_{1j}) - \sum_{j:\delta_{2j}=0} Y_1(T_{2j})/Y(T_{2j}),$$

$$U_2 = - \sum_{j:\delta_{1j}=0} \frac{Y_2(T_{1j})}{Y(T_{1j})} \ln(1 + \Lambda(T_{1j})) + \sum_{j:\delta_{2j}=0} \frac{Y_1(T_{2j})}{Y(T_{2j})} \ln(1 + \Lambda(T_{2j})),$$

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t), \quad Y_i = \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}(t), \quad Y_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & T_{ij} \geq t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

$$\Lambda(t) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j:\delta_{ij}=0, T_{ij} \leq t} \frac{1}{Y(T_{ij})}.$$

Элементы матрицы $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ следующие:

$$\sigma_{11} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j:\delta_{ij}=0} Y_1(T_{ij}) Y_2(T_{ij}) / Y^2(T_{ij}),$$

$$\sigma_{22} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j:\delta_{ij}=0} Y_1(T_{ij}) Y_2(T_{ij}) \ln^2(1 + \Lambda(T_{ij})) / Y^2(T_{ij}),$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j:\delta_{ij}=0} Y_1(T_{ij}) Y_2(T_{ij}) \ln(1 + \Lambda(T_{ij})) / Y^2(T_{ij}).$$

Распределение статистики критерия Багдонавичуса-Никулина для обобщенной модели Кокса S_{BN1} имеет асимптотическую сходимость к закону хи-квадрат $\chi^2(2)$ со степенью свободы 2.

Гипотеза H_0 отклоняется, если $S_{BN1} > \chi_{1-\alpha}^2(2)$, где $\chi_{1-\alpha}^2(2)$ – это $(1-\alpha)$ квантиль распределения хи-квадрат со степенью свободы 2. В противном случае нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

1.5.2.9 Критерий Багдонавичуса-Никулина (многократные пересечения)

В работе [63] авторы предложили другой критерий проверки статистической гипотезы однородности распределений. Этот критерий основан на другой модели поведения конкурирующих гипотез, которая подразумевает наличие нескольких точек пересечения (Multiple Cross-Effects (MCE) model). Эта модель так и называется моделью множественных пересечений, а соответствующая конкурирующая гипотеза H_1 , которая подразумевает $S_1(t) \neq S_2(t)$, выглядит следующим образом:

$$H_1 : h_1(t) = e^{\beta} \{1 + \gamma H_2(t) + \delta H_2^2(t)\} h_2(t), \quad (1.27)$$

где $H_2(t)$ – кумулятивная функция риска, соответствующая функции надежности $S_2(t)$, β , γ и δ – это параметры модели множественных пересечений.

С учетом используемых обозначений статистика критерия Багдонавичуса-Никулина для модели множественных пересечений примет следующий вид:

$$S_{BN2} = (U_1, U_2, U_3) \Sigma^{-1} (U_1, U_2, U_3)^T, \quad (1.28)$$

где

$$U_1 = \sum_{j:\delta_{1j}=0} Y_2(T_{1j})/Y(T_{1j}) - \sum_{j:\delta_{2j}=0} Y_1(T_{2j})/Y(T_{2j}),$$

$$U_2 = - \sum_{j:\delta_{1j}=0} Y_2(T_{1j})\Lambda(T_{1j})/Y(T_{1j}) + \sum_{j:\delta_{2j}=0} Y_1(T_{2j})\Lambda(T_{2j})/Y(T_{2j}),$$

$$U_3 = - \sum_{j:\delta_{1j}=0} Y_2(T_{1j})\Lambda^2(T_{1j})/Y(T_{1j}) + \sum_{j:\delta_{2j}=0} Y_1(T_{2j})\Lambda^2(T_{2j})/Y(T_{2j}),$$

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t), \quad Y_i = \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}(t), \quad Y_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & T_{ij} \geq t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

$$\Lambda(t) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j:\delta_{ij}=0, T_{ij} \leq t} \frac{1}{Y(T_{ij})}.$$

Элементы матрицы $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$ следующие:

$$\sigma_{11} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j:\delta_{ij}=0} Y_1(T_{ij})Y_2(T_{ij})/Y^2(T_{ij}),$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j:\delta_{ij}=0} Y_1(T_{ij})Y_2(T_{ij})\Lambda(T_{ij})/Y^2(T_{ij}),$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{22} = \sigma_{31} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j:\delta_{ij}=0} Y_1(T_{ij})Y_2(T_{ij})\Lambda^2(T_{ij})/Y^2(T_{ij}),$$

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j:\delta_{ij}=0} Y_1(T_{ij})Y_2(T_{ij})\Lambda^3(T_{ij})/Y^2(T_{ij}),$$

$$\sigma_{33} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j:\delta_{ij}=0} Y_1(T_{ij})Y_2(T_{ij})\Lambda^4(T_{ij})/Y^2(T_{ij}).$$

Распределение статистики критерия Багдонавичуса-Никулина для многократных пересечений функций надежности S_{BN2} имеет асимптотическую сходимость к закону хи-квадрат $\chi^2(3)$ со степенью свободы 3.

Гипотеза H_0 отклоняется, если $S_{BN2} > \chi_{1-\alpha}^2(3)$, где $\chi_{1-\alpha}^2(3)$ – это $(1-\alpha)$ квантиль распределения хи-квадрат со степенью свободы 3. В противном случае нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

1.5.2.10 Критерий Багдонавичуса-Никулина (однократные пересечения)

Схожим по смыслу является еще один критерий проверки статистической гипотезы однородности распределений [63]. В отличие от статистики (1.28) была использована модель однократных пересечений

функций надежности (Single Cross-Effects (SCE) model), а соответствующая конкурирующая гипотеза H_1 выглядит следующим образом:

$$H_1 : h_1(t) = \frac{\exp(\beta + H_2(t)\exp(\gamma))}{1 + \exp(\beta + \gamma)\{\exp(H_2(t)\exp(\gamma)) - 1\}} h_2(t), \quad (1.29)$$

где $H_2(t)$ – кумулятивная функция риска, соответствующая функции надежности $S_2(t)$, β и γ – это параметры модели однократных пересечений.

С учетом используемых обозначений статистика критерия Багдонавичуса-Никулина для модели однократных пересечений примет вид:

$$S_{BN3} = (U_1, U_2) \Sigma^{-1} (U_1, U_2)^T, \quad (1.30)$$

где

$$U_1 = \sum_{j=1}^{n_1} (1 - \delta_{1j}) \frac{K_1(T_{1j})}{Y(T_{1j})} Y_2(T_{1j}) - \sum_{j=1}^{n_2} (1 - \delta_{2j}) \frac{K_1(T_{2j})}{Y(T_{2j})} Y_1(T_{2j}),$$

$$U_2 = \sum_{j=1}^{n_1} (1 - \delta_{1j}) \frac{K_2(T_{1j})}{Y(T_{1j})} Y_2(T_{1j}) - \sum_{j=1}^{n_2} (1 - \delta_{2j}) \frac{K_2(T_{2j})}{Y(T_{2j})} Y_1(T_{2j}).$$

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t), \quad Y_i = \sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}(t), \quad Y_{ij}(t) = \begin{cases} 1, & T_{ij} \geq t \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Элементы матрицы $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ имеют следующий вид:

$$\sigma_{ij} = \sum_{r=1}^2 \sum_{l=1}^{n_r} (1 - \delta_{rl}) K_i(T_{rl}) K_j(T_{rl}) Y_1(T_{rl}) Y_2(T_{rl}) / Y^2(T_{rl}), \quad i = 1, 2, j = 1, 2.$$

Функции $K_i(t), i = 1, 2$ выглядят следующим образом:

$$K_1(t) = \exp(-\Lambda(t)) / \sqrt{n_1 + n_2}, \quad K_2(t) = \{\exp(-\Lambda(t)) - 1\} / \sqrt{n_1 + n_2},$$

$$\Lambda(t) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j: \delta_{ij}=0, T_{ij} \leq t} \frac{1}{Y(T_{ij})}.$$

Распределение статистики критерия Багдонавичуса-Никулина для однократных пересечений функций надежности S_{BN3} имеет асимптотическую сходимость к закону хи-квадрат $\chi^2(2)$ со степенью свободы 2.

Гипотеза H_0 отклоняется, если $S_{BN3} > \chi_{1-\alpha}^2(2)$, где $\chi_{1-\alpha}^2(2)$ – это $(1-\alpha)$ квантиль распределения хи-квадрат со степенью свободы 2. В противном случае нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

1.5.3 Критерии однородности средних

Как уже говорилось в пункте 1.5, математический аппарат проверки статистических гипотез позволяет использовать разные подходы для проверки одной и той же статистической гипотезы. Так, например, гипотеза однородности распределений может быть отклонена, если гипотеза об однородности средних отклоняется. По этой причине добавим в рассмотрение статистики двух широко известных и хорошо исследованных статистических критериев однородности средних Стьюдента [6, 75] (параметрический критерий) и Крамера-Уэлча [8, 76] (непараметрический критерий) для полных наблюдений (при использовании этих критериев необходимо выполнение условия: $R(Z_i) = 0, i = 1, 2$).

1.5.3.1 Критерий однородности средних Стьюдента

Критерий Стьюдента [75] является параметрическим критерием, т.к. необходимо, чтобы наблюдения выборок Z_1 и Z_2 были распределены по гауссовскому закону. Однако, как показывает ряд работ [6, 8, 104], распределение статистики S_{ST} с ростом объемов выборок по центральной предельной теореме сходится к стандартному нормальному закону, что позволяет распределениям наблюдений выборок Z_1 и Z_2 отличаться от гауссовского.

Статистика классического критерия однородности средних Стьюдента выглядит следующим образом:

$$S_{ST} = \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2}{\sqrt{(n_1 - 1)\hat{\sigma}_1^2 + (n_2 - 1)\hat{\sigma}_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}, \quad (1.31)$$

где

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} T_{ij}, \quad i=1,2, \quad \hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n_i-1} \sum_{j=1}^{n_i} (T_{ij} - \hat{\mu}_i)^2, \quad i=1,2.$$

Гипотеза H_0 отклоняется, если $|S_{ST}| > t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)$, где $t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)$ – это $(1-\alpha/2)$ квантиль распределения Стьюдента со степенью свободы n_1+n_2-2 . В противном случае нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

В работе [6] для критерия Стьюдента показано, что, если распределения анализируемых выборок отличаются от нормального распределения и нет оснований считать «хвосты распределений тяжелыми», то применение критерия Стьюдента остается корректным.

1.5.3.2 Критерий однородности средних Крамера-Уэлча

Статистика критерия однородности средних Крамера-Уэлча выглядит следующим образом:

$$S_{CW} = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_2 \hat{\sigma}_1^2 + n_1 \hat{\sigma}_2^2}} (\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2), \quad (1.32)$$

где

$$\hat{\mu}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} T_{ij}, \quad i=1,2, \quad \hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n_i-1} \sum_{j=1}^{n_i} (T_{ij} - \hat{\mu}_i)^2, \quad i=1,2.$$

Распределение статистики S_{CW} имеет асимптотическую сходимость к стандартному нормальному закону Z .

Гипотеза H_0 отклоняется, если $|S_{CW}| > t_{1-\alpha/2}(v)$, где $t_{1-\alpha/2}(v)$ – это $(1-\alpha/2)$ квантиль распределения Стьюдента со степенью свободы v , где v вычисляется следующим образом:

$$v = \frac{\left(\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{\hat{\sigma}_1^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{\hat{\sigma}_2^4}{n_2^2(n_2-1)}}.$$

В противном случае нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

1.6 Выводы

В данной главе были рассмотрены используемые в диссертационной работе основные понятия и определения теории надежности и проверки статистической гипотезы однородности. Было показано, что в реальных задачах не всегда удастся пронаблюдать за каждым объектом от момента начала эксперимента до наступления терминального события, что приводит к получению неполных наблюдений. На основании этого был рассмотрен и обоснован выбор модели данных с возможностью учитывать не только полные наблюдения, но и неполные наблюдения, при которых объект выбывает из наблюдения до наступления момента отказа. Такой моделью данных является модель цензурированных справа наблюдений.

Были описаны статистические критерии, способные решать задачу проверки однородности распределений и учитывающие специфику данных типа времени жизни. Показано, что в рассмотренных критериях использованы разнообразные подходы формализации конкурирующих гипотез H_0 и H_1 . Это означает, что все рассматриваемые критерии будут с разной мощностью различать пару конкурирующих гипотез.

Недостаток информации о продолжительности полных экспериментов, возникающий с ростом степени цензурирования, при одном и том же объеме выборок способен влиять на точность оценок, используемых явно или неявно в статистиках критериев. Это означает, что распределения статистик критериев при конечном объеме выборок будут отличаться от соответствующих предельных распределений. Следовательно, использование предельного распределения при определении критической области для проверки статистической гипотезы может приводить к неверным статистическим выводам.

Таким образом, показана актуальность проведения сравнительного анализа статистической мощности критериев однородности, а также показана актуальность в исследовании поведения распределения статистик критериев в случае данных типа времени жизни.

ГЛАВА 2 ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИКИ КРИТЕРИЯ К ПРЕДЕЛЬНОМУ ЗАКОНУ В СЛУЧАЕ СПРАВЕДЛИВОСТИ ОСНОВНОЙ ГИПОТЕЗЫ

При формировании вывода проверки статистической гипотезы значение статистики критерия $S(Z_1^{n_1}, Z_2^{n_2})$ проверяется на принадлежность критической области Ω_α , которая определяется на основе распределения статистики критерия. Однако при малых объемах выборок n_1, n_2 распределение статистики критерия $G_{n_1, n_2}(x)$ может существенно отличаться от предельного распределения $G(x)$. Для получения корректных статистических выводов это отличие нужно учитывать.

Пусть в случае верной гипотезы H_0 статистика критерия $S(Z_1^{n_1}, Z_2^{n_2})$ имеет функцию распределения $G_{n_1, n_2}(x)$, а при $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ предельную функцию распределения $G(x)$. С помощью методов компьютерного моделирования доказать сходимость $G_{n_1, n_2}(x)$ к $G(x)$ невозможно, однако можно решить следующие задачи:

- оценить скорость, с которой распределение $G_{n_1, n_2}(x)$ сходится к предельному распределению $G(x)$;
- определить объемы выборок n_1, n_2 , при которых расстояние между распределениями $G_{n_1, n_2}(x)$ и $G(x)$ не превышает заданного значения ε .

Решение первой задачи представляет интерес, если необходимо проверить выполнение теоретических предположений об оценке скорости сходимости к распределению $G(x)$. Решение второй задачи представляет интерес на практике, т.к. позволяет определить, начиная с какого объема выборок n_1, n_2 , можно использовать предельное распределение $G(x)$ для определения критической области Ω_α , чтобы вычисленное значение достигаемого уровня значимости p_v было в пределах допустимой погрешности $p_v \pm \varepsilon$.

2.1 Оценка скорости сходимости

Задача определения скорости сходимости распределения статистики $G_{n_1, n_2}(x)$ к соответствующему предельному распределению $G(x)$ может быть решена только аналитическим путем. Однако, используя методы компьютерного моделирования, становится возможным оценить скорость этой сходимости. Кроме того, оценивая скорость сходимости, можно определить такие объемы выборок n_1, n_2 , при которых погрешность вычисления достигаемого уровня значимости будет в допустимых пределах.

Пусть $\rho(G_{n_1, n_2}, G)$ – это расстояние между двумя функциями распределения $G_{n_1, n_2}(x)$ и $G(x)$. Для определения расстояния между объектами в пространстве распределений будем использовать расстояние Колмогорова:

$$\rho(G_{n_1, n_2}, G) = D_{n_1, n_2} = \sup_{x \in R} |G_{n_1, n_2}(x) - G(x)|. \quad (2.1)$$

Последовательность функций распределений G_{n_1, n_2} *сходится* к предельной функции G равномерно на множестве действительных чисел R ($G_{n_1, n_2} \xrightarrow{R} G$), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать номера m_1, m_2 такие, что при каждом $n_1 \geq m_1, n_2 \geq m_2$ и для всех $x \in R$ справедливо неравенство:

$$|G_{n_1, n_2}(x) - G(x)| < \varepsilon, \forall x \in R.$$

Распределение статистики непараметрического критерия при справедливости нулевой гипотезы H_0 сходится к соответствующему предельному распределению, однако при проведении статистического эксперимента необходимо понимать при каком конечном объеме выборок распределение G_{n_1, n_2} будет отклоняться от предельного распределения G на величину, не превышающую ε . Для этого будем оценивать скорость сходимости последовательности распределений G_{n_1, n_2} к предельному

распределению G . Воспользуемся оценкой, приведенной в работе Орлова А.И. [179] и видоизменим ее на случай двухвыборочного критерия:

Оценка скорости сходимости. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $a(\varepsilon)$, что при всех

$$D_{n_1, n_2} < a(\varepsilon) \cdot \min(n_1, n_2)^{-b+\varepsilon}.$$

Порядком оценки скорости сходимости G_{n_1, n_2} к G будем называть величину $O(\min(n_1, n_2)^{-b}), b > 0$. Данная величина ограничивает оценку скорости сходимости сверху и означает, что реальная скорость сходимости будет не быстрее, чем $\min(n_1, n_2)^{-b}$. Чем больше значение b , тем быстрее последовательность G_{n_1, n_2} сходится к предельному распределению G .

Для оценивания скорости сходимости G_{n_1, n_2} к G будем использовать следующую регрессионную модель:

$$D_{n_1, n_2} = a \cdot \min(n_1, n_2)^{-b} + \eta, \quad (2.2)$$

которая в случае $n_1 = n_2 = n$ примет вид $D_{n, n} = a \cdot n^{-b} + \eta$ при неизвестных параметрах a и b , где $\eta \sim N(0, \sigma^2)$ – это случайная ошибка регрессионной модели.

С помощью регрессионной модели (2.2) мы сможем определить порядок оценки скорости сходимости G_{n_1, n_2} к G , получив оценки параметров a и b , например, с помощью метода наименьших квадратов. На основе таких полученных регрессий можно определить, как меняется оценка скорости сходимости в зависимости, например, от степени цензурирования, а также определить необходимый объем выборок, чтобы отклонение между G_{n_1, n_2} и G не превышало некоторого установленного значения.

2.2 Моделирование закона распределения статистики критерия при конечном объеме выборок

Аналитический подход к определению распределения $G_{n_1, n_2}(x)$ представляет собой очень трудоемкую задачу. Тем не менее, решение данной задачи с определенной степенью достоверности можно получить, используя имитационный метод Монте-Карло [102, 103]. Для этого необходимо воспользоваться Алгоритмом 2.1.

Алгоритм 2.1. Моделирование выборки значений статистики критерия однородности $\{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ при конечных объемах выборок n_1 и n_2 :

1. Используя алгоритм 2.2, смоделировать выборку Z_1 случайной величины ξ с объемом n_1 наблюдений;
2. Используя алгоритм 2.2, смоделировать выборку Z_2 случайной величины η (в случае гипотезы $H_0: \eta = \xi$) с объемом n_2 наблюдений;
3. Вычислить значение статистики критерия $S_i(Z_1^{n_1}, Z_2^{n_2})$;
4. Повторить действия 1-3 для $i = \overline{1, N}$ раз.

Алгоритм 2.2. Моделирование случайно цензурированной выборки Z с объемом n наблюдений для независимых законов распределения моментов отказа $F(t)$ и цензурирования $F^C(t)$:

1. Смоделировать $p_i \sim U[0, 1]$;
2. Смоделировать $p_i^C \sim U[0, 1]$;
3. Используя метод обратной функции для непрерывной случайной величины [124], определить $X_i = F^{-1}(p_i)$;
4. Используя метод обратной функции для непрерывной случайной величины, определить $C_i = (F^C)^{-1}(p_i^C)$;
5. Если $X_i \leq C_i$, то $T_i = X_i, \delta_i = 0$. Иначе – $T_i = C_i, \delta_i = 1$.
6. Повторять действия 1-5 для $i = \overline{1, n}$.

Примечания к алгоритму 2.2:

1. Если моделируется выборка только полных наблюдений, то $p_i^C = 1, \forall i$.
2. Если обратная функция не выражается аналитически, то искомое значение можно найти численно, например, используя метод Ньютона [125].

В результате выполнения алгоритма 2.1 будет получена выборка значений статистик $\{S_1, S_2, \dots, S_N\}$, по которой необходимо построить эмпирическую функцию распределения $G_{n_1, n_2; N}(x)$. В результате вместо расстояния $\rho(G_{n_1, n_2}, G)$ будет вычисляться:

$$\rho(G_{n_1, n_2; N}, G) = D_{n_1, n_2; N} = \sup_{x \in R} |G_{n_1, n_2; N}(x) - G(x)|. \quad (2.3)$$

Очевидно, что распределение $G_{n_1, n_2; N}(x)$ – это оценка распределения $G_{n_1, n_2}(x)$ и отклоняется на величину ε_N . Величину отклонения ε_N можно определить по теореме Колмогорова и подобрать такое N , что погрешность моделирования ε_N будет меньше, чем расстояние $D_{n_1, n_2; N}$ (показано на рисунке 2.1). В таком случае представляется возможным восстановить зависимость расстояния $D_{n_1, n_2; N}$ от объемов выборок n_1, n_2 .

По теореме Колмогорова [96]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sqrt{N} \sup_{x \in (-\infty, +\infty)} |G_{n_1, n_2; N}(x) - G(x)| < t \right\} = K(t), \quad (2.4)$$

где $K(t)$ – это распределение Колмогорова. Из соотношения (2.4) можно определить N , при котором величина погрешности моделирования $\varepsilon_N = \sup_{x \in R} |G_{n_1, n_2; N}(x) - G_{n_1, n_2}(x)|$ не превышает некоторое установленное значение с фиксированной доверительной вероятностью. Так, например, если в условиях решаемой задачи допустимо, чтобы погрешность моделирования $\varepsilon_N \leq 0.001$ с доверительной вероятностью $p_d = 0.99$, то необходима выборка из значений статистик критерия объемом:

$$N = \left[\left(\frac{K^{-1}(p_d)}{\varepsilon_N} \right)^2 \right] + 1 = \left[\left(\frac{K^{-1}(0.99)}{0.001} \right)^2 \right] + 1 \approx \left[\left(\frac{1.62762}{0.001} \right)^2 \right] + 1 = 2\,649\,148. \quad (2.5)$$

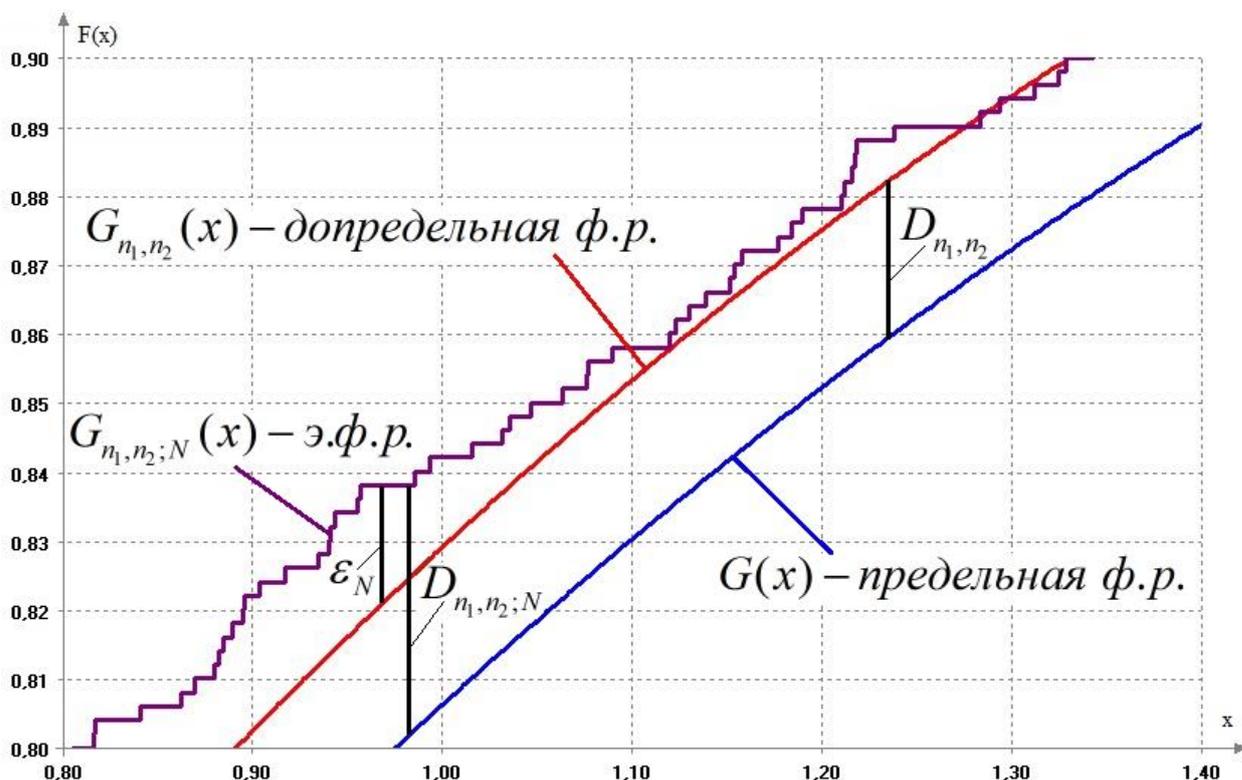


Рисунок 2.1 – Построение оценки для функции распределения $G_{n_1, n_2}(x)$ с помощью эмпирической функции распределения $G_{n_1, n_2; N}(x)$

2.3 Аппроксимация расстояния до предельного закона степенной функцией

В результате компьютерного моделирования должна получиться таблица расстояний $D_{n_1, n_2; N}$ для каждой пары объемов выборок n_1 и n_2 , как показано в таблице 2.1. Используя полученные значения, можно оценить параметры степенной регрессии (2.2).

Таблица 2.1 – Зависимость $D_{n_1, n_2; N}$ от объемов выборок n_1 и n_2

Объем выборки n_1	$n_1^{(1)}$	$n_1^{(2)}$	$n_1^{(3)}$...
Объем выборки n_2	$n_2^{(1)}$	$n_2^{(2)}$	$n_2^{(3)}$...
Расстояние $D_{n_1, n_2; N}$	$d_{n_1^{(1)}, n_2^{(1)}}$	$d_{n_1^{(2)}, n_2^{(2)}}$	$d_{n_1^{(3)}, n_2^{(3)}}$...

В том случае, если для уравнения регрессии с оценками параметров \hat{a} и \hat{b} получен коэффициент детерминации R^2 [1], близкий к значению 1, то с

помощью полученной регрессии можно определить объемы выборок n_1, n_2 , начиная с которых расстояние до предельного закона не будет превышать значения ε .

Если выполняется условие $D_{n_1, n_2; N} < 2\varepsilon_N$, то дальнейшее увеличение объемов выборок n_1 и n_2 не имеет смысла при данном N , т.к. в этом случае величина $D_{n_1, n_2; N}$ будет показывать величину погрешности моделирования, а не расстояния до предельного распределения $G(x)$.

Выбор таких объемов выборок $n_1^{(i)}$ и $n_2^{(i)}$, в которых следовало бы проводить моделирование функции распределения статистики критерия, можно решать как задачу планирования эксперимента [126].

2.4 Исследование оценки скорости сходимости распределения статистики критериев однородности распределений

В рамках данной диссертационной работы нас интересует не сама оценка скорости сходимости распределения статистик критериев однородности, а поиск объемов выборок n_1 и n_2 , для которых распределение статистики критерия $G_{n_1, n_2; N}(t)$ при справедливости гипотезы H_0 будет отличаться от предельного распределения $G(t)$ на величину, не превышающую значения ε . Владение подобной информацией позволит нам оценивать величину возможной погрешности при определении критической области Ω_α для проверки статистической гипотезы.

Пусть $\varepsilon = 0.01$, тогда это означает, что при определенных объемах выборок n_1 и n_2 , погрешность вычисления достигнутого уровня значимости будет находиться в пределах $p \pm \varepsilon$ с некоторой доверительной вероятностью.

Для исследования скорости сходимости статистик критериев однородности распределений проведем серию статистических

экспериментов, используя компьютерное моделирование, при изменении следующих параметров:

- законов распределения моментов отказа $F(t)$;
- законов распределения моментов цензурирования $F^C(t)$;
- объемов выборок n_1, n_2 ;
- степени цензурирования $R(Z_1), R(Z_2)$.

В диссертационной работе были использованы следующие параметры: допустимое отклонение между распределениями $G_{n_1, n_2; N}(t)$ и $G(t)$ при справедливости гипотезы H_0 , равное значению $\varepsilon = 0.01$; объем компьютерного моделирования $N = 2\,700\,000$ повторений; распределения моментов отказа $F(t)$ Вейбулла-Гнеденко с функцией плотности $f_{We}(t; 0, 2, 2)$ (см. табл. 1.1) и экспоненциальное распределение с функцией плотности $f_{Exp}(x; 0, 1)$; законы распределения моментов цензурирования $F^C(t)$ Вейбулла-Гнеденко с функцией плотности $f_{We}(x; \mu, \lambda, \nu)$ и Гамма распределение с функцией плотности $f_{\Gamma}(x; \mu, \lambda, \nu)$; объемы выборок $n = n_1 = n_2$ от 10 до 500 наблюдений; степень цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2)$ от 0% до 50%. Исследование оценки скорости сходимости распределений статистик критериев к асимптотическим распределениям осуществлялось на статистиках обобщенных критериев Уилкоксона (критерии Гехана S_G и Пето S_p), ранговых критериев (логранговый критерий S_{LG} и критерий Кокса-Мантела S_{CM}), взвешенных логранговых критериев (весовая функция Тэрона-Вэра S_{TW}) и критериев Багдонавичуса-Никулина (обобщенная модель Кокса S_{BN1} и однократные пересечения S_{BN3}). Выбор статистик этих критериев обоснован тем, что статистики этих критериев рассматриваются и модифицируются во многих работах [67, 127-131] в разное время, однако в литературе не удалось найти численные оценки скорости сходимости

распределений статистик к соответствующему предельному распределению для указанных критериев.

Стоит обратить внимание, что для функций плотности законов распределения моментов цензурирования параметры распределений не заданы, т.к. каждой паре $F(t)$ и $R(Z)$ соответствует свое распределение $F^c(t)$. Как определить параметры $F^c(t)$ показано в параграфе 2.4.1.1.

2.4.1 Статистическое моделирование (имитационный метод Монте-Карло)

В основе статистического моделирования лежит метод многократного повторения статистического эксперимента – имитационный метод компьютерного моделирования Монте-Карло [102-104]. С помощью метода Монте-Карло могут решаться многие задачи математики, физики, химии, экономики, социологии и в других науках [132].

В диссертационной работе метод Монте-Карло применяется для исследования свойств распределений статистик критериев однородности, для исследования мощности критериев однородности, а также для вычисления достигнутого уровня значимости.

Методика компьютерного моделирования статистических закономерностей предусматривает статистическое моделирование эмпирических распределений статистик (алгоритм 2.1), вычисляемых по выборкам псевдослучайных величин конечного объема (алгоритм 2.2) [104].

Из алгоритмов 2.1 и 2.2 видно, что в основе метода Монте-Карло лежит генерация псевдослучайных величин, поэтому для корректного его применения важно использовать хороший генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ). Хорошим ГПСЧ будем называть такой ГПСЧ, для которого справедливы следующие утверждения:

1. Распределение генерируемых чисел ξ должно подчиняться *равномерному закону* $\xi \sim U(0,1)$;

2. Количество уникальных элементов последовательности, т.е. *период ГПСЧ*, должен быть больше числа необходимых псевдослучайных чисел;
3. Время генерации одного псевдослучайного числа не должно занимать много времени.

Нарушение предположения о равномерности генерируемых чисел будет приводить к ошибочным результатам метода Монте-Карло с использованием метода обратной функции.

Маленький период ГПСЧ будет приводить к повторению выборок, что будет вносить статистическую зависимость между элементами выборки статистики критерия. Кроме того, маленький период ГПСЧ будет приводить к дополнительной дискретизации распределений статистик критериев, нетипичной для поведения реального соответствующего распределения.

Время генерирования одного псевдослучайного числа является также немаловажным, т.к. это существенно влияет на продолжительность эксперимента с помощью метода Монте-Карло. Чем быстрее ГПСЧ генерирует одно число, тем больше псевдослучайных чисел он сможет сгенерировать за ограниченный промежуток времени, а, следовательно, тем ниже будет погрешность моделирования.

С учетом всего вышеизложенного для проведения многократного повторяющегося статистического эксперимента необходимо выполнение всех трех перечисленных свойств ГПСЧ.

В диссертационной работе используется генератор псевдослучайных чисел «Mersenne Twister», предложенный в 1997 году М.Мацумото и Т.Нисимурой. Период ГПСЧ *per* составляет $per = 2^{19937} - 1$ псевдослучайных чисел, распределенных по равномерному закону, а также с быстрой генерацией случайных чисел [133]. Данный ГПСЧ реализован в большинстве библиотек, в частности в библиотеках от компаний Intel и Microsoft [134].

2.4.1.1 Метод поиска параметров распределения моментов цензурирования для достижения необходимой степени цензурирования

В задачах анализа данных типа времени жизни при проведении статистического эксперимента в случае цензурирования III-го типа (случайное цензурирование) возникает необходимость получить выборку Z с определенной степенью цензурирования $R(Z)$, равной r , т.е. $R(Z) = r$.

На степень цензурирования влияют два распределения – моментов отказов $F(t)$ и моментов цензурирования $F^C(t)$. Следовательно, изменяя параметры θ распределения моментов цензурирования $F^C(t; \theta)$, можно влиять на степень цензурирования $R(Z) = r$ в выборке Z .

Пусть $F(t)$ – заданное распределение моментов отказа, $F^C(t; \theta)$ – семейство распределений моментов цензурирования с неизвестным вектором параметров θ . Требуется определить θ , при котором $P_\theta\{X < C\} = r$, где X – момент времени отказа, C – момент времени цензурирования, r – это заданная степень цензурирования, $r \in (0, 1)$.

Пользуясь выражением свёртки, получаем:

$$P_\theta\{X < C\} = P_\theta\{X - C < 0\} = P_\theta\{X + (-C) < 0\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - F^C(t; \theta)) f(t) dt = r,$$

где $f(t) = \frac{d}{dt} F(t)$.

Таким образом, для определения θ необходимо решить следующее интегральное уравнение [51] относительно θ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - F^C(t; \theta)) f(t) dt = r. \quad (2.6)$$

Решение подобного интегрального уравнения для конкретного вида распределений $F(t)$ и $F^C(t; \theta)$, скорее всего, будет очень трудоемким. Поэтому

данная задача может быть решена численно, например, с помощью методов оптимизации [135].

2.4.2 Обобщенный Геханом критерий Уилкоксона

Результаты исследования скорости сходимости распределения статистики (значения величин $D_{n_1, n_2; N}$) обобщенного Геханом критерия Уилкоксона (критерий Гехана), полученные с помощью компьютерного моделирования, представлены в таблице 2.2. Графики распределения статистики критерия Гехана для разных объемов выборок $n = n_1 = n_2$ представлены на рисунке 2.2. Полученные параметры степенной зависимости $D_n = \hat{a} \cdot n^{-\hat{b}}$, соответствующие результатам в таблице 2.2, представлены в таблице 2.3.

Таблица 2.2 – Значения $D_{n_1, n_2; N}$ для критерия Гехана между $G_{n_1, n_2; N}(t)$ и $G(t)$, $N = 2\,700\,000$

Законы распределения $f(t)$ и $f^c(t; \theta)$	Объемы выборок $n = n_1 = n_2$	Степени цензурирования выборок, $R(Z_1) = R(Z_2)$					
		0%	10%	20%	30%	40%	50%
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{We}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	5	0.0445	0.0314	0.0288	0.0358	0.0477	0.0644
	10	0.0171	0.0099	0.0103	0.0130	0.0174	0.0234
	15	0.0099	0.0043	0.0059	0.0070	0.0093	0.0125
	20	0.0069	0.0030	0.0036	0.0055	0.0057	0.0080
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{We}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	5	0.0448	0.0302	0.0252	0.0241	0.0262	0.0317
	10	0.0171	0.0088	0.0084	0.0082	0.0094	0.0099
	15	0.0104	0.0046	0.0045	0.0045	0.0054	0.0058
	20	0.0070	0.0031	0.0032	0.0032	0.0031	0.0037
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{\Gamma}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	5	0.0446	0.0316	0.0318	0.0413	0.0597	0.0839
	10	0.0170	0.0102	0.0123	0.0160	0.0222	0.0324
	15	0.0099	0.0049	0.0070	0.0083	0.0124	0.0175
	20	0.0071	0.0031	0.0048	0.0061	0.0079	0.0088
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{\Gamma}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	5	0.0446	0.0301	0.0254	0.0250	0.0298	0.0393
	10	0.0171	0.0092	0.0090	0.0091	0.0102	0.0121
	15	0.0100	0.0046	0.0049	0.0046	0.0055	0.0065
	20	0.0069	0.0031	0.0034	0.0036	0.0035	0.0043

Таблица 2.3 – Параметры степенной модели $D_n = \hat{a} \cdot n^{-\hat{b}}$, описывающей скорость сходимости распределения статистики критерия Гехана к предельному распределению

Законы распределения $f(t)$ и $f^c(t; \theta)$	Параметры модели	Степени цензурирования выборок, $R(Z_1) = R(Z_2)$					
		0%	10%	20%	30%	40%	50%
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{We}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.4009	0.4968	0.3084	0.3633	0.5206	0.6997
	\hat{b}	1.3662	1.7150	1.4732	1.4406	1.4843	1.4817
	R^2	1.0000	0.9998	0.9999	0.9997	0.9999	1.0000
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{We}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.3957	0.4884	0.3084	0.2789	0.2830	0.4188
	\hat{b}	1.3544	1.7302	1.5569	1.5222	1.4783	1.6051
	R^2	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{\Gamma}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.4015	0.4582	0.2890	0.3951	0.6025	0.8657
	\hat{b}	1.3661	1.6610	1.3712	1.4024	1.4361	1.4479
	R^2	0.9999	1.0000	1.0000	0.9998	1.0000	0.9990
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{\Gamma}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.4012	0.4608	0.2775	0.2664	0.3572	0.5653
	\hat{b}	1.3654	1.6956	1.4859	1.4701	1.5433	1.6573
	R^2	1.0000	0.9999	1.0000	0.9996	1.0000	0.9999

Из полученных результатов очевидно, что распределение статистики $G_{n_1, n_2; N}(t)$ критерия однородности Гехана быстро сходится к соответствующему предельному распределению $G(t)$ при справедливости гипотезы H_0 . Кроме того, стоит обратить на тот факт, что распределение статистики имеет ярко выраженную дискретность, которая уменьшается с ростом объемов выборок. Начиная с объема выборок $n=20$ расстояние между распределениями $G_{n_1, n_2; N}(t)$ и $G(t)$ не превышает $\varepsilon=0.01$. Данный результат справедлив для всех использованных законов распределения моментов отказа $F(t)$ и цензурирования $F^c(t)$, а также для всех использованных степеней цензурирования $R(Z)$. Наибольшая скорость сходимости распределения статистики критерия Гехана достигается при степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 10\%$, т.к. оценки параметра \hat{b} в данном случае наибольшие.

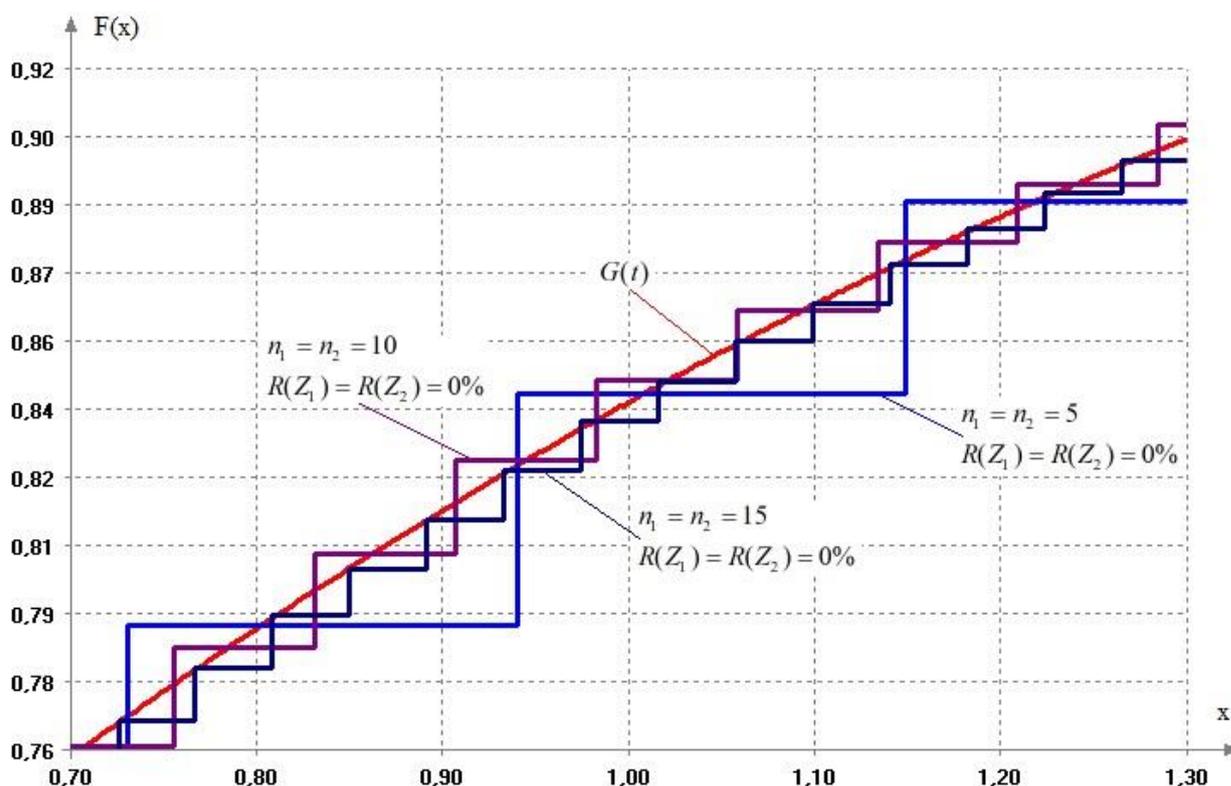


Рисунок 2.2 – Распределение статистики $G_{n_1, n_2; N}(t)$ критерия Гехана для разных объемов выборок $n = n_1 = n_2$

Этот факт позволяет сделать вывод, что, если использовать предельное распределение критерия однородности Гехана в случае объемов выборок $n \geq 20$ наблюдений, то значение достигнутого уровня значимости p_v будет вычислено с погрешностью, не превышающей 0.01.

2.4.3 Обобщенный Пето критерий Уилкоксона

Результаты исследования скорости сходимости распределения статистики (значения величин $D_{n_1, n_2; N}$) обобщенного Пето критерия Уилкоксона (критерий Пето), полученные с помощью компьютерного моделирования, представлены в таблице 2.4. Графики распределения статистики критерия Пето для разных объемов выборок $n = n_1 = n_2$ представлены на рисунке 2.3. Полученные параметры степенной зависимости $D_n = \hat{a} \cdot n^{-\hat{b}}$, соответствующие результатам в таблице 2.4, представлены в таблице 2.5.

Таблица 2.4 – Значения $D_{n_1, n_2; N}$ для критерия Пето между $G_{n_1, n_2; N}(t)$ и $G(t)$,
 $N = 2\,700\,000$

Законы распределения $f(t)$ и $f^c(t; \theta)$	Объемы выборки $n = n_1 = n_2$	Степени цензурирования выборок, $R(Z_1) = R(Z_2)$					
		0%	10%	20%	30%	40%	50%
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{We}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	5	0.0446	0.0241	0.0168	0.0139	0.0129	0.0154
	10	0.0173	0.0063	0.0049	0.0049	0.0053	0.0060
	15	0.0098	0.0032	0.0030	0.0035	0.0039	0.0037
	20	0.0071	0.0024	0.0028	0.0027	0.0023	0.0031
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{We}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	5	0.0449	0.0277	0.0184	0.0139	0.0130	0.0137
	10	0.0174	0.0069	0.0049	0.0046	0.0052	0.0049
	15	0.0097	0.0036	0.0033	0.0029	0.0028	0.0033
	20	0.0069	0.0029	0.0028	0.0025	0.0022	0.0028
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{\Gamma}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	5	0.0448	0.0250	0.0168	0.0138	0.0139	0.0171
	10	0.0171	0.0062	0.0047	0.0050	0.0058	0.0065
	15	0.0098	0.0032	0.0030	0.0034	0.0039	0.0042
	20	0.0068	0.0027	0.0021	0.0028	0.0026	0.0028
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{\Gamma}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	5	0.0446	0.0270	0.0173	0.0131	0.0130	0.0145
	10	0.0171	0.0068	0.0047	0.0045	0.0048	0.0053
	15	0.0098	0.0035	0.0032	0.0032	0.0030	0.0034
	20	0.0067	0.0023	0.0021	0.0024	0.0025	0.0029

Таблица 2.5 – Параметры степенной модели $D_n = \hat{a} \cdot n^{-\hat{b}}$, описывающей
 скорость сходимости распределения статистики критерия Пето к
 предельному распределению

Законы распределения $f(t)$ и $f^c(t; \theta)$	Параметры модели	Степени цензурирования выборок, $R(Z_1) = R(Z_2)$					
		0%	10%	20%	30%	40%	50%
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{We}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.3977	0.4751	0.2126	0.1150	0.0883	0.1194
	\hat{b}	1.3598	1.8536	1.5811	1.3182	1.1969	1.2757
	R^2	0.9999	0.9994	0.9959	0.9980	0.9986	0.9987
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{We}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.4090	0.5758	0.2633	0.1395	0.1117	0.1126
	\hat{b}	1.3726	1.8870	1.6578	1.4369	1.3364	1.3137
	R^2	1.0000	0.9989	0.9970	0.9972	0.9997	0.9970
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{\Gamma}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.4124	0.5215	0.2463	0.1112	0.0967	0.1445
	\hat{b}	1.3796	1.8893	1.6712	1.3012	1.2067	1.3279
	R^2	1.0000	0.9986	0.9991	0.9976	0.9995	0.9997
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{\Gamma}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.4094	0.5856	0.2583	0.1155	0.1096	0.1201
	\hat{b}	1.3776	1.9127	1.6829	1.3569	1.3278	1.3176
	R^2	1.0000	0.9998	0.9988	0.9983	0.9981	0.9973

Из полученных результатов очевидно, что распределение статистики $G_{n_1, n_2; N}(t)$ критерия Пето быстро сходится к соответствующему предельному распределению $G(t)$ при справедливости гипотезы H_0 . Начиная с объема выборок $n = 20$ расстояние между распределениями $G_{n_1, n_2; N}(t)$ и $G(t)$ не превышает $\varepsilon = 0.01$. Кроме того, стоит обратить на тот факт, что распределение статистики имеет ярко выраженную дискретность, которая уменьшается с ростом объемов выборок. Данный результат справедлив для всех использованных законов распределения моментов отказа $F(t)$ и цензурирования $F^C(t)$, а также для всех использованных степеней цензурирования $R(Z)$. Наибольшая скорость сходимости распределения статистики критерия Пето достигается при степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 10\%$, т.к. оценки параметра \hat{b} в данном случае наибольшие.

Этот факт позволяет сделать вывод, что, если использовать предельное распределение критерия однородности Пето в случае объемов выборок $n \geq 20$ наблюдений, то значение достигнутого уровня значимости p_v будет вычислено с погрешностью, не превышающей 0.01.

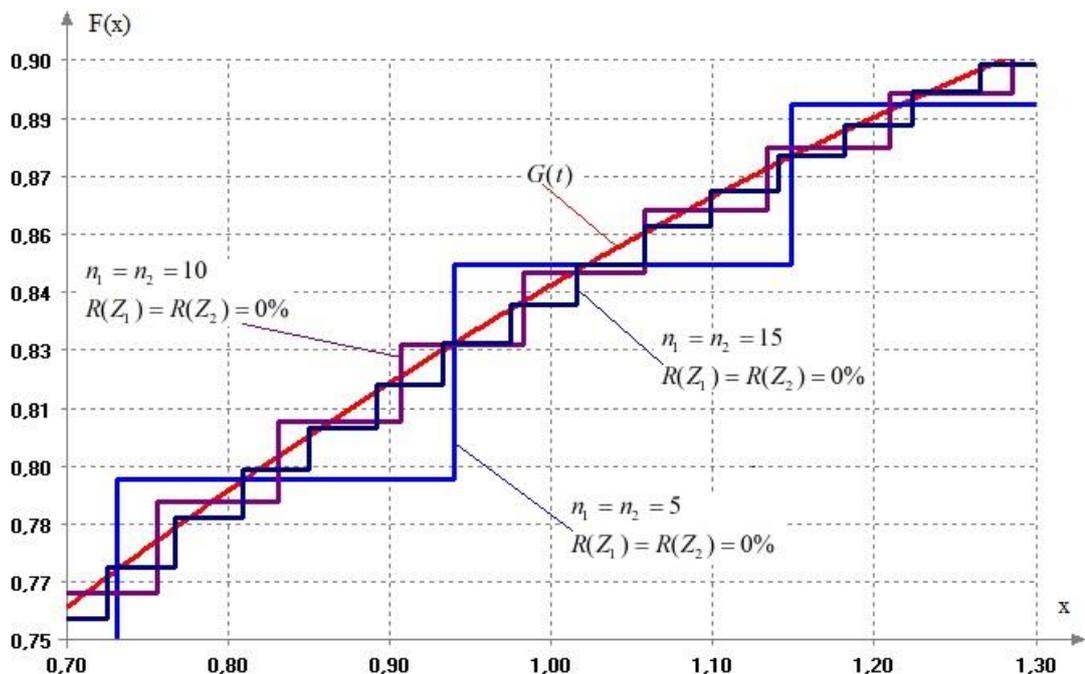


Рисунок 2.3 – Распределение статистики $G_{n_1, n_2; N}(t)$ критерия Пето для разных объемов выборок $n = n_1 = n_2$

2.4.4 Логарифмический ранговый критерий

Результаты исследования скорости сходимости распределения статистики (значения величин $D_{n_1, n_2; N}$) логарифмического рангового критерия, полученные с помощью компьютерного моделирования, представлены в таблице 2.6. Графики распределения статистики логарифмического рангового критерия для разных объемов выборок $n = n_1 = n_2$ представлены на рисунке 2.4. Полученные параметры степенной зависимости $D_n = \hat{a} \cdot n^{-\hat{b}}$, соответствующие результатам в таблице 2.6, представлены в таблице 2.7.

Из полученных результатов очевидно, что распределение статистики $G_{n_1, n_2; N}(t)$ логарифмического рангового критерия быстро сходится к соответствующему предельному распределению $G(t)$ при справедливости гипотезы H_0 . Начиная с объема выборок $n = 20$, расстояние между распределениями $G_{n_1, n_2; N}(t)$ и $G(t)$ не превышает $\varepsilon = 0.01$. В отличие от распределений статистик критериев Гехана и Пето для распределения статистик логрангового критерия уже на малых объемах выборок дискретностью можно пренебречь. Данный результат справедлив для всех использованных законов распределения моментов отказа $F(t)$ и цензурирования $F^C(t)$, а также для всех использованных степеней цензурирования $R(Z)$. Наибольшая скорость сходимости распределения статистики логарифмического рангового критерия достигается при степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 50\%$, т.к. оценки параметра \hat{b} в данном случае наибольшие.

Этот факт позволяет сделать вывод: если использовать предельное распределение логарифмического рангового критерия в случае объемов выборок $n \geq 20$ наблюдений, то значение достигнутого уровня значимости p_v будет вычислено с погрешностью, не превышающей 0.01.

Таблица 2.6 – Значения $D_{n_1, n_2; N}$ для логрангового критерия между $G_{n_1, n_2; N}(t)$ и $G(t)$, $N = 2\,700\,000$

Законы распределения $f(t)$ и $f^c(t; \theta)$	Объемы выборки $n = n_1 = n_2$	Степени цензурирования выборок, $R(Z_1) = R(Z_2)$					
		0%	10%	20%	30%	40%	50%
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{We}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	5	0.0325	0.0243	0.0206	0.0175	0.0164	0.0171
	10	0.0137	0.0123	0.0101	0.0090	0.0078	0.0073
	15	0.0100	0.0084	0.0077	0.0061	0.0054	0.0049
	20	0.0078	0.0069	0.0058	0.0047	0.0043	0.0037
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{We}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	5	0.0325	0.0226	0.0169	0.0140	0.0123	0.0140
	10	0.0141	0.0104	0.0081	0.0064	0.0051	0.0047
	15	0.0095	0.0073	0.0056	0.0044	0.0036	0.0032
	20	0.0077	0.0057	0.0044	0.0031	0.0029	0.0024
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{\Gamma}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	5	0.0323	0.0254	0.0214	0.0193	0.0188	0.0200
	10	0.0141	0.0124	0.0112	0.0103	0.0091	0.0082
	15	0.0098	0.0089	0.0077	0.0075	0.0067	0.0060
	20	0.0074	0.0069	0.0058	0.0059	0.0051	0.0049
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{\Gamma}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	5	0.0327	0.0230	0.0173	0.0145	0.0132	0.0150
	10	0.0143	0.0106	0.0086	0.0070	0.0060	0.0052
	15	0.0101	0.0074	0.0062	0.0053	0.0042	0.0038
	20	0.0073	0.0058	0.0045	0.0038	0.0033	0.0028

Таблица 2.7 – Параметры степенной модели $D_n = \hat{a} \cdot n^{-\hat{b}}$, описывающей скорость сходимости распределения статистики логарифмического рангового критерия к предельному распределению

Законы распределения $f(t)$ и $f^c(t; \theta)$	Параметры модели	Степени цензурирования выборок, $R(Z_1) = R(Z_2)$					
		0%	10%	20%	30%	40%	50%
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{We}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.1917	0.1115	0.0921	0.0814	0.0831	0.1092
	\hat{b}	1.1078	0.9484	0.9347	0.9552	1.0109	1.1547
	R^2	0.9985	0.9997	0.9990	1.0000	0.9993	0.9995
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{We}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.1951	0.1201	0.0852	0.0803	0.0762	0.1343
	\hat{b}	1.1172	1.0412	1.0077	1.0870	1.1376	1.4089
	R^2	0.9987	0.9993	0.9996	0.9997	0.9982	0.9986
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{\Gamma}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.1919	0.1204	0.0965	0.0779	0.0887	0.1207
	\hat{b}	1.1105	0.9695	0.9356	0.8685	0.9670	1.1228
	R^2	0.9994	0.9996	1.0000	0.9998	0.9994	0.9974
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{\Gamma}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.1943	0.1224	0.0818	0.0685	0.0716	0.1274
	\hat{b}	1.1100	1.0421	0.9667	0.9682	1.0538	1.3342
	R^2	0.9994	0.9993	0.9996	0.9987	0.9992	0.9982

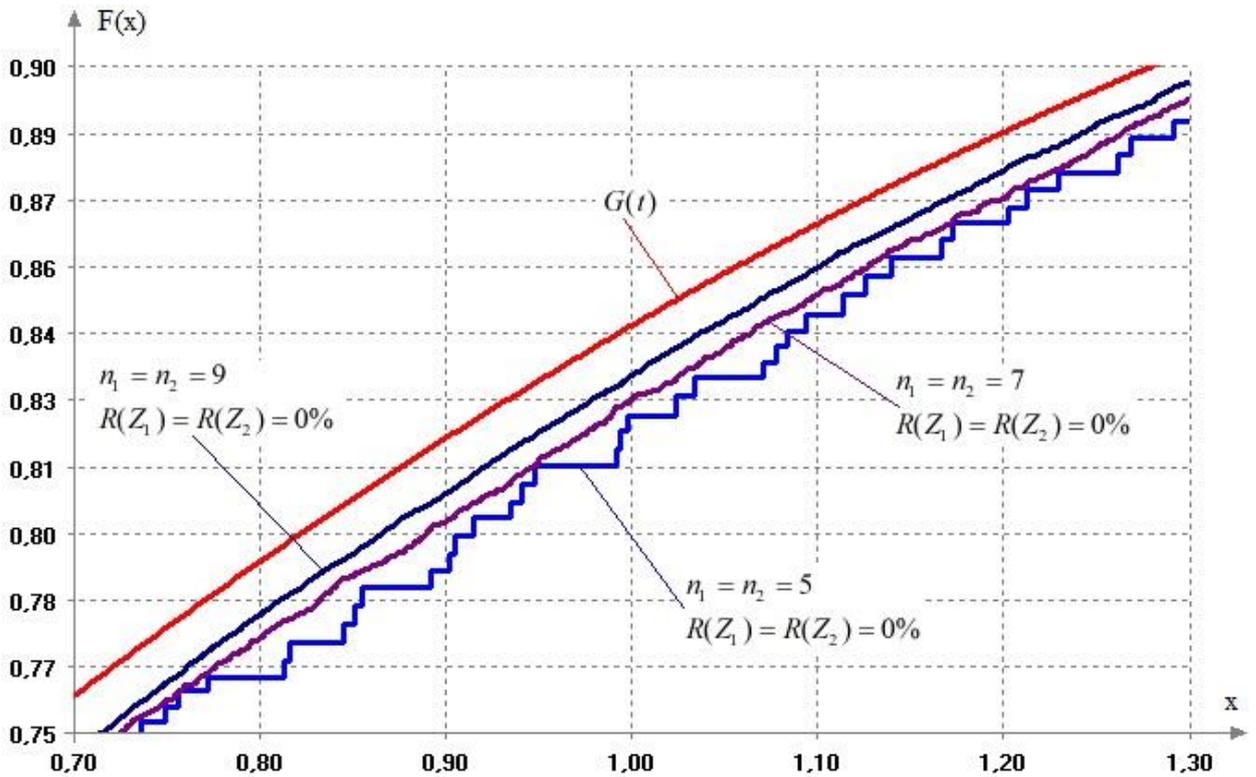


Рисунок 2.4 – Распределение статистики $G_{n_1, n_2; N}(t)$ логарифмического рангового критерия для разных объемов выборок $n = n_1 = n_2$

2.4.5 Критерий Кокса-Мантела

Результаты исследования скорости сходимости распределения статистики (значения величин $D_{n_1, n_2; N}$) критерия Кокса-Мантела, полученные с помощью компьютерного моделирования, представлены в таблице 2.8. Графики распределения статистики критерия Кокса-Мантела для разных объемов выборок $n = n_1 = n_2$ представлены на рисунке 2.5. Полученные параметры степенной зависимости $D_n = \hat{a} \cdot n^{-\hat{b}}$, соответствующие результатам в таблице 2.8, представлены в таблице 2.9.

Из полученных результатов очевидно, что распределение статистики $G_{n_1, n_2; N}(t)$ критерия Кокса-Мантела быстро сходится к соответствующему предельному распределению $G(t)$ при справедливости гипотезы H_0 . Начиная с объема выборок $n = 20$, расстояние между распределениями $G_{n_1, n_2; N}(t)$ и $G(t)$ не превышает $\varepsilon = 0.01$. Данный результат справедлив для всех

использованных законов распределения моментов отказа $F(t)$ и цензурирования $F^C(t)$, а также для всех использованных степеней цензурирования $R(Z)$. Наибольшая скорость сходимости распределения статистики критерия Кокса-Мантела достигается при степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 50\%$, т.к. оценки параметра \hat{b} в данном случае наибольшие.

Этот факт позволяет сделать вывод: если использовать предельное распределение критерия Кокса-Мантела в случае объемов выборок $n \geq 20$ наблюдений, то значение достигнутого уровня значимости p_v будет вычислено с погрешностью, не превышающей 0.01.

Таблица 2.8 – Значения $D_{n_1, n_2; N}$ для критерия Кокса-Мантела между $G_{n_1, n_2; N}(t)$ и $G(t)$, $N = 2\,700\,000$

Законы распределения $f(t)$ и $f^C(t; \theta)$	Объемы выборки $n = n_1 = n_2$	Степени цензурирования выборок, $R(Z_1) = R(Z_2)$					
		0%	10%	20%	30%	40%	50%
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{We}^C(t; \mu, \lambda, \nu)$	5	0.0292	0.0230	0.0196	0.0176	0.0169	0.0198
	10	0.0127	0.0108	0.0095	0.0084	0.0075	0.0069
	15	0.0087	0.0076	0.0069	0.0060	0.0051	0.0045
	20	0.0068	0.0061	0.0053	0.0046	0.0043	0.0038
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{We}^C(t; \mu, \lambda, \nu)$	5	0.0290	0.0216	0.0171	0.0141	0.0126	0.0139
	10	0.0127	0.0095	0.0076	0.0064	0.0049	0.0044
	15	0.0090	0.0068	0.0054	0.0042	0.0032	0.0030
	20	0.0068	0.0052	0.0042	0.0038	0.0027	0.0022
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{\Gamma}^C(t; \mu, \lambda, \nu)$	5	0.0291	0.0236	0.0207	0.0192	0.0199	0.0238
	10	0.0127	0.0113	0.0099	0.0095	0.0088	0.0082
	15	0.0086	0.0080	0.0070	0.0065	0.0063	0.0054
	20	0.0069	0.0063	0.0058	0.0051	0.0051	0.0044
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{\Gamma}^C(t; \mu, \lambda, \nu)$	5	0.0290	0.0220	0.0172	0.0142	0.0139	0.0156
	10	0.0127	0.0099	0.0080	0.0066	0.0056	0.0055
	15	0.0087	0.0071	0.0056	0.0048	0.0040	0.0034
	20	0.0070	0.0053	0.0044	0.0036	0.0030	0.0029

Таблица 2.9 – Параметры степенной модели $D_n = \hat{a} \cdot n^{-\hat{b}}$, описывающей скорость сходимости распределения статистики критерия Кокса-Мантела к предельному распределению

Законы распределения $f(t)$ и $f^c(t; \theta)$	Параметры модели	Степени цензурирования выборок, $R(Z_1) = R(Z_2)$					
		0%	10%	20%	30%	40%	50%
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{We}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.1745	0.1165	0.0932	0.0874	0.0950	0.1765
	\hat{b}	1.1142	1.0114	0.9718	0.9983	1.0771	1.3635
	R^2	0.9992	0.9990	0.9995	0.9996	0.9982	0.9973
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{We}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.1680	0.1223	0.0952	0.0766	0.0924	0.1496
	\hat{b}	1.0951	1.0812	1.0704	1.0556	1.2419	1.4802
	R^2	0.9993	0.9991	0.9991	0.9982	0.9976	0.9987
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{\Gamma}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.1729	0.1161	0.0997	0.0931	0.1087	0.2177
	\hat{b}	1.1107	0.9932	0.9807	0.9827	1.0597	1.3795
	R^2	0.9989	0.9994	0.9985	0.9998	0.9983	0.9979
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{\Gamma}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.1691	0.1210	0.0898	0.0729	0.0922	0.1428
	\hat{b}	1.0992	1.0628	1.0303	1.0197	1.1798	1.3795
	R^2	0.9988	0.9994	0.9993	0.9994	0.9989	0.9976

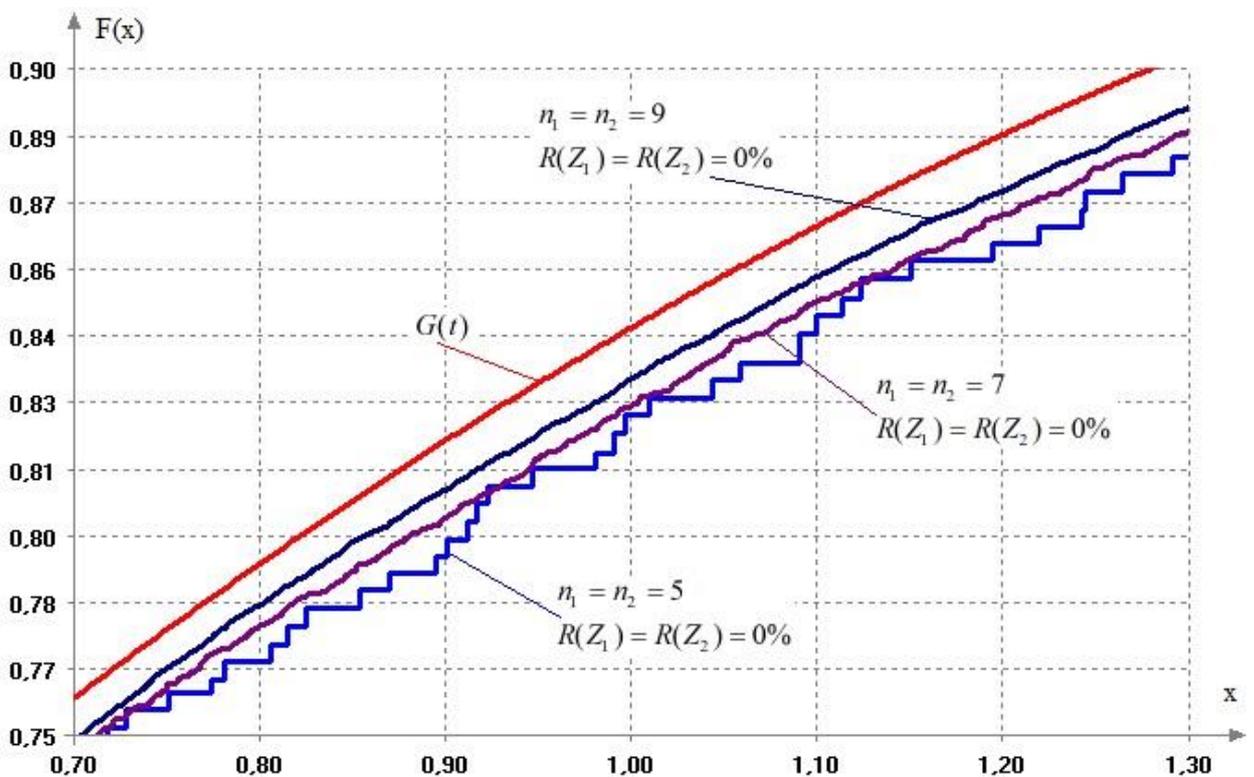


Рисунок 2.5 – Распределение статистики $G_{n_1, n_2; N}(t)$ критерия Кокса-Мантела

для разных объемов выборок $n = n_1 = n_2$

2.4.6 Взвешенный логарифмический ранговый критерий (Тэрона-Вэра)

Результаты исследования скорости сходимости распределения статистики (значения величин $D_{n_1, n_2; N}$) взвешенного логарифмического рангового критерия с весовой функцией Тэрона-Вэра (критерий Тэрона-Вэра), полученные с помощью компьютерного моделирования, представлены в таблице 2.10. Графики распределения статистики критерия Тэрона-Вэра для разных объемов выборок $n = n_1 = n_2$ представлены на рисунке 2.6. Полученные параметры степенной зависимости $D_n = \hat{a} \cdot n^{-\hat{b}}$, соответствующие результатам в таблице 2.10, представлены в таблице 2.11.

Из полученных результатов очевидно, что распределение статистики $G_{n_1, n_2; N}(t)$ критерия однородности Тэрона-Вэра быстро сходится к соответствующему предельному распределению $G(t)$ при справедливости гипотезы H_0 . Начиная с объема выборок $n = 15$, расстояние между распределениями $G_{n_1, n_2; N}(t)$ и $G(t)$ не превышает $\varepsilon = 0.01$. Данный результат справедлив для всех использованных законов распределения моментов отказа $F(t)$ и цензурирования $F^C(t)$, а также для всех использованных степеней цензурирования $R(Z)$. Наибольшая скорость сходимости распределения статистики взвешенного логарифмического рангового критерия с весовой функцией Тэрона-Вэра достигается при степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 50\%$, т.к. оценки параметра \hat{b} в данном случае наибольшие.

Этот факт позволяет сделать вывод: если использовать предельное распределение критерия однородности Тэрона-Вэра в случае объемов выборок $n \geq 15$ наблюдений, то значение достигнутого уровня значимости p_v будет вычислено с погрешностью, не превышающей 0.01.

Таблица 2.10 – Значения $D_{n_1, n_2; N}$ для критерия Тэрона-Вэра между $G_{n_1, n_2; N}(t)$ и $G(t)$, $N = 2\,700\,000$

Законы распределения $f(t)$ и $f^c(t; \theta)$	Объемы выборки $n = n_1 = n_2$	Степени цензурирования выборок, $R(Z_1) = R(Z_2)$					
		0%	10%	20%	30%	40%	50%
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{We}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	5	0.0363	0.0278	0.0242	0.0226	0.0265	0.0379
	10	0.0107	0.0102	0.0094	0.0095	0.0097	0.0114
	15	0.0068	0.0066	0.0059	0.0059	0.0059	0.0071
	20	0.0055	0.0050	0.0046	0.0046	0.0041	0.0053
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{We}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	5	0.0371	0.0276	0.0238	0.0217	0.0220	0.0294
	10	0.0104	0.0093	0.0085	0.0080	0.0073	0.0080
	15	0.0069	0.0062	0.0056	0.0051	0.0048	0.0060
	20	0.0056	0.0044	0.0040	0.0040	0.0037	0.0039
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{\Gamma}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	5	0.0371	0.0278	0.0241	0.0245	0.0299	0.0458
	10	0.0108	0.0103	0.0096	0.0098	0.0104	0.0123
	15	0.0072	0.0065	0.0060	0.0063	0.0068	0.0078
	20	0.0051	0.0044	0.0049	0.0047	0.0051	0.0059
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{\Gamma}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	5	0.0367	0.0282	0.0236	0.0215	0.0225	0.0325
	10	0.0111	0.0091	0.0084	0.0079	0.0084	0.0087
	15	0.0067	0.0059	0.0058	0.0055	0.0054	0.0055
	20	0.0051	0.0052	0.0038	0.0036	0.0037	0.0047

Таблица 2.11 – Параметры степенной модели $D_n = \hat{a} \cdot n^{-\hat{b}}$, описывающей скорость сходимости распределения статистики критерия Тэрона-Вэра к предельному распределению

Законы распределения $f(t)$ и $f^c(t; \theta)$	Параметры модели	Степени цензурирования выборок, $R(Z_1) = R(Z_2)$					
		0%	10%	20%	30%	40%	50%
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{We}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.4601	0.2381	0.1911	0.1576	0.2489	0.4849
	\hat{b}	1.5815	1.3375	1.2863	1.2084	1.3933	1.5866
	R^2	0.9981	0.9992	0.9992	0.9997	0.9998	0.9990
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{We}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.4962	0.2740	0.2149	0.1844	0.2206	0.4006
	\hat{b}	1.6154	1.4295	1.3701	1.3327	1.4362	1.6270
	R^2	0.9977	0.9992	0.9994	0.9989	0.9986	0.9980
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{\Gamma}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.4829	0.2496	0.1795	0.1830	0.2798	0.7121
	\hat{b}	1.5978	1.3655	1.2505	1.2516	1.3928	1.7080
	R^2	0.9989	0.9998	0.9989	0.9996	0.9990	0.9987
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{\Gamma}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.4747	0.2857	0.2115	0.1809	0.1952	0.4880
	\hat{b}	1.5932	1.4435	1.3656	1.3262	1.3445	1.6870
	R^2	0.9990	0.9964	0.9991	0.9990	0.9997	0.9974

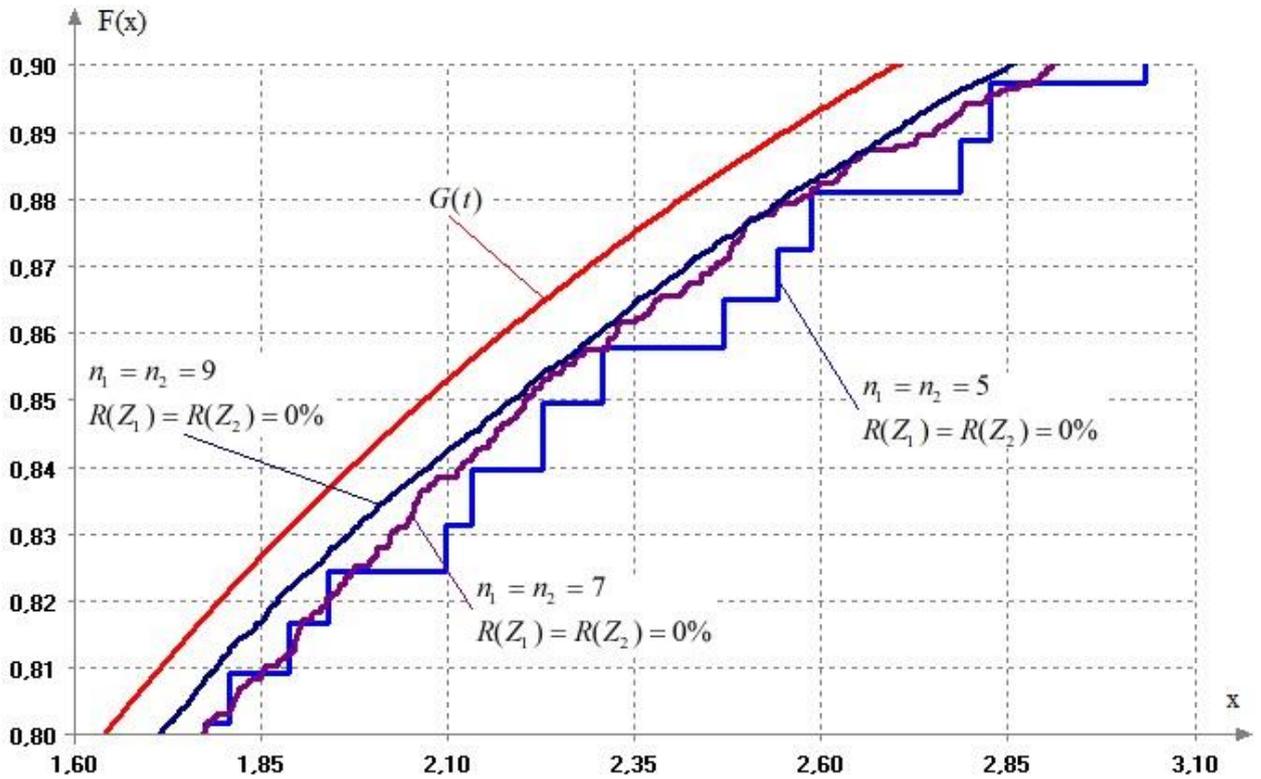


Рисунок 2.6 – Распределение статистики $G_{n_1, n_2; N}(t)$ критерия Тэрона-Вэра для разных объемов выборок $n = n_1 = n_2$

2.4.7 Критерий Багдонавичуса-Никулина (обобщенная модель Кокса)

Результаты исследования скорости сходимости распределения статистики (значения величин $D_{n_1, n_2; N}$) критерия Багдонавичуса-Никулина (обобщенная модель Кокса), полученные с помощью компьютерного моделирования, представлены в таблице 2.12. Графики распределения статистики критерия Багдонавичуса-Никулина (обобщенная модель Кокса) для разных объемов выборок $n = n_1 = n_2$ представлены на рисунке 2.7. Полученные параметры степенной зависимости $D_n = \hat{a} \cdot n^{-\hat{b}}$, соответствующие результатам в таблице 2.12, представлены в таблице 2.13.

Из полученных результатов очевидно, что распределение статистики $G_{n_1, n_2; N}(t)$ критерию однородности Багдонавичуса-Никулина (обобщенная модель Кокса) требуется больше наблюдений, чем рассмотренным ранее критериям, для достижения расстояния между распределениями $G_{n_1, n_2; N}(t)$ и

$G(t)$ не более $\varepsilon = 0.01$. Данный результат справедлив для всех использованных законов распределения моментов отказа $F(t)$ и цензурирования $F^C(t)$, а также для всех использованных степеней цензурирования $R(Z)$. Наибольшая скорость сходимости распределения статистики критерия Багдонавичуса-Никулина (обобщенная модель Кокса) может достигаться при разной степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2)$, т.к. по полученным результатам статистического моделирования не удалось выявить закономерность для какой степени цензурирования соответствуют наибольшие значения параметра \hat{b} .

Этот факт позволяет сделать вывод: если использовать предельное распределение критерия однородности Багдонавичуса-Никулина (обобщенная модель Кокса) в случае объемов выборок $n \geq 200$ наблюдений, то значение достигнутого уровня значимости pv будет вычислено с погрешностью, не превышающей 0.01.

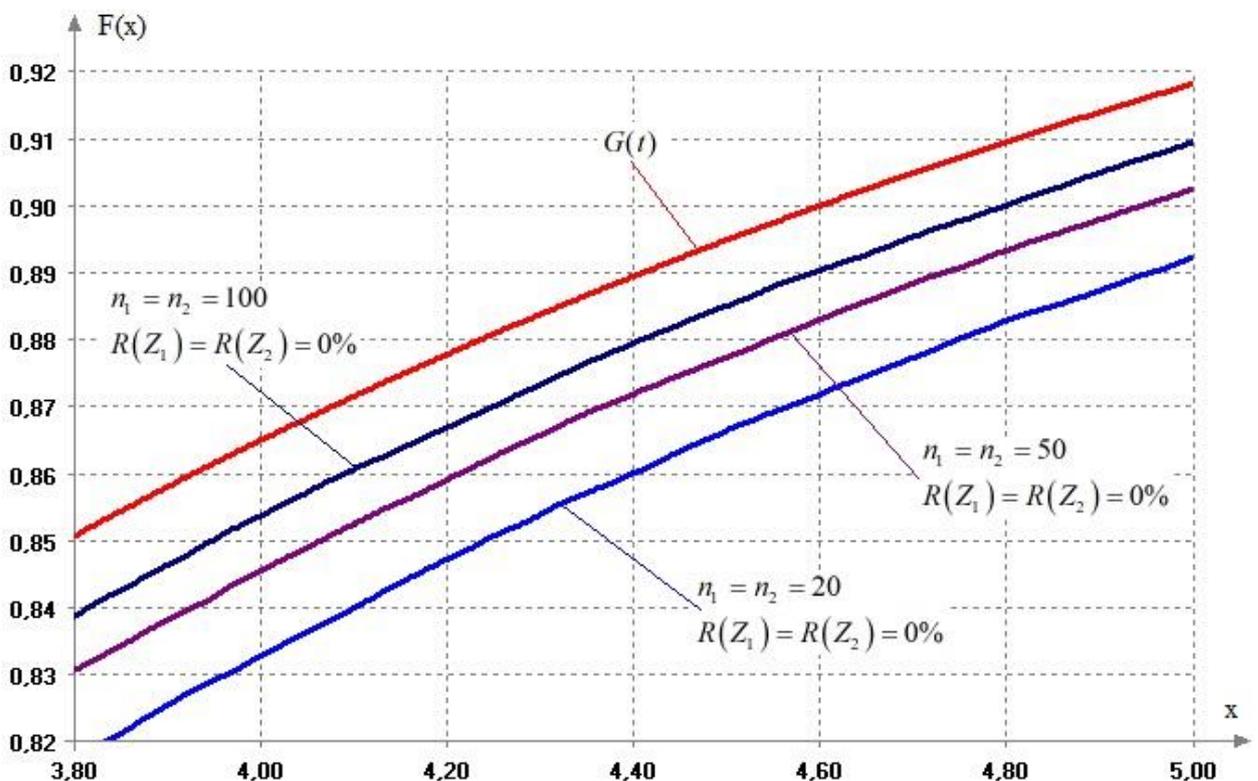


Рисунок 2.7 – Распределение статистики $G_{n_1, n_2; N}(t)$ критерия Багдонавичуса-Никулина (обобщенная модель Кокса) для разных объемов выборок $n = n_1 = n_2$

Таблица 2.12 – Значения $D_{n_1, n_2; N}$ для критерия Багдонавичуса-Никулина (обобщенная модель Кокса) между $G_{n_1, n_2; N}(t)$ и $G(t)$, $N = 2\,700\,000$

Законы распределения $f(t)$ и $f^c(t; \theta)$	Объемы выборок $n = n_1 = n_2$	Степени цензурирования выборок, $R(Z_1) = R(Z_2)$					
		0%	10%	20%	30%	40%	50%
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{We}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	50	0.0238	0.0209	0.0191	0.0173	0.0147	0.0132
	75	0.0174	0.0165	0.0148	0.0131	0.0116	0.0105
	100	0.0144	0.0130	0.0124	0.0107	0.0091	0.0087
	125	0.0121	0.0116	0.0092	0.0090	0.0077	0.0062
	150	0.0104	0.0099	0.0089	0.0075	0.0070	0.0060
	175	0.0092	0.0087	0.0080	0.0074	0.0065	0.0057
	200	0.0087	0.0079	0.0073	0.0066	0.0058	0.0047
	225	0.0076	0.0070	0.0072	0.0060	0.0052	0.0050
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{We}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	50	0.0236	0.0156	0.0108	0.0080	0.0060	0.0057
	75	0.0184	0.0109	0.0078	0.0058	0.0041	0.0041
	100	0.0151	0.0085	0.0068	0.0045	0.0034	0.0029
	125	0.0124	0.0075	0.0057	0.0040	0.0028	0.0018
	150	0.0110	0.0062	0.0043	0.0029	0.0022	0.0019
	175	0.0097	0.0053	0.0034	0.0028	0.0020	0.0020
	200	0.0086	0.0054	0.0037	0.0027	0.0017	0.0020
	225	0.0078	0.0049	0.0033	0.0024	0.0016	0.0012
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{\Gamma}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	50	0.0240	0.0229	0.0218	0.0213	0.0203	0.0194
	75	0.0181	0.0170	0.0167	0.0164	0.0157	0.0162
	100	0.0144	0.0137	0.0130	0.0133	0.0134	0.0131
	125	0.0123	0.0121	0.0114	0.0117	0.0114	0.0109
	150	0.0109	0.0104	0.0101	0.0102	0.0100	0.0101
	175	0.0096	0.0088	0.0090	0.0092	0.0087	0.0094
	200	0.0087	0.0084	0.0078	0.0079	0.0078	0.0081
	225	0.0078	0.0075	0.0073	0.0076	0.0073	0.0070
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{\Gamma}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	50	0.0240	0.0175	0.0140	0.0111	0.0090	0.0081
	75	0.0181	0.0129	0.0109	0.0089	0.0070	0.0055
	100	0.0138	0.0099	0.0082	0.0064	0.0057	0.0048
	125	0.0121	0.0087	0.0071	0.0063	0.0049	0.0040
	150	0.0099	0.0079	0.0058	0.0052	0.0044	0.0041
	175	0.0101	0.0072	0.0057	0.0042	0.0041	0.0028
	200	0.0082	0.0059	0.0047	0.0039	0.0036	0.0027
	225	0.0081	0.0061	0.0043	0.0038	0.0029	0.0025

Таблица 2.13 – Параметры степенной модели $D_n = \hat{a} \cdot n^{-\hat{b}}$, описывающей скорость сходимости распределения статистики критерия Багдонавичуса-Никулина (обобщенная модель Кокса) к предельному распределению

Законы распределения $f(t)$ и $f^C(t; \theta)$	Параметры модели	Степени цензурирования выборок, $R(Z_1) = R(Z_2)$					
		0%	10%	20%	30%	40%	50%
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{We}^C(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.4383	0.3287	0.2913	0.2761	0.2135	0.2150
	\hat{b}	0.7450	0.7003	0.6948	0.7077	0.6820	0.7091
	R^2	0.9998	0.9986	0.9942	0.9985	0.9988	0.9951
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{We}^C(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.3965	0.3628	0.2462	0.1994	0.1854	0.2383
	\hat{b}	0.7169	0.8075	0.7964	0.8215	0.8771	0.9537
	R^2	0.9989	0.9994	0.9924	0.9965	0.9987	0.9816
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{\Gamma}^C(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.4263	0.4016	0.3703	0.3111	0.2792	0.2358
	\hat{b}	0.7344	0.7319	0.7225	0.6838	0.6672	0.6318
	R^2	0.9998	0.9993	0.9996	0.9994	0.9991	0.9968
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{\Gamma}^C(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.4528	0.3113	0.2930	0.1962	0.1278	0.1532
	\hat{b}	0.7506	0.7379	0.7733	0.7294	0.6758	0.7555
	R^2	0.9979	0.9984	0.9985	0.9955	0.9960	0.9875

2.4.8 Критерий Багдонавичуса-Никулина (однократные пересечения)

Результаты исследования скорости сходимости распределения статистики (значения величин $D_{n_1, n_2; N}$) критерия Багдонавичуса-Никулина для однократных пересечений функций надежности, полученные с помощью компьютерного моделирования, представлены в таблице 2.14. Графики распределения статистики критерия Багдонавичуса-Никулина для однократных пересечений функций надежности для разных объемов выборок $n = n_1 = n_2$ представлены на рисунке 2.8. Полученные параметры степенной зависимости $D_n = \hat{a} \cdot n^{-\hat{b}}$, соответствующие результатам в таблице 2.14, представлены в таблице 2.15.

Из полученных результатов очевидно, что распределение статистики $G_{n_1, n_2; N}(t)$ критерия однородности Багдонавичуса-Никулина (однократные пересечения) сходится дольше других рассмотренных критериев к соответствующему предельному распределению $G(t)$ при справедливости

гипотезы H_0 . Начиная с объема выборок $n=125$, расстояние между распределениями $G_{n_1, n_2; N}(t)$ и $G(t)$ не превышает $\varepsilon=0.01$. Данный результат справедлив для всех использованных законов распределения моментов отказа $F(t)$ и цензурирования $F^C(t)$, а также для всех использованных степеней цензурирования $R(Z)$. Наибольшая скорость сходимости распределения статистики критерия Багдонавичуса-Никулина (однократные пересечения) может достигаться при разной степени цензурирования $R(Z_1)=R(Z_2)$, т.к. по полученным результатам статистического моделирования не удалось установить закономерность какой степени цензурирования соответствуют наибольшие значения параметра \hat{b} .

Таблица 2.14 – Значения $D_{n_1, n_2; N}$ для критерия Багдонавичуса-Никулина (однократные пересечения функций надежности) между $G_{n_1, n_2; N}(t)$ и $G(t)$, $N = 2\,700\,000$

Законы распределения $f(t)$ и $f^C(t; \theta)$	Объемы выборки $n = n_1 = n_2$	Степени цензурирования выборок, $R(Z_1) = R(Z_2)$					
		0%	10%	20%	30%	40%	50%
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{We}^C(t; \mu, \lambda, \nu)$	50	0.0157	0.0142	0.0141	0.0133	0.0122	0.0113
	75	0.0109	0.0106	0.0111	0.0085	0.0090	0.0083
	100	0.0086	0.0090	0.0085	0.0077	0.0072	0.0066
	125	0.0073	0.0070	0.0065	0.0062	0.0056	0.0060
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{We}^C(t; \mu, \lambda, \nu)$	50	0.0162	0.0112	0.0085	0.0071	0.0054	0.0049
	75	0.0115	0.0077	0.0063	0.0050	0.0040	0.0039
	100	0.0083	0.0063	0.0047	0.0037	0.0030	0.0025
	125	0.0072	0.0052	0.0039	0.0023	0.0031	0.0023
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{\Gamma}^C(t; \mu, \lambda, \nu)$	50	0.0155	0.0154	0.0158	0.0159	0.0160	0.0159
	75	0.0114	0.0113	0.0113	0.0110	0.0118	0.0121
	100	0.0089	0.0092	0.0092	0.0091	0.0091	0.0094
	125	0.0078	0.0067	0.0073	0.0074	0.0079	0.0087
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{\Gamma}^C(t; \mu, \lambda, \nu)$	50	0.0156	0.0121	0.0100	0.0090	0.0077	0.0070
	75	0.0110	0.0093	0.0075	0.0066	0.0056	0.0052
	100	0.0094	0.0074	0.0057	0.0056	0.0047	0.0036
	125	0.0075	0.0066	0.0047	0.0041	0.0037	0.0029

Этот факт позволяет сделать вывод: если использовать предельное распределение критерия однородности Багдонавичуса-Никулина для однократных пересечений функций надежности в случае объемов выборок

$n \geq 125$ наблюдений, то значение достигнутого уровня значимости p_v будет вычислено с погрешностью, не превышающей 0.01.

Таблица 2.15 – Параметры степенной модели $D_n = \hat{a} \cdot n^{-\hat{b}}$, описывающей скорость сходимости распределения статистики критерия Багдонавичуса-Никулина (однократные пересечения) к предельному распределению

Законы распределения $f(t)$ и $f^c(t; \theta)$	Параметры модели	Степени цензурирования выборок, $R(Z_1) = R(Z_2)$					
		0%	10%	20%	30%	40%	50%
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{We}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.4414	0.2435	0.3042	0.3484	0.2890	0.1924
	\hat{b}	0.8539	0.7256	0.7803	0.8397	0.8073	0.7259
	R^2	0.9998	0.9962	0.9952	0.9920	0.9993	0.9988
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{We}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.5720	0.3004	0.2303	0.4554	0.0817	0.1399
	\hat{b}	0.9102	0.8424	0.8413	1.0589	0.6972	0.8513
	R^2	0.9990	0.9993	0.9989	0.9960	0.9836	0.9832
$f_{We}(t; 0, 2, 2)$ $f_{\Gamma}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.3134	0.4014	0.3874	0.4066	0.3451	0.2405
	\hat{b}	0.7687	0.8311	0.8177	0.8300	0.7846	0.6947
	R^2	0.9994	0.9971	0.9992	0.9988	0.9996	0.9970
$f_{Exp}(t; 0, 1)$ $f_{\Gamma}^c(t; \mu, \lambda, \nu)$	\hat{a}	0.3260	0.1719	0.2389	0.1941	0.1540	0.2743
	\hat{b}	0.7783	0.6780	0.8090	0.7835	0.7657	0.9337
	R^2	0.9983	0.9993	0.9989	0.9930	0.9982	0.9966

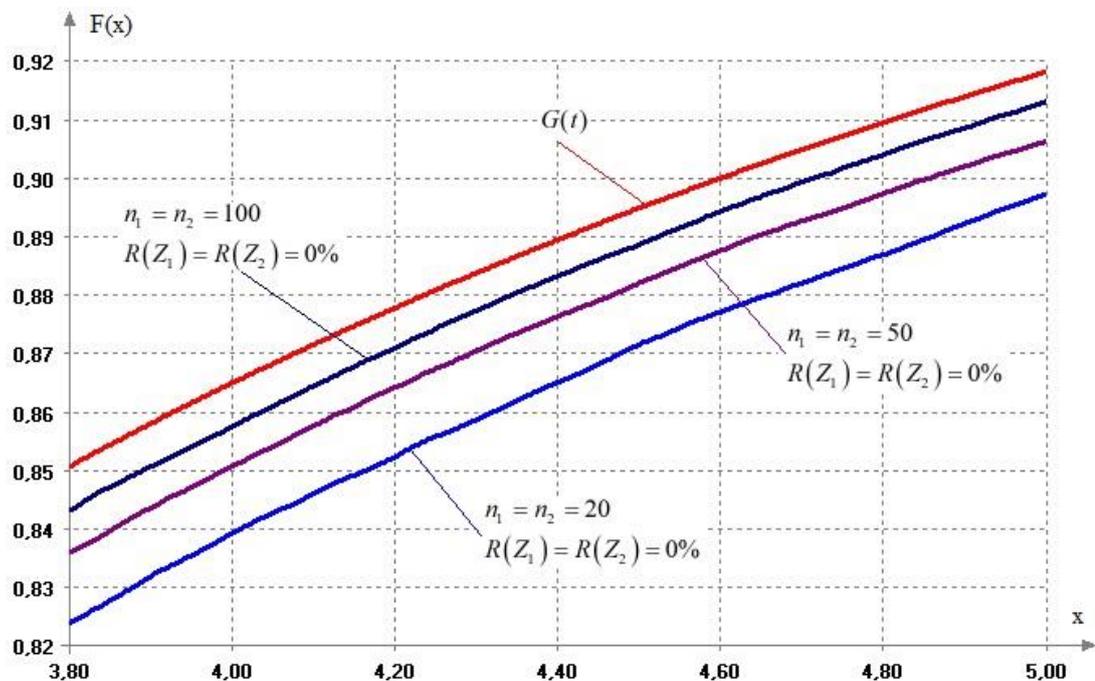


Рисунок 2.8 – Распределение статистики $G_{n_1, n_2; N}(t)$ критерия Багдонавичуса-Никулина (однократные пересечения) для разных объемов выборок $n = n_1 = n_2$

2.5 Выводы

В данной главе была описана методика оценивания скорости сходимости распределения статистики критерия однородности к соответствующему предельному закону. Для этого были описаны алгоритмы компьютерного моделирования выборки соответствующего распределения и распределения статистики критерия при конечном объеме выборок, а также алгоритм определения параметров закона распределения моментов цензурирования для достижения заданной степени цензурирования.

Кроме того, в данной главе были исследованы оценки скорости сходимости распределений статистик критериев однородности распределений к соответствующим предельным распределениям. Для этого были найдены соответствующие расстояния Колмогорова между распределением статистики критерия и соответствующим предельным распределением, а также были построены регрессионные зависимости расстояния Колмогорова от объема выборок.

В таблице 2.16 по всем рассмотренным статистическим критериям в данной главе приведены минимальные объемы выборок, начиная с которого расстояние Колмогорова между распределением статистики критерия и соответствующим предельным распределением будет отличаться на величину ε , не превышающую 0.01. Это означает, если объем меньшей выборки будет превышать указанный в таблице 2.16, то вычисленный достигаемый уровень значимости при использовании соответствующего предельного распределения статистики критерия будет иметь погрешность, не превышающую 0.01.

Было показано, если объем меньшей выборки не превышает указанного в таблице 2.16, то в таком случае для определения достигаемого уровня значимости критерия необходимо использовать другие способы, например, методы компьютерного моделирования.

Представленные результаты исследований опубликованы в [136-140].

Таблица 2.16 – Объемы выборок $n = n_1 = n_2$, начиная с которых наибольшее расстояние между распределениями $G_{n_1, n_2; N}(t)$ и $G(t)$ не превышает $\varepsilon = 0.01$

Статистика критерия	Степень цензурирования, %					
	0%	10%	20%	30%	40%	50%
S_G	16	11	12	14	18	22
S_P	16	9	8	7	7	8
S_{LG}	15	14	12	11	10	10
S_{CM}	14	12	11	10	10	10
S_{TW}	12	11	11	11	11	13
S_{BN1}	170	156	151	151	147	149
S_{BN3}	89	87	87	87	92	98

ГЛАВА 3 СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОЩНОСТИ КРИТЕРИЕВ ОДНОРОДНОСТИ НА БЛИЗКИХ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ГИПОТЕЗАХ

Сравнительный анализ статистической мощности критериев на различных типах конкурирующих гипотез позволяет определить, в каких случаях один статистический критерий является более или менее предпочтительным по сравнению с другими критериями. С помощью методов компьютерного моделирования на основе метода многократного повторения статистического эксперимента Монте-Карло у нас имеется возможность оценить эффективность применения статистических критериев с точки зрения мощности. Для этого необходимо сформировать множество близких альтернативных гипотез, достаточное для получения статистических выводов. Полученные результаты исследований опубликованы в [141-149].

3.1 Близкие альтернативные гипотезы

Мощность статистического критерия зависит от множества факторов таких, как альтернативная гипотеза, объем выборок, закон распределения моментов цензурирования, степень цензурирования, вероятность ошибки I-го рода и др. Очевидно, что, рассматривая различные комбинации объемов выборок, степеней цензурирования и значений ошибки I-го рода, можно выявлять закономерности поведения мощности критериев. Однако, необходимо также определить множество исчерпывающих альтернативных гипотез для формирования статистических выводов. Для этого будем рассматривать множество близких альтернативных гипотез [149]. Введем понятия расстояния и степени близости для пары конкурирующих гипотез.

Расстоянием между конкурирующими гипотезами будем называть метрику $d(S_1, S_2)$ [107] между соответствующими функциями надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$. *Степенью близости* конкурирующих гипотез будем называть такое число ε , что $d(S_1, S_2) = \varepsilon$. Чем ближе конкурирующие гипотезы

(меньше значение ε) и выше мощность критерия, тем чувствительнее критерий к паре конкурирующих гипотез. Для проведения сравнительного анализа зафиксируем близость ε , т.к. с ростом ε мощность критериев будет только увеличиваться.

В данной диссертационной работе при сравнительном анализе мощности критериев выбор рассматриваемых конкурирующих гипотез осуществлялся исходя из следующих условий:

1. Пары конкурирующих гипотез должны иметь примерно одинаковую степень близости ε , т.е.

$$d(S_1, S_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} |S_1(t) - S_2(t)| dt \approx \varepsilon,$$

где $\varepsilon = 0.01$. В случае фиксированного значения ε можно корректно сравнивать мощность критериев между различными группами альтернативных гипотез.

2. Альтернативные гипотезы должны входить в одну из групп (в один из типов), охватывающих всевозможные варианты конфигураций распределений, состоящих из различных вариантов с различным количеством точек пересечения функций надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ (без пересечений, с одной точкой пересечения, с двумя точками пересечения). Для пар конкурирующих гипотез с 3-мя и более числом точек пересечений будем предполагать, что они не различимы в случае конечного объема n_1, n_2 выборок Z_1, Z_2 ;
3. В каждом типе альтернатив имеются пары конкурирующих гипотез, соответствующие разным семействам законов распределений моментов отказа $F_1(t), F_2(t)$ и цензурирования $F_1^C(t), F_2^C(t)$.

Такой подход к выбору альтернативных гипотез связан с необходимостью сравнить оценки мощности критериев однородности распределений между разными группами альтернативных гипотез. Кроме того, в общем случае равномерно мощного критерия для проверки гипотезы однородности распределений не существует. Поэтому подобный подход в

формировании альтернативных гипотез позволит нам избежать получения слишком частных результатов, которые нельзя было бы обобщить.

Схематично типы альтернативных гипотез (с разным количеством точек пересечений функций надежности с учетом их расположения в разные моменты времени) представлены на рисунке 3.1, а множество альтернативных гипотез, используемых в данной диссертационной работе, приведены в таблице 3.1 и на рисунках 3.2-3.4.

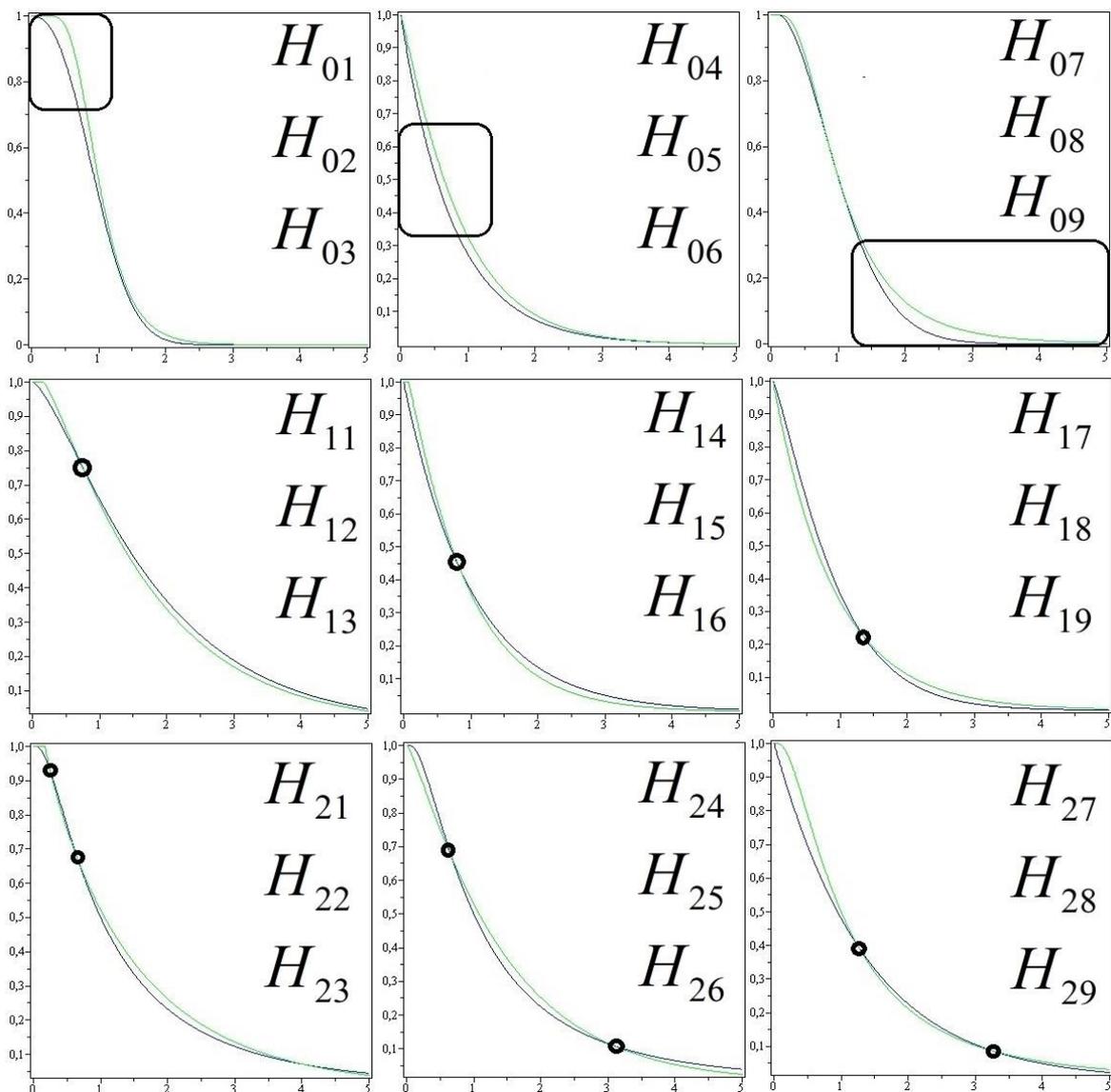


Рисунок 3.1 – Группы альтернативных гипотез (схематично показаны области точек пересечений и области с наибольшим отклонением)

Таблица 3.1 – Альтернативные гипотезы (близость $\varepsilon \approx 0.01$)

H_i	Тип альтернативной гипотезы	$S_1(t)$	$S_2(t)$	Точка пересечения
H_{01}	Точек пересечения: 0 Наибольшее отклонение в <i>ранние</i> моменты времени	$f_{Exp}(t; 0.00, 1.00)$	$f_{Exp}(t; 0.10, 1.00)$	–
H_{02}		$f_{We}(t; 0.00, 1.10, 2.40)$	$f_{LgN}(t; 0.00, 0.37)$	–
H_{03}		$f_{LgN}(t; 0.01, 0.91)$	$f_{Exp}(t; 0.00, 0.74)$	–
H_{04}	Точек пересечения: 0 Наибольшее отклонение в <i>средние</i> моменты времени	$f_{\Gamma}(t; 0.00, 1.06, 1.16)$	$f_{Exp}(t; 0.00, 0.86)$	–
H_{05}		$f_{Exp}(t; 0.00, 1.30)$	$f_{We}(t; 0.00, 0.90, 1.10)$	–
H_{06}		$f_{Exp}(t; 0.00, 1.00)$	$f_{We}(t; 0.09, 1.10, 1.07)$	–
H_{07}	Точек пересечения: 0 Наибольшее отклонение в <i>поздние</i> моменты времени	$f_{Exp}(t; 0.00, 1.30)$	$f_{\Gamma}(t; 0.00, 0.80, 1.06)$	–
H_{08}		$f_{We}(t; 0.50, 1.00, 1.20)$	$f_{Exp}(t; 0.56, 1.00)$	–
H_{09}		$f_{We}(t; 0.12, 1.10, 1.73)$	$f_{LgN}(t; 0.01, 0.60)$	–
H_{11}	Одна точка пересечения в <i>ранние</i> моменты времени	$f_{Exp}(t; 0.00, 1.00)$	$f_{Exp}(t; 0.05, 1.16)$	0.363
H_{12}		$f_{\Gamma}(t; 0.00, 1.27, 1.47)$	$f_{\Gamma}(t; 0.16, 1.30, 1.27)$	0.763
H_{13}		$f_{We}(t; 0.02, 1.00, 1.10)$	$f_{Exp}(t; 0.00, 0.91)$	0.571
H_{14}	Одна точка пересечения в <i>средние</i> моменты времени	$f_{We}(t; 0.00, 0.98, 0.90)$	$f_{\Gamma}(t; 0.00, 0.97, 0.97)$	0.611
H_{15}		$f_{Exp}(t; 0.00, 1.00)$	$f_{We}(t; 0.07, 0.90, 1.06)$	0.843
H_{16}		$f_{\Gamma}(t; 0.01, 1.00, 1.15)$	$f_{Exp}(t; 0.00, 0.83)$	1.040
H_{17}	Одна точка пересечения в <i>поздние</i> моменты времени	$f_{We}(t; 0.00, 0.97, 1.21)$	$f_{Exp}(t; 0.00, 1.11)$	1.346
H_{18}		$f_{\Gamma}(t; 0.00, 1.10, 1.04)$	$f_{\Gamma}(t; 0.00, 0.90, 1.30)$	1.878
H_{19}		$f_{We}(t; 0.50, 1.10, 1.10)$	$f_{Exp}(t; 0.47, 1.00)$	3.626
H_{21}	Две точки пересечения в <i>ранние</i> и <i>средние</i> моменты времени	$f_{LgN}(t; 0.00, 0.95)$	$f_{We}(t; 0.17, 1.32, 0.91)$	0.243, 0.655
H_{22}		$f_{Exp}(t; 0.50, 1.05)$	$f_{LgN}(t; 0.14, 0.59)$	0.814, 1.038
H_{23}		$f_{We}(t; 0.50, 1.00, 1.20)$	$f_{Exp}(t; 0.53, 1.00)$	0.577, 1.327
H_{24}	Две точки пересечения в <i>ранние</i> и <i>поздние</i> моменты времени	$f_{LgN}(t; 0.00, 0.92)$	$f_{\Gamma}(t; 0.01, 1.21, 1.19)$	0.683, 3.074
H_{25}		$f_{LgN}(t; 0.00, 0.82)$	$f_{Exp}(t; 0.19, 0.82)$	0.232, 0.831
H_{26}		$f_{We}(t; 0.01, 1.70, 1.85)$	$f_{LgN}(t; 0.29, 0.57)$	1.018, 2.381
H_{27}	Две точки пересечения в <i>средние</i> и <i>поздние</i> моменты времени	$f_{We}(t; 0.00, 1.36, 1.02)$	$f_{LgN}(t; 0.00, 0.87)$	1.254, 3.265
H_{28}		$f_{\Gamma}(t; 0.00, 1.13, 1.23)$	$f_{LgN}(t; 0.00, 0.88)$	0.793, 2.994
H_{29}		$f_{Exp}(t; 0.00, 0.74)$	$f_{LgN}(t; 0.00, 0.87)$	1.321, 3.463

Будем обозначать с помощью записи $H_a - H_b$ множество альтернативных гипотез $\{H_i, a \leq i \leq b\}$.

Ранними моментами времени будем называть множество *ET* (Early Time) таких моментов времени t , которые соответствуют квантилям функции надежности $S(t)$ от 1.00 до 0.67, т.е. $ET = \{t : t \in (-\infty, S^{-1}(0.67))\}$.

Средними моментами времени будем называть множество MT (Middle Time) таких моментов времени t , которые соответствуют квантилям функции надежности $S(t)$ от 0.67 до 0.33, т.е. $MT = \{t : t \in (S^{-1}(0.67), S^{-1}(0.33))\}$.

Поздними моментами времени будем называть множество LT (Late Time) таких моментов времени t , которые соответствуют квантилям функции надежности $S(t)$ от 0.33 до 0.00, т.е. $LT = \{t : t \in (S^{-1}(0.33), +\infty)\}$.

В диссертационной работе использовались несколько законов распределения моментов цензурирования $F^C(t)$: Вейбулла-Гнеденко с функцией плотности $f_{We}(x; \mu, \lambda, \nu)$, Гамма с функцией плотности $f_{\Gamma}(x; \mu, \lambda, \nu)$ и экспоненциальное распределение с функцией плотности $f_{Exp}(x; \mu, \lambda)$. Соответствующие неизвестные параметры определялись в соответствии с параграфом 2.4.1.1.

Вид пар сравниваемых функций надежности при альтернативах $H_{01} - H_{29}$ данной диссертационной работы приведены на рисунках 3.2-3.4.

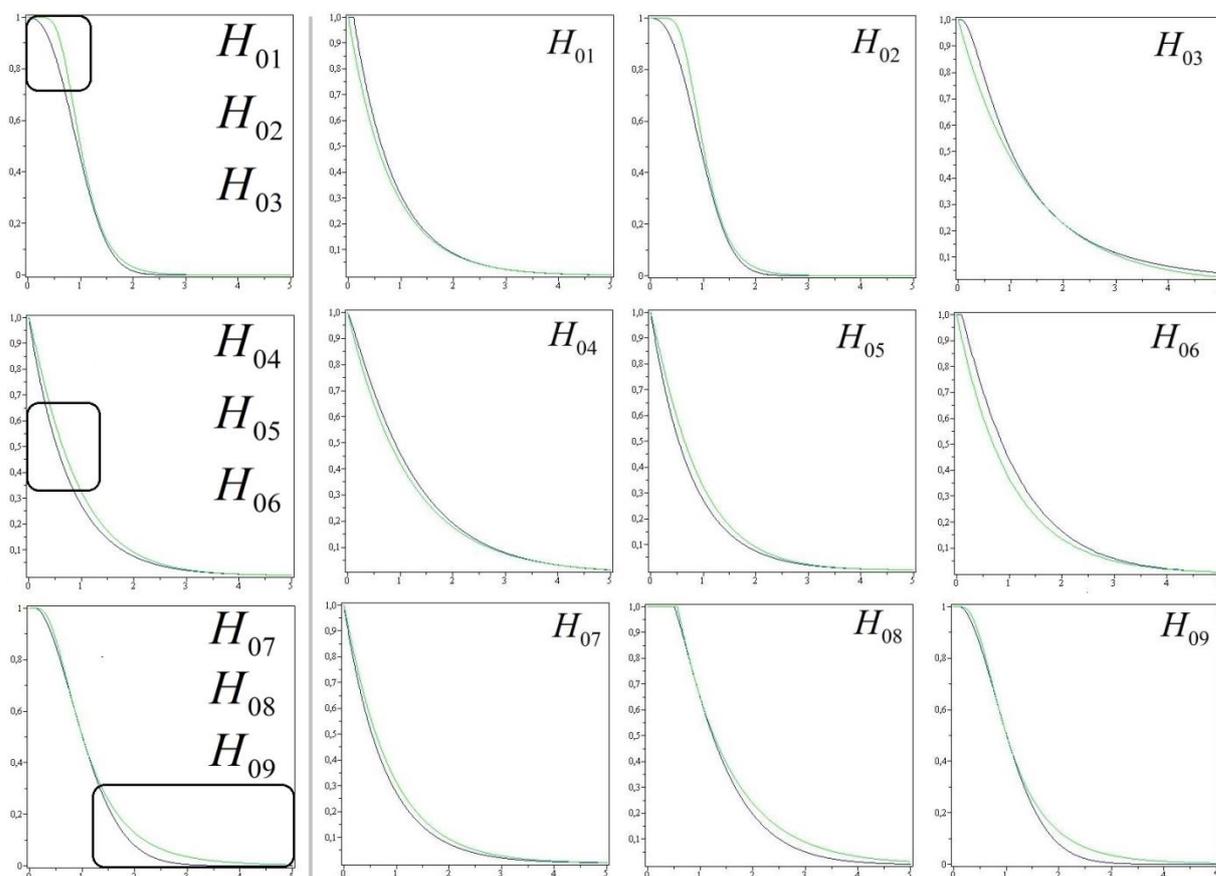


Рисунок 3.2 – Альтернативные гипотезы без точек пересечения

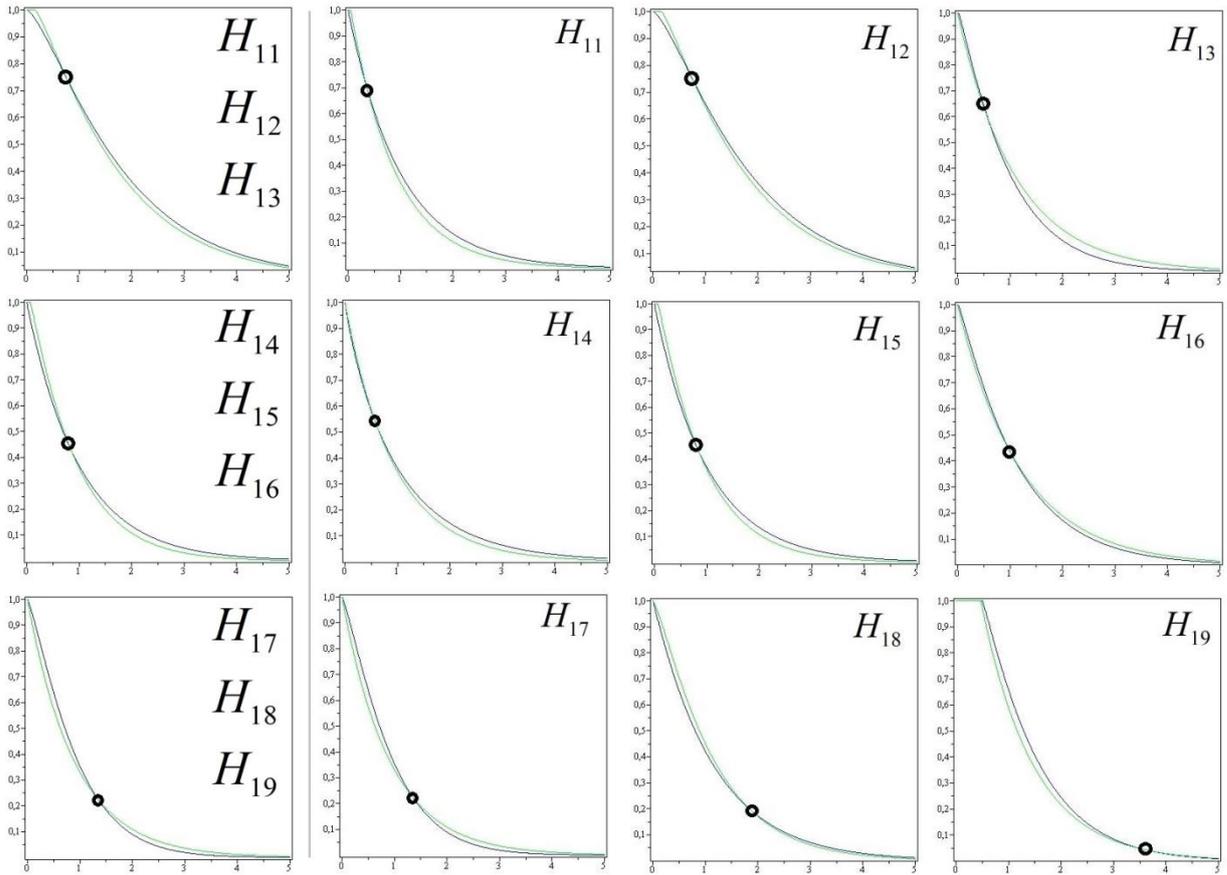


Рисунок 3.3 – Альтернативные гипотезы с одной точкой пересечений

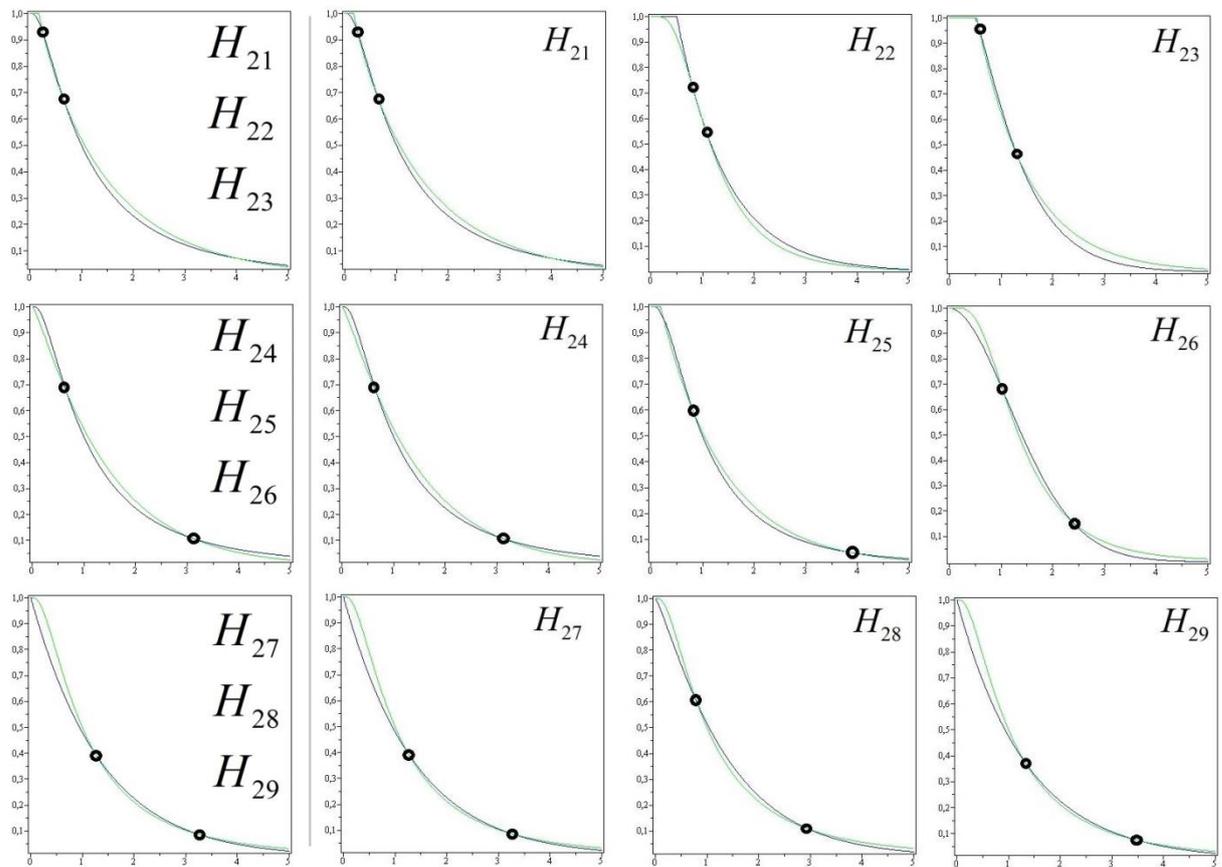


Рисунок 3.4 – Альтернативные гипотезы с двумя точками пересечений

3.2 Исследование мощности критериев однородности

Исследование мощности критериев однородности – это важный этап исследования статистического критерия. Именно от анализа мощности зависит предпочтительность использования статистического критерия на практике. При проверке статистической гипотезы однородности распределений на практике приходится сталкиваться с неопределенностью вида альтернативной гипотезы, т.е. поведение пары конкурирующих гипотез доподлинно не известно. Следовательно, с помощью методов компьютерного моделирования на совокупности различных альтернативных гипотез сравним поведение функции мощности различных статистических критериев друг с другом.

3.2.1 Сравнительный анализ мощности критериев однородности в случае полных данных

Полные наблюдения являются частным случаем данных типа времени жизни при степени цензурирования 0%. Рассматриваемые критерии можно использовать и в этой ситуации.

Для осуществления сравнительного анализа мощности критериев однородности воспользуемся альтернативными гипотезами $H_{01} - H_{29}$, объемы выборок $n_1 = n_2 = 200$ наблюдений, степени цензурирования выборок $R(Z_1) = R(Z_2) = 0\%$, объем компьютерного моделирования $N = 150\,000$ повторений, фиксированная вероятность ошибки I-го рода $\alpha = 0.05$. Результаты сравнительного анализа мощности критериев однородности в случае полных данных представлены в таблицах 3.2-3.4.

В случае альтернатив без точек пересечения функций надежности в подавляющем большинстве случаев критерий Андерсона-Дарлинга-Петита является наиболее мощным. Остальные критерии имеют статистическую мощность значительно ниже, чем отмеченный критерий, за исключением нескольких альтернативных гипотез.

Таблица 3.2 – Сравнительный анализ мощности критериев однородности для полных данных, $n_1 = n_2 = 200$ наблюдений, $H_{01} - H_{09}$

Критерий	Наибольшее отклонение в <i>ранние</i> моменты времени			Наибольшее отклонение в <i>средние</i> моменты времени			Наибольшее отклонение в <i>поздние</i> моменты времени		
	H_{01}	H_{02}	H_{03}	H_{04}	H_{05}	H_{06}	H_{07}	H_{08}	H_{09}
MAX	0.655	0.878	0.737	0.186	0.376	0.843	0.218	0.417	0.609
S_{ADP}	0.655	0.878	0.737	0.186	0.375	0.843	0.218	0.175	0.175
S_{BN1}	0.296	0.308	0.155	0.149	0.283	0.577	0.164	0.349	0.570
S_{BN2}	0.272	0.603	0.473	0.126	0.228	0.514	0.138	0.292	0.609
S_{BN3}	0.369	0.445	0.248	0.163	0.298	0.649	0.168	0.330	0.483
S_{CM}	0.163	0.307	0.175	0.098	0.241	0.345	0.199	0.286	0.341
S_G	0.381	0.528	0.313	0.177	0.369	0.675	0.217	0.108	0.104
S_{KS}	0.363	0.707	0.501	0.155	0.316	0.614	0.175	0.093	0.076
S_{LR}	0.397	0.651	0.439	0.175	0.363	0.690	0.203	0.101	0.090
S_{LG}	0.166	0.308	0.175	0.092	0.244	0.353	0.198	0.282	0.335
S_P	0.382	0.525	0.308	0.178	0.376	0.676	0.215	0.107	0.103
S_Q	0.343	0.514	0.262	0.144	0.344	0.632	0.217	0.222	0.258
S_{WKM}	0.374	0.530	0.307	0.176	0.376	0.676	0.217	0.107	0.102
$S_{WLG(TW)}$	0.271	0.396	0.220	0.143	0.335	0.552	0.217	0.162	0.160
$S_{WLG(PP)}$	0.050	0.073	0.054	0.051	0.087	0.065	0.115	0.417	0.566
$S_{WLG(P)}$	0.050	0.070	0.053	0.051	0.087	0.067	0.117	0.411	0.554

В случае альтернатив с одной точкой пересечения функций надежности на подавляющем большинстве альтернативных гипотез критерии Багдонавичуса-Никулина (обобщенная модель Кокса, однократные пересечения) имеют мощность, близкую к наибольшей. Кроме того, стоит выделить взвешенные логарифмические ранговые критерии (модификации Пето-Прентиса и Прентиса), которые в случае точки пересечения в ранние моменты времени также имеют статистическую мощность, близкую к наибольшей. Остальные критерии на большинстве альтернатив имеют мощность значительно ниже, чем отмеченные критерии.

Таблица 3.3 – Сравнительный анализ мощности критериев однородности для полных данных, $n_1 = n_2 = 200$ наблюдений, $H_{11} - H_{19}$

Критерий	Одна точка пересечения в <i>ранние</i> моменты времени			Одна точка пересечения в <i>средние</i> моменты времени			Одна точка пересечения в <i>поздние</i> моменты времени		
	H_{11}	H_{12}	H_{13}	H_{14}	H_{15}	H_{16}	H_{17}	H_{18}	H_{19}
MAX	0.249	0.099	0.400	0.197	0.403	0.153	0.513	0.243	0.400
S_{ADP}	0.185	0.099	0.165	0.078	0.403	0.091	0.333	0.203	0.400
S_{BN1}	0.178	0.070	0.338	0.173	0.323	0.137	0.482	0.212	0.305
S_{BN2}	0.141	0.067	0.259	0.133	0.258	0.108	0.378	0.166	0.245
S_{BN3}	0.197	0.075	0.357	0.176	0.390	0.153	0.513	0.243	0.338
S_{CM}	0.151	0.074	0.210	0.105	0.074	0.064	0.050	0.057	0.144
S_G	0.068	0.055	0.062	0.052	0.080	0.055	0.202	0.150	0.343
S_{KS}	0.103	0.074	0.101	0.066	0.156	0.073	0.258	0.160	0.293
S_{LR}	0.109	0.073	0.100	0.061	0.160	0.070	0.274	0.172	0.339
S_{LG}	0.153	0.076	0.203	0.104	0.073	0.064	0.047	0.057	0.146
S_P	0.064	0.058	0.062	0.053	0.078	0.056	0.204	0.151	0.345
S_Q	0.124	0.068	0.162	0.096	0.117	0.065	0.168	0.143	0.282
S_{WKM}	0.068	0.058	0.062	0.052	0.080	0.057	0.200	0.153	0.339
$S_{WLG(TW)}$	0.098	0.066	0.103	0.064	0.050	0.051	0.111	0.100	0.256
$S_{WLG(PP)}$	0.241	0.084	0.400	0.197	0.262	0.129	0.211	0.078	0.051
$S_{WLG(P)}$	0.249	0.086	0.395	0.193	0.264	0.127	0.207	0.080	0.051

В случае альтернатив с двумя точками пересечений функций надежности в случае точек пересечения в ранние и поздние моменты времени наибольшую мощность имеет критерий Багдонавичуса-Никулина (многократные пересечения), в средние и поздние моменты времени – Андерсона-Дарлинга-Петита. В случае точек пересечения в ранние и средние моменты времени статистические выводы не столь однозначны, однако мощность критериев Багдонавичуса-Никулина на всех парах конкурирующих гипотез ближе всего к соответствующим наибольшим значениям. Мощность остальных критериев значительно ниже, чем мощность отмеченных критериев.

Таблица 3.4 – Сравнительный анализ мощности критериев однородности для полных данных, $n_1 = n_2 = 200$ наблюдений, $H_{21} - H_{29}$

Критерий	Две точки пересечения в <i>ранние</i> и <i>средние</i> моменты времени			Две точки пересечения в <i>ранние</i> и <i>поздние</i> моменты времени			Две точки пересечения в <i>средние</i> и <i>поздние</i> моменты времени		
	H_{21}	H_{22}	H_{23}	H_{24}	H_{25}	H_{26}	H_{27}	H_{28}	H_{29}
MAX	0.150	0.218	0.403	0.275	0.142	0.380	0.769	0.279	0.830
S_{ADP}	0.088	0.218	0.120	0.197	0.087	0.198	0.769	0.279	0.830
S_{BN1}	0.084	0.100	0.393	0.086	0.055	0.158	0.137	0.057	0.179
S_{BN2}	0.150	0.091	0.308	0.275	0.142	0.380	0.451	0.267	0.493
S_{BN3}	0.065	0.102	0.393	0.056	0.055	0.098	0.259	0.052	0.334
S_{CM}	0.054	0.124	0.171	0.048	0.057	0.069	0.093	0.054	0.100
S_G	0.068	0.100	0.050	0.050	0.053	0.050	0.239	0.060	0.286
S_{KS}	0.091	0.083	0.088	0.129	0.092	0.115	0.559	0.138	0.626
S_{LR}	0.082	0.091	0.080	0.110	0.078	0.099	0.454	0.120	0.535
S_{LG}	0.054	0.124	0.171	0.049	0.056	0.066	0.095	0.054	0.098
S_P	0.068	0.096	0.052	0.051	0.053	0.050	0.238	0.058	0.282
S_Q	0.055	0.121	0.137	0.048	0.049	0.058	0.229	0.058	0.271
S_{WKM}	0.068	0.099	0.052	0.050	0.053	0.050	0.244	0.057	0.284
$S_{WLG(TW)}$	0.070	0.108	0.072	0.054	0.057	0.049	0.141	0.053	0.164
$S_{WLG(PP)}$	0.050	0.112	0.403	0.054	0.058	0.105	0.048	0.047	0.052
$S_{WLG(P)}$	0.049	0.113	0.397	0.050	0.058	0.102	0.050	0.048	0.055

3.2.2 Сравнительный анализ мощности критериев однородности в случае случайно цензурированных данных

С ростом степени цензурирования снижается доля информации о продолжительности полных экспериментов. Следовательно, рост степени цензурирования способен оказывать влияние на статистическую мощность критериев, и необходимо понимать насколько существенно это влияние. Поэтому требуется проведение сравнительного анализа мощности критериев однородности распределений в случае цензурированных данных.

Для осуществления такого сравнительного анализа статистической мощности критериев использованы альтернативные гипотезы $H_{01} - H_{29}$, объемы выборок $n_1 = n_2 = 200$ наблюдений, степени цензурирования выборок

$R(Z_1) = R(Z_2)$ от 10% до 50%, объем компьютерного моделирования $N = 150\,000$ повторений Монте-Карло, вероятность ошибки I-го рода $\alpha = 0.05$, законы распределения моментов цензурирования $F^C(t)$ с функциями плотностей $f_{We}(x; \mu, \lambda, \nu)$, $f_{\Gamma}(x; \mu, \lambda, \nu)$ и $f_{Exp}(x; \mu, \lambda)$.

Результаты сравнительного анализа мощности критериев однородности распределений в случае данных типа времени жизни представим в виде графиков 3.5-3.22 для степеней цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 10\%$ и $R(Z_1) = R(Z_2) = 50\%$. В приведенных графиках название критерия соответствует нижнему индексу названия статистики критерия, например, G соответствует нижнему индексу статистики критерия Гехана S_G и т.д. Кроме того, для каждой альтернативной гипотезы H будем выводить значение мощности для каждого закона распределения моментов цензурирования $F^C(t)$ с функциями плотностей $f_{We}(t; \bar{\theta})$, $f_{\Gamma}(t; \bar{\theta})$ и $f_{Exp}(t; \bar{\theta})$, где $\bar{\theta}$ – это вектор параметров соответствующего распределения.

Рассмотрим случай альтернативных гипотез $H_{01} - H_{03}$, которым соответствует тип альтернатив без точек пересечения функций надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ с наибольшими отклонениями в ранние моменты времени.

В случае степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 10\%$ на альтернативной гипотезе H_{01} наиболее мощными критериями являются критерий Багдонавичуса-Никулина (обобщенная модель Кокса), обобщенные критерии Уилкоксона (Гехан и Пето) и взвешенный критерий Каплана-Мейера; на альтернативе H_{02} – критерий Багдонавичуса-Никулина (многократные пересечения), обобщенные критерии Уилкоксона и взвешенный критерий Каплана-Мейера; на альтернативе H_{03} – критерий Багдонавичуса-Никулина (многократные пересечения). В случае степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 50\%$ список наиболее мощных критериев остается тем же за исключением критерия Пето.

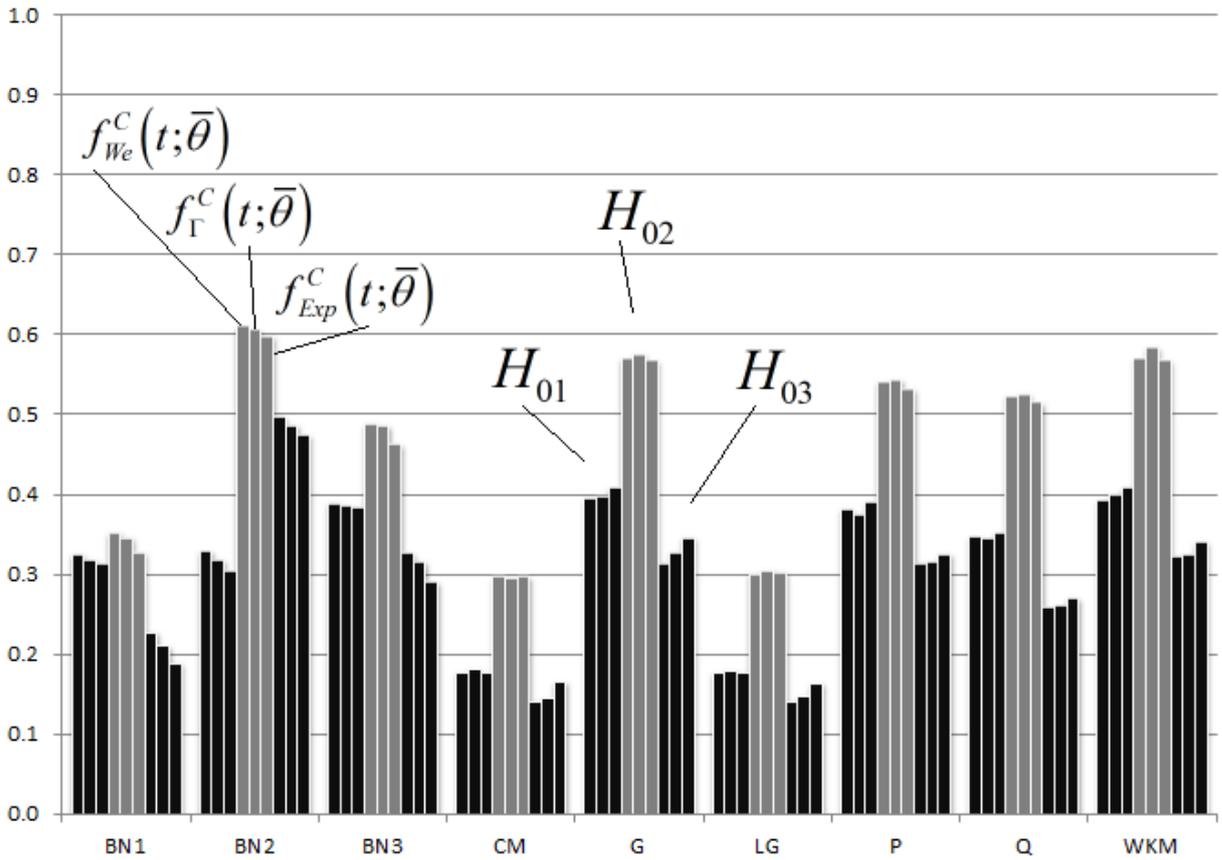


Рисунок 3.5 – Мощность критериев однородности на альтернативных гипотезах $H_{01} - H_{03}$, $R(Z_i) = 10\%$, $n_i = 200, \forall i$ для разных $F^C(t)$

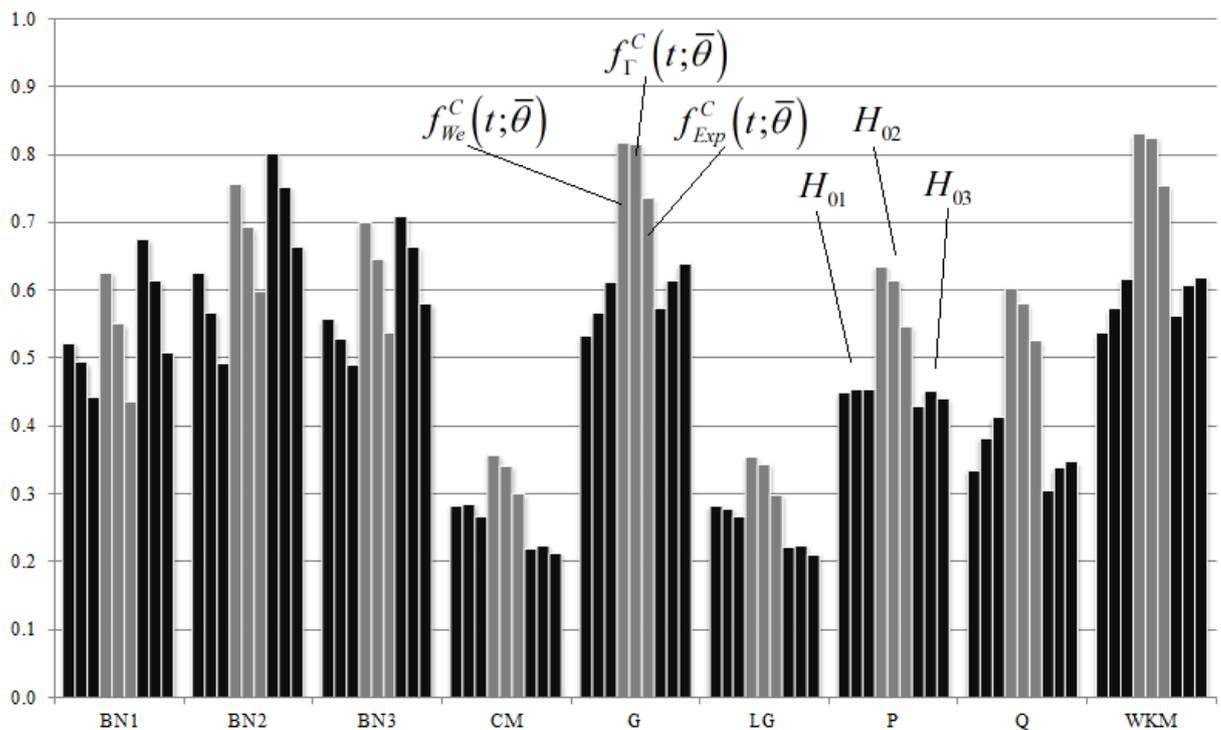


Рисунок 3.6 – Мощность критериев однородности на альтернативных гипотезах $H_{01} - H_{03}$, $R(Z_i) = 50\%$, $n_i = 200, \forall i$ для разных $F^C(t)$

Данный результат находит свое подтверждение с результатами, представленными в [120] о том, что обобщенные критерии Уилкоксона лучше определяют конкурирующие гипотезы с различиями в ранние моменты времени, чем логранковый критерий и критерий Кокса-Мантела.

Отметим, что с ростом степени цензурирования от 10% до 50% увеличивается мощность критериев. Данный факт объясняется следующим образом: в поздние моменты LT функции надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ слабо различимы, т.к. наибольшие отклонения между функциями надежности располагаются в ранние моменты времени ET , а в поздние моменты времени функции надежности почти совпадают. При росте степени цензурирования теряется информация в поздние моменты времени, т.к. вместо наблюдений X_i рассматривают интервалы $(C_i, +\infty)$. Поэтому с ростом степени цензурирования наиболее информативными являются наблюдения из области ранних моментов времени ET , где и сосредоточены наибольшие отклонения, что приводит к повышению статистической мощности критериев.

Рассмотрим случай альтернативных гипотез $H_{04} - H_{06}$, которым соответствует тип альтернатив без точек пересечения функций надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ с наибольшими отклонениями в средние моменты времени.

В случае степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 10\%$ на альтернативной гипотезе H_{04} более мощными критериями являются почти все рассматриваемые критерий однородности за исключением логарифмического рангового критерия и критерия Кокса-Мантела; на альтернативе H_{05} – обобщенные критерии Уилкоксона (Гехан и Пето), Q -критерий и взвешенный критерий Каплана-Мейера; на альтернативе H_{06} – критерий Багдонавичуса-Никулина (однократные пересечения), обобщенные критерии Уилкоксона, Q -критерий и взвешенный критерий Каплана-Мейера. В случае степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 50\%$ список наиболее мощных критериев принципиально не изменяется, однако мощность критериев становится выше.

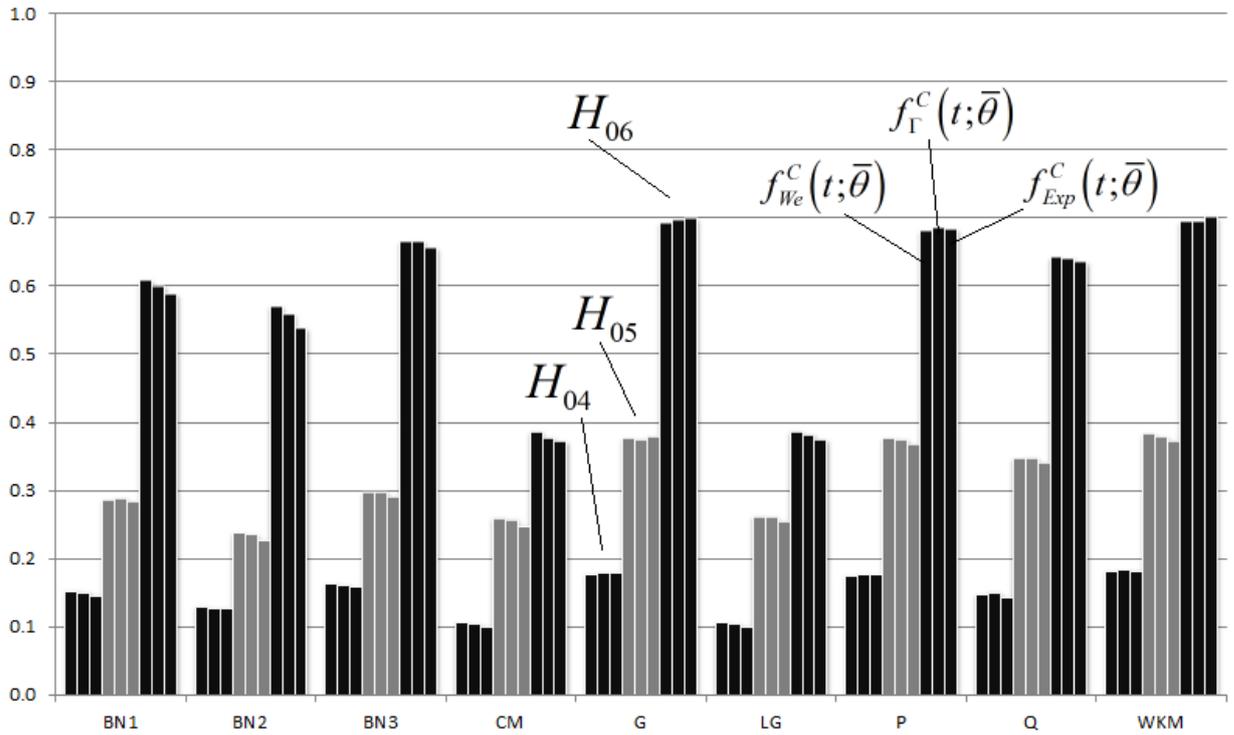


Рисунок 3.7 – Мощность критериев однородности на альтернативных гипотезах $H_{04} - H_{06}$, $R(Z_i) = 10\%$, $n_i = 200, \forall i$ для разных $F^C(t)$

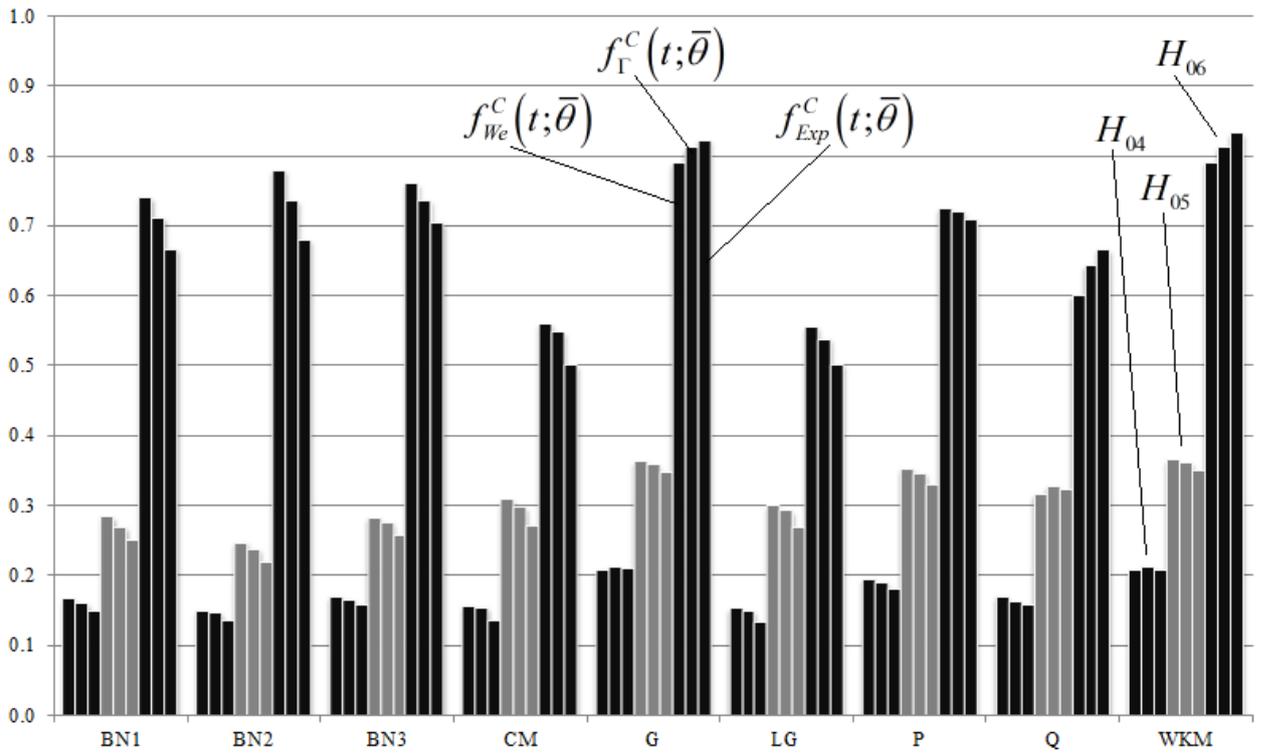


Рисунок 3.8 – Мощность критериев однородности на альтернативных гипотезах $H_{04} - H_{06}$, $R(Z_i) = 50\%$, $n_i = 200, \forall i$ для разных $F^C(t)$

Стоит отметить, что с ростом степени цензурирования от 10% до 50% произошло увеличение мощности критериев. Данный факт объясняется следующим образом: в поздние моменты LT функции надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ слабо различимы, т.к. наибольшие отклонения между функциями надежности располагаются в средние моменты времени MT , а в поздние моменты времени функции надежности почти совпадают. При росте степени цензурирования теряется информация в поздние моменты времени, т.к. вместо наблюдений X_i рассматривают интервалы $(C_i, +\infty)$. Поэтому с ростом степени цензурирования наиболее информативными для определения различий между функциями надежности являются наблюдения из области ранних ET и средних MT моментов времени, где и сосредоточены наибольшие отклонения, что приводит к повышению статистической мощности критериев.

Рассмотрим случай альтернативных гипотез $H_{07} - H_{09}$, которым соответствует тип альтернатив без точек пересечения функций надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ с наибольшими отклонениями в поздние моменты времени.

В случае степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 10\%$ на альтернативной гипотезе H_{07} более мощными критериями являются обобщенные критерии Уилкоксона (Гехана и Пето), логранковый критерий, критерий Кокса-Мантела, Q -критерий и взвешенный критерий Каплана-Мейера; на альтернативе H_{08} – критерии Багдонавичуса-Никулина; на альтернативе H_{09} – критерии Багдонавичуса-Никулина (обобщенная модель Кокса, многократные пересечения). В случае степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 50\%$ все критерии однородности плохо различают пару конкурирующих гипотез с наибольшими отклонениями в поздние моменты времени, мощности критериев приблизительно равны.

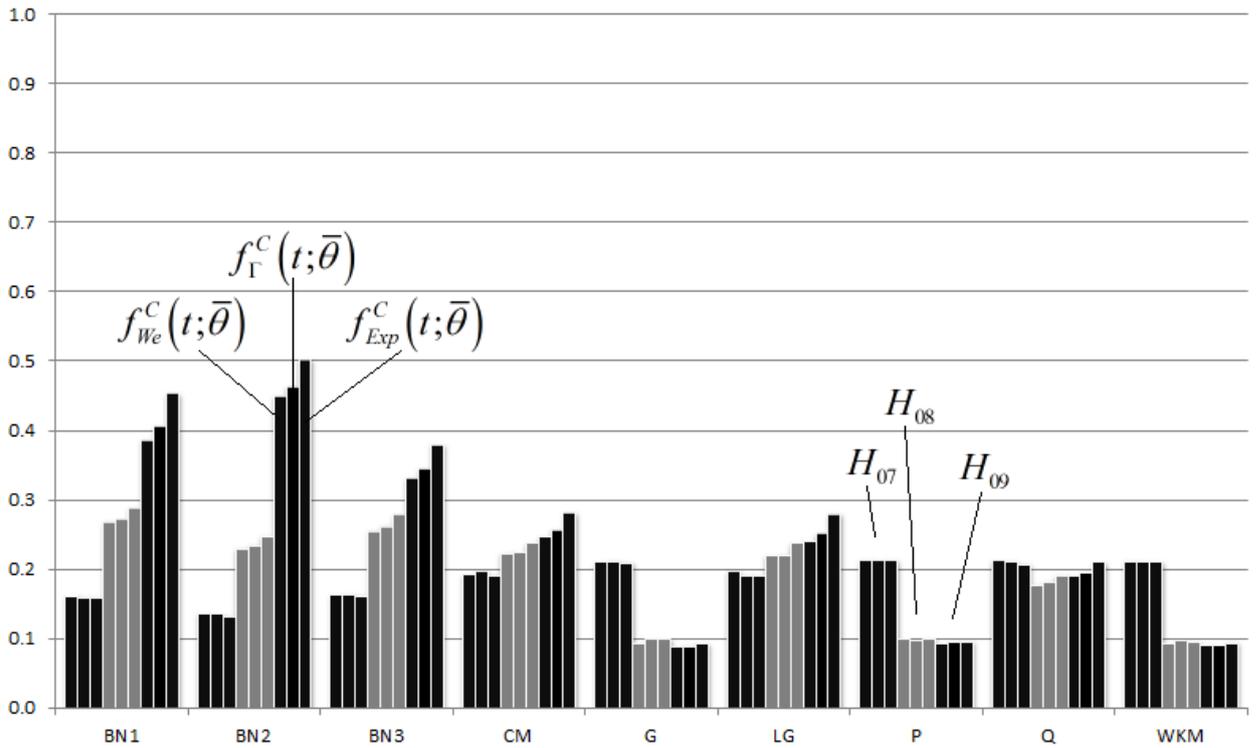


Рисунок 3.9 – Мощность критериев однородности на альтернативных гипотезах $H_{07} - H_{09}$, $R(Z_i) = 10\%$, $n_i = 200, \forall i$ для разных $F^C(t)$

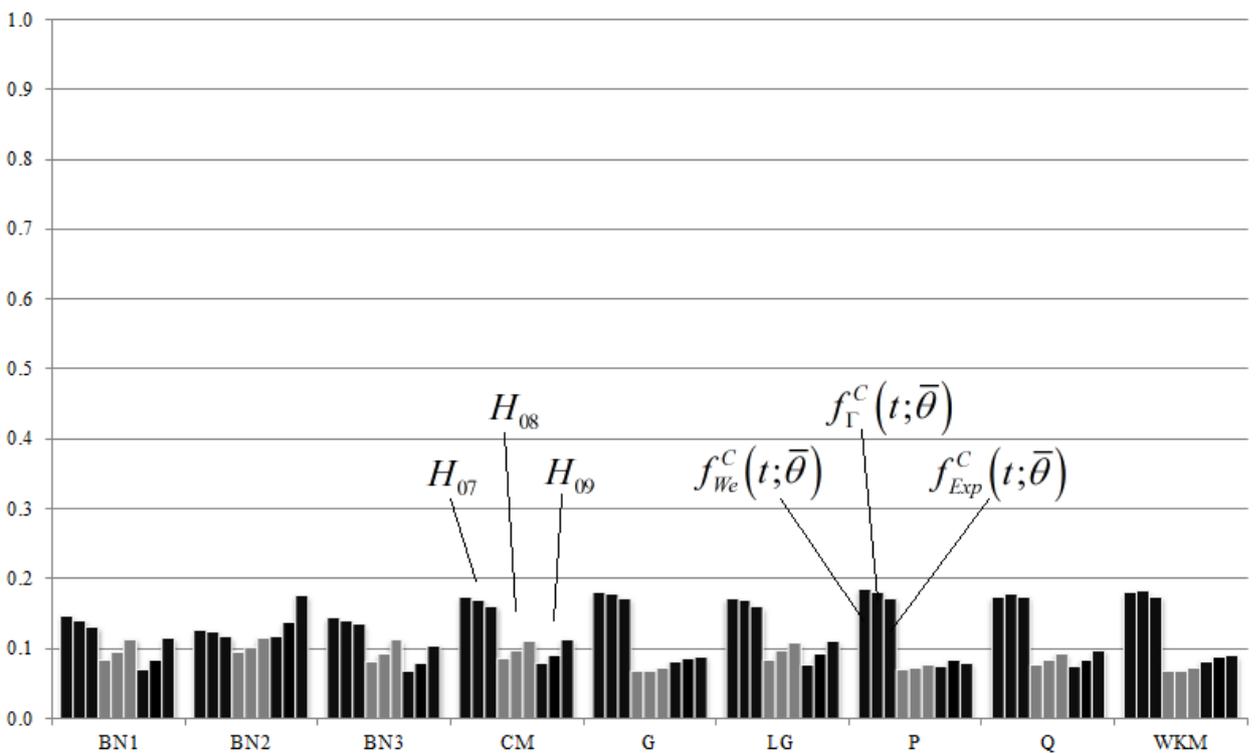


Рисунок 3.10 – Мощность критериев однородности на альтернативных гипотезах $H_{07} - H_{09}$, $R(Z_i) = 50\%$, $n_i = 200, \forall i$ для разных $F^C(t)$

Данный результат находит свое подтверждение с результатами, представленными в [120] о том, что логранговый критерий и критерий Кокса-Мантела лучше определяют конкурирующие гипотезы с различиями в поздние моменты времени, чем обобщенные критерии Уилкоксона.

Стоит отметить, что с ростом степени цензурирования от 10% до 50% произошло снижение мощности критериев. Данный факт объясняется следующим образом: в поздние моменты LT функции надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ хорошо различимы, т.к. наибольшие отклонения между функциями надежности располагаются именно в этой области. При росте степени цензурирования теряется информация в поздние моменты времени, т.к. вместо наблюдений X_i рассматривают интервалы $(C_i, +\infty)$. Поэтому с ростом степени цензурирования теряются наиболее информативные наблюдения, содержащие информацию о различиях, что приводит к снижению статистической мощности критериев.

Рассмотрим случай альтернативных гипотез $H_{11} - H_{13}$, которым соответствует тип альтернатив с точкой пересечения функций надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ в ранние моменты времени.

В случае степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 10\%$ на альтернативной гипотезе H_{11} более мощными критериями являются критерии Багдонавичуса-Никулина, логранговый критерий и критерий Кокса-Мантела; на альтернативе H_{12} – все критерии очень плохо различают пару таких конкурирующих гипотез (мощность близка к вероятности ошибки I-го рода α); на альтернативе H_{13} – критерии Багдонавичуса-Никулина, логранговый критерий и критерий Кокса-Мантела. В случае степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 50\%$ все критерии однородности плохо различают пару конкурирующих гипотез с точкой пересечения в ранние моменты времени (мощности приблизительно равны вероятности ошибки I-го рода α) за исключением критериев Багдонавичуса-Никулина.

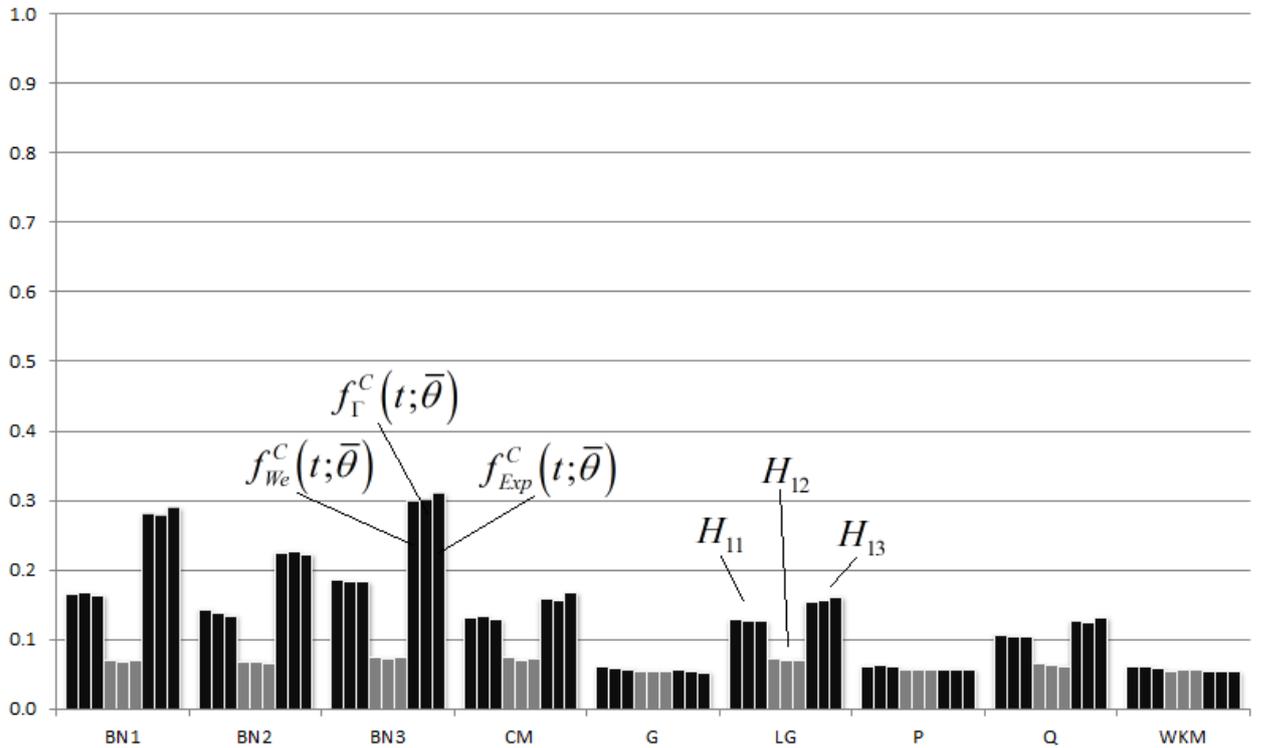


Рисунок 3.11 – Мощность критериев однородности на альтернативных гипотезах $H_{11} - H_{13}$, $R(Z_i) = 10\%$, $n_i = 200, \forall i$ для разных $F^C(t)$

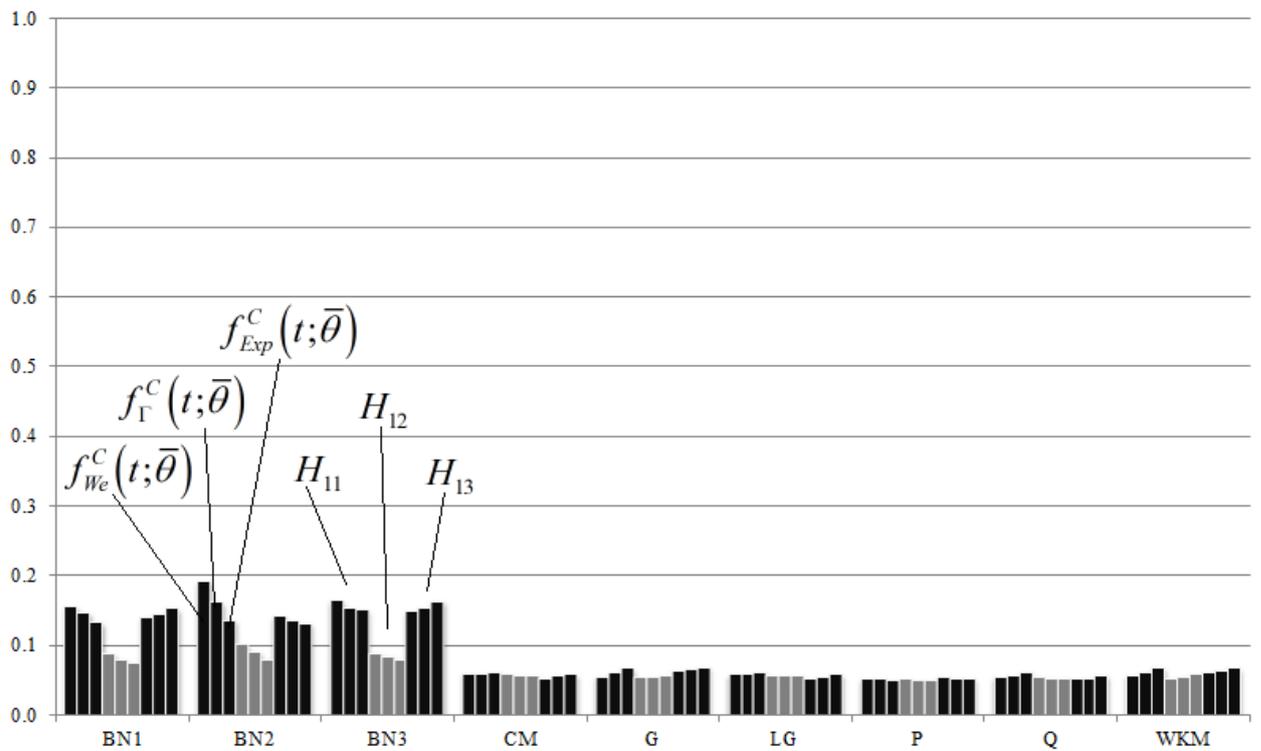


Рисунок 3.12 – Мощность критериев однородности на альтернативных гипотезах $H_{11} - H_{13}$, $R(Z_i) = 50\%$, $n_i = 200, \forall i$ для разных $F^C(t)$

Стоит отметить, что с ростом степени цензурирования от 10% до 50% произошло снижение мощности критериев. Данный факт объясняется следующим образом: в области точки пересечения различия между функциями надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ из-за своей близости плохо различимы, следовательно, область наибольших отклонений между $S_1(t)$ и $S_2(t)$ находится в более поздние моменты времени (средние и поздние моменты времени). С ростом степени цензурирования полных наблюдений в средние и поздние моменты времени становится меньше, что приводит к снижению статистической мощности критериев.

Рассмотрим случай альтернативных гипотез $H_{14} - H_{16}$, которым соответствует тип альтернатив с точкой пересечения функций надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ в средние моменты времени.

В случае степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 10\%$ на альтернативной гипотезе H_{14} более мощными критериями являются критерии Багдонавичуса-Никулина; на альтернативе H_{15} – критерии Багдонавичуса-Никулина; на альтернативе H_{16} – критерии Багдонавичуса-Никулина. В случае степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 50\%$ наиболее мощными критериями являются критерии Багдонавичуса-Никулина, Гехан и взвешенный критерий Каплана-Мейера.

Стоит отметить, что с ростом степени цензурирования от 10% до 50% произошло повышение мощности критериев (очень ярко этот факт проявляется на альтернативной гипотезе H_{15}). Данный факт объясняется следующим образом: в области точки пересечения из-за своей близости различия между функциями надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ плохо различимы, следовательно, область наибольших отклонений между $S_1(t)$ и $S_2(t)$ находится в ранние и поздние моменты времени. С ростом степени цензурирования полных наблюдений становится меньше в поздние моменты времени и в меньшей степени в ранние моменты времени.

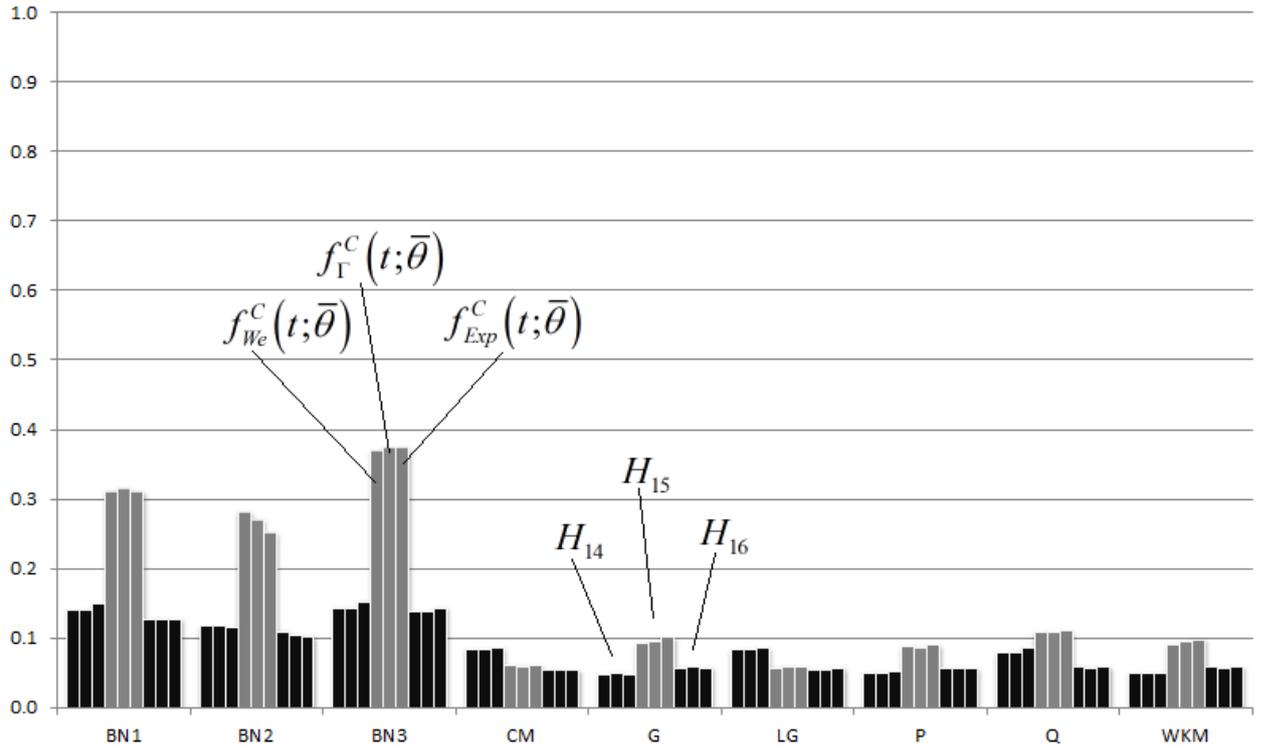


Рисунок 3.13 – Мощность критериев однородности на альтернативных гипотезах $H_{14} - H_{16}$, $R(Z_i) = 10\%$, $n_i = 200, \forall i$ для разных $F^C(t)$

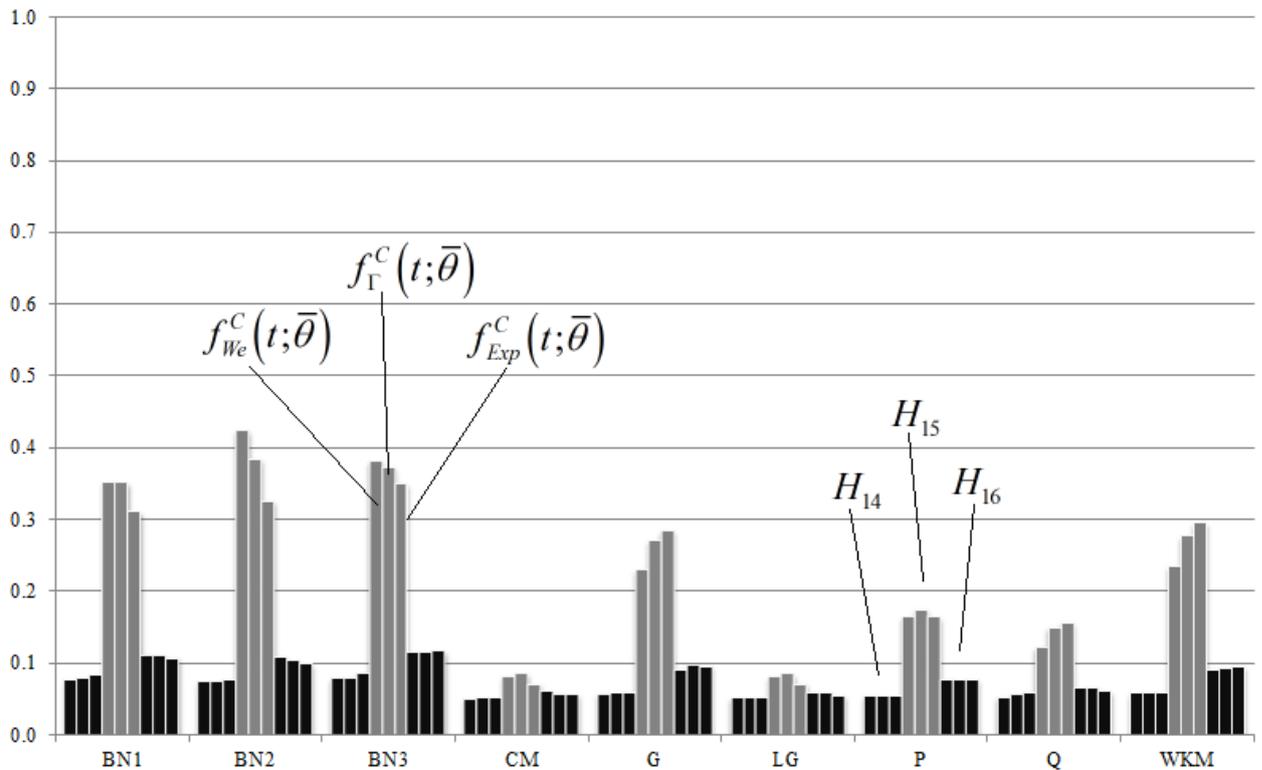


Рисунок 3.14 – Мощность критериев однородности на альтернативных гипотезах $H_{14} - H_{16}$, $R(Z_i) = 50\%$, $n_i = 200, \forall i$ для разных $F^C(t)$

Уменьшения доли полных наблюдений с информацией о различиях между функциями надежности в ранние моменты времени не происходит, а область средних и поздних моментов времени почти не учитывается (из-за высокой степени цензурирования), что приводит к повышению статистической мощности критериев.

Рассмотрим случай альтернативных гипотез $H_{17} - H_{19}$, которым соответствует тип альтернатив с точкой пересечения функций надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ в поздние моменты времени.

В случае степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 10\%$ на альтернативной гипотезе H_{17} более мощными критериями являются критерии Багдонавичуса-Никулина (обобщенная модель Кокса, однократные пересечения), также высокую мощность показали обобщенные критерии Уилкоксона (Гехана и Пето) и взвешенный критерий Каплана-Мейера; на альтернативе H_{18} – критерии Багдонавичуса-Никулина (обобщенная модель Кокса, однократные пересечения); на альтернативе H_{19} – критерии Багдонавичуса-Никулина (обобщенная модель Кокса, однократные пересечения), обобщенные критерии Уилкоксона, Q -критерий и взвешенный критерий Каплана-Мейера. В случае степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 50\%$ мощности критериев приблизительно равны, кроме логарифмического рангового критерия и критерия Кокса-Мантела, чьи мощности ниже.

Стоит отметить, что с ростом степени цензурирования от 10% до 50% произошло как снижение, так и повышение мощности критериев. Снизилась мощность критериев Багдонавичуса-Никулина, но увеличилась мощность всех остальных критериев. Данный факт объясняется следующим образом: в области точки пересечения (поздние моменты времени) различия между функциями надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ из-за своей близости плохо различимы, следовательно, область наибольших отклонений между $S_1(t)$ и $S_2(t)$ находится в более ранние моменты времени (средние и ранние моменты времени).

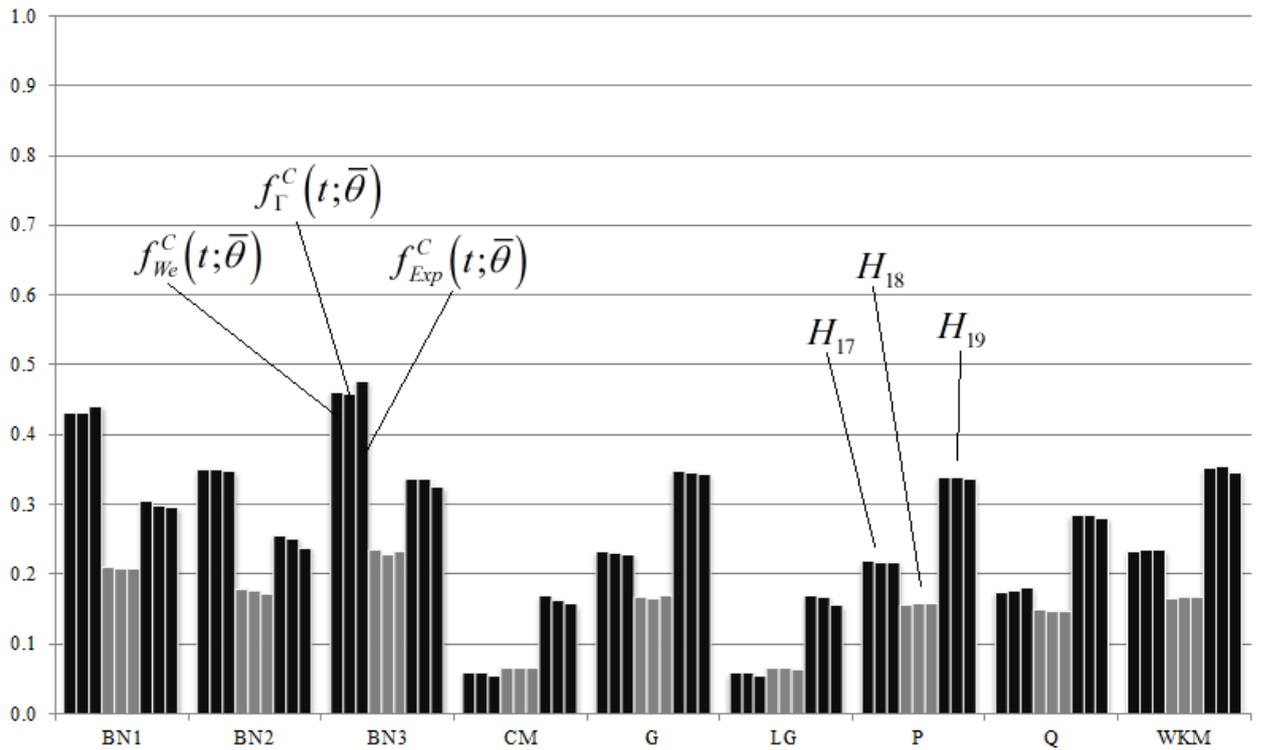


Рисунок 3.15 – Мощность критериев однородности на альтернативных гипотезах $H_{17} - H_{19}$, $R(Z_i) = 10\%$, $n_i = 200, \forall i$ для разных $F^C(t)$

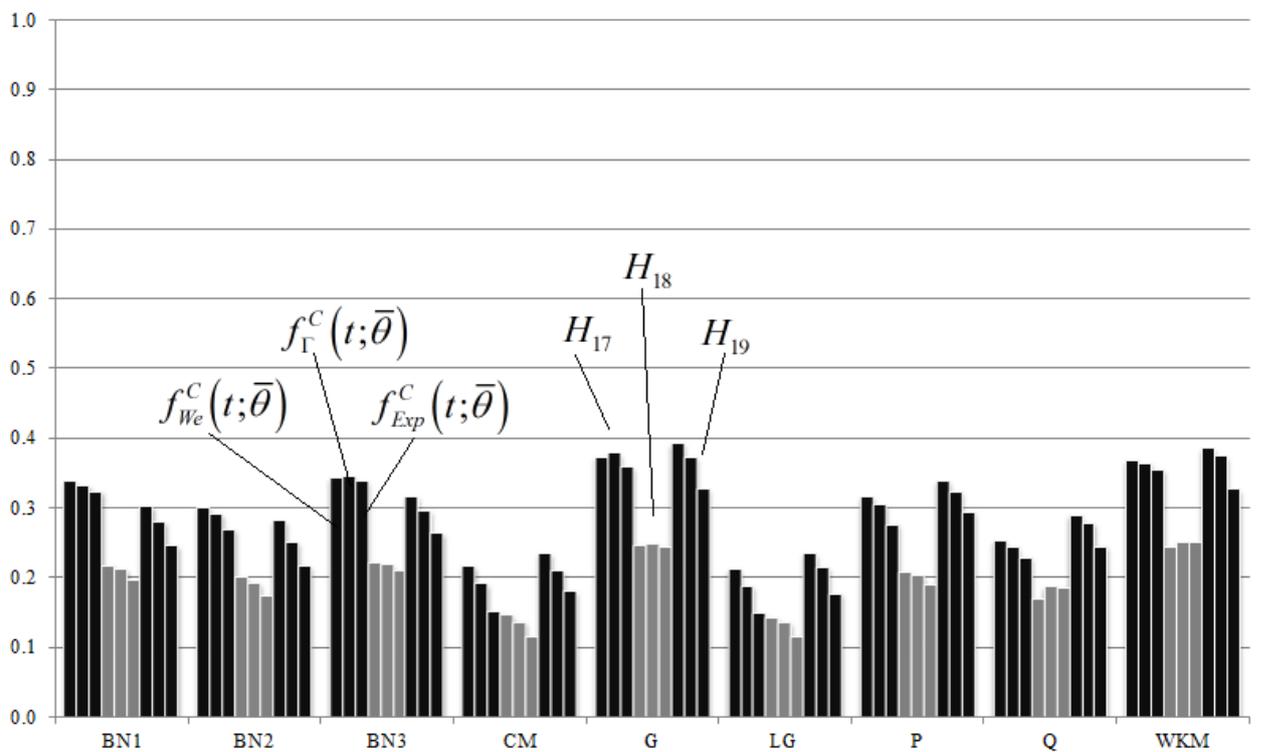


Рисунок 3.16 – Мощность критериев однородности на альтернативных гипотезах $H_{17} - H_{19}$, $R(Z_i) = 50\%$, $n_i = 200, \forall i$ для разных $F^C(t)$

С ростом степени цензурирования полных наблюдений в средние и поздние моменты времени становится меньше, что приводит к повышению мощности критериев, но в случае критериев Багдонавичуса-Никулина с ростом степени цензурирования происходит потеря информации о точке пересечения, что приводит к снижению мощности этих критериев.

Рассмотрим случай альтернативных гипотез $H_{21} - H_{23}$, которым соответствует тип альтернатив с двумя точками пересечений функций надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ в ранние и средние моменты времени.

В случае степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 10\%$ на альтернативной гипотезе H_{21} более мощным критерием является критерий Багдонавичуса-Никулина (многократные пересечения); на альтернативе H_{22} – все критерии показали приблизительно одинаковую мощность; на альтернативе H_{23} – критерии Багдонавичуса-Никулина с большим преимуществом. В случае степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 50\%$ мощности всех критериев упали приблизительно до величины вероятности ошибки I-го рода α , за исключением критериев Багдонавичуса-Никулина.

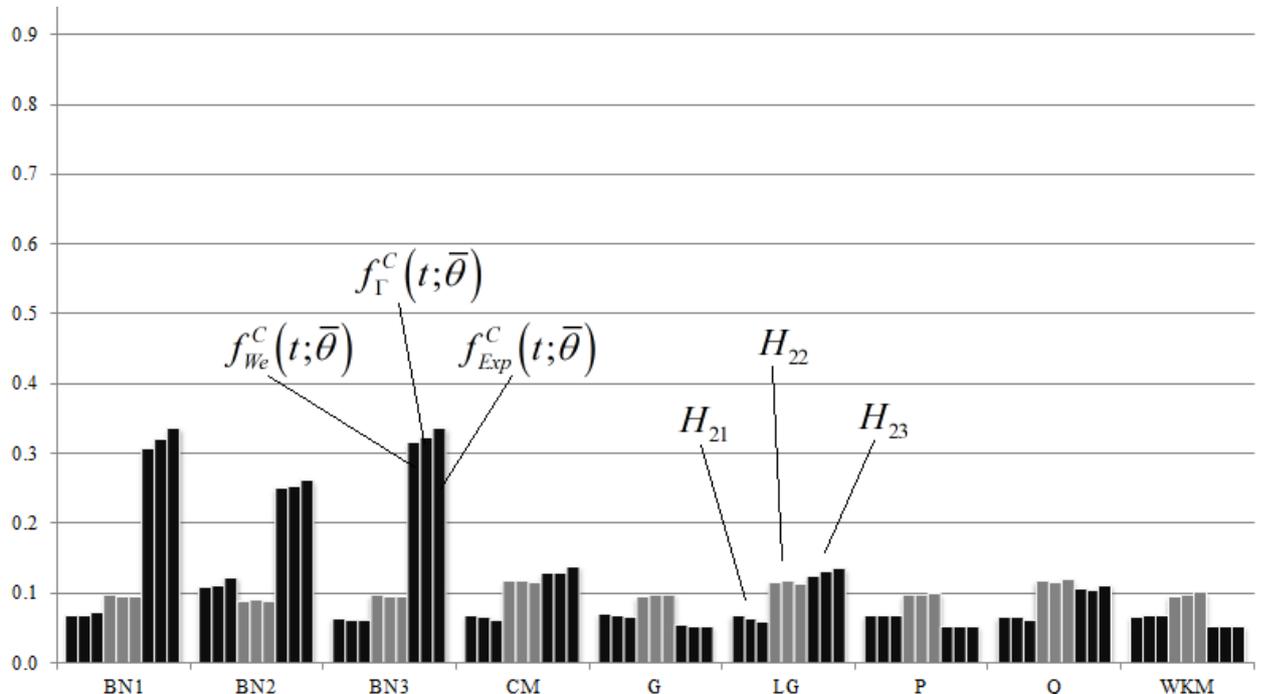


Рисунок 3.17 – Мощность критериев однородности на альтернативных гипотезах $H_{21} - H_{23}$, $R(Z_i) = 10\%$, $n_i = 200, \forall i$ для разных $F^C(t)$

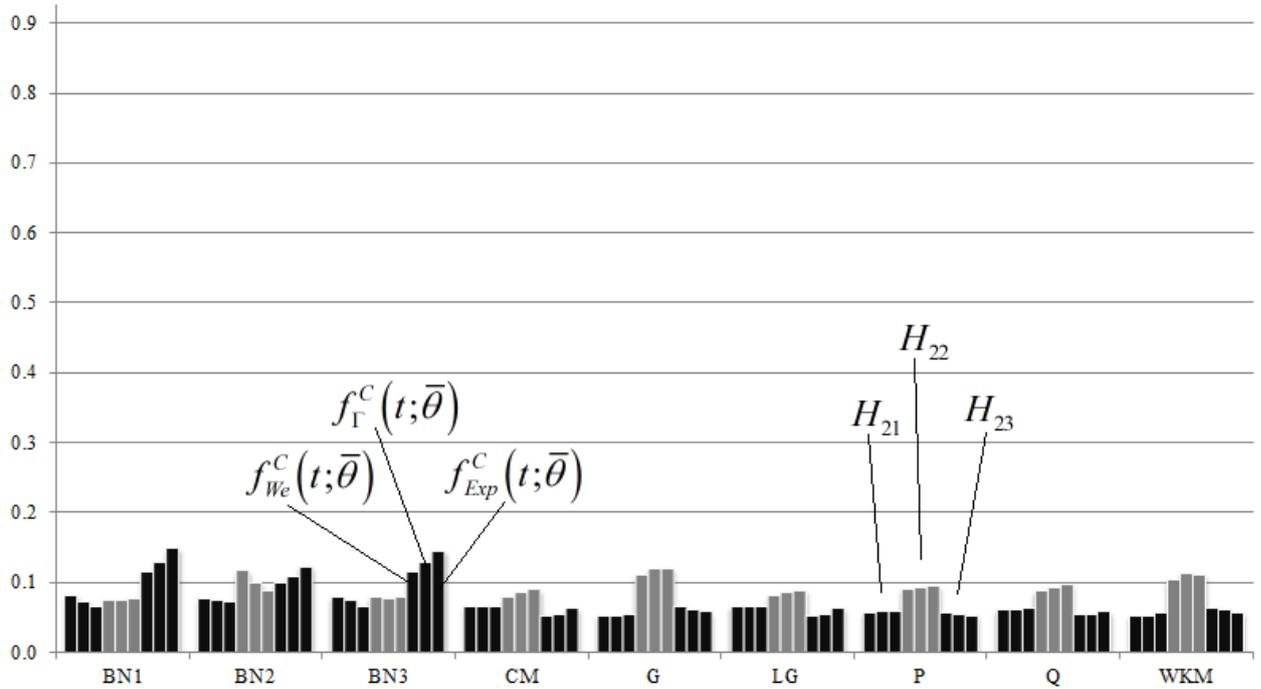


Рисунок 3.18 – Мощность критериев однородности на альтернативных гипотезах $H_{21} - H_{23}$, $R(Z_i) = 50\%$, $n_i = 200, \forall i$ для разных $F^C(t)$

Стоит отметить тот факт, что с ростом степени цензурирования от 10% до 50% произошло снижение мощности критериев. Данный факт объясняется следующим образом: в областях точек пересечений различия между функциями надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ из-за своей близости плохо различимы, следовательно, область наибольших отклонений между $S_1(t)$ и $S_2(t)$ находится в области поздних моментов времени. С ростом степени цензурирования полных наблюдений в средние и поздние моменты времени становится меньше, поэтому количество полных наблюдений в области наибольших отклонений уменьшается, что приводит к снижению мощности критериев.

Рассмотрим случай альтернативных гипотез $H_{24} - H_{26}$, которым соответствует тип альтернатив с двумя точками пересечений функций надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ в ранние и поздние моменты времени.

В случае степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 10\%$ на альтернативной гипотезе H_{24} более мощным критерием является критерий Багдонавичуса-Никулина (многократные пересечения); на альтернативе H_{25} – критерий

Багдонавичуса-Никулина (многократные пересечения); на альтернативе H_{26} – критерий Багдонавичуса-Никулина (многократные пересечения). Мощности всех остальных критериев близки к значению вероятности ошибки I-го рода α . В случае степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 50\%$ наиболее мощным критерием также является критерий Багдонавичуса-Никулина (многократные пересечения). Мощности всех остальных критериев близки к значению вероятности ошибки I-го рода α .

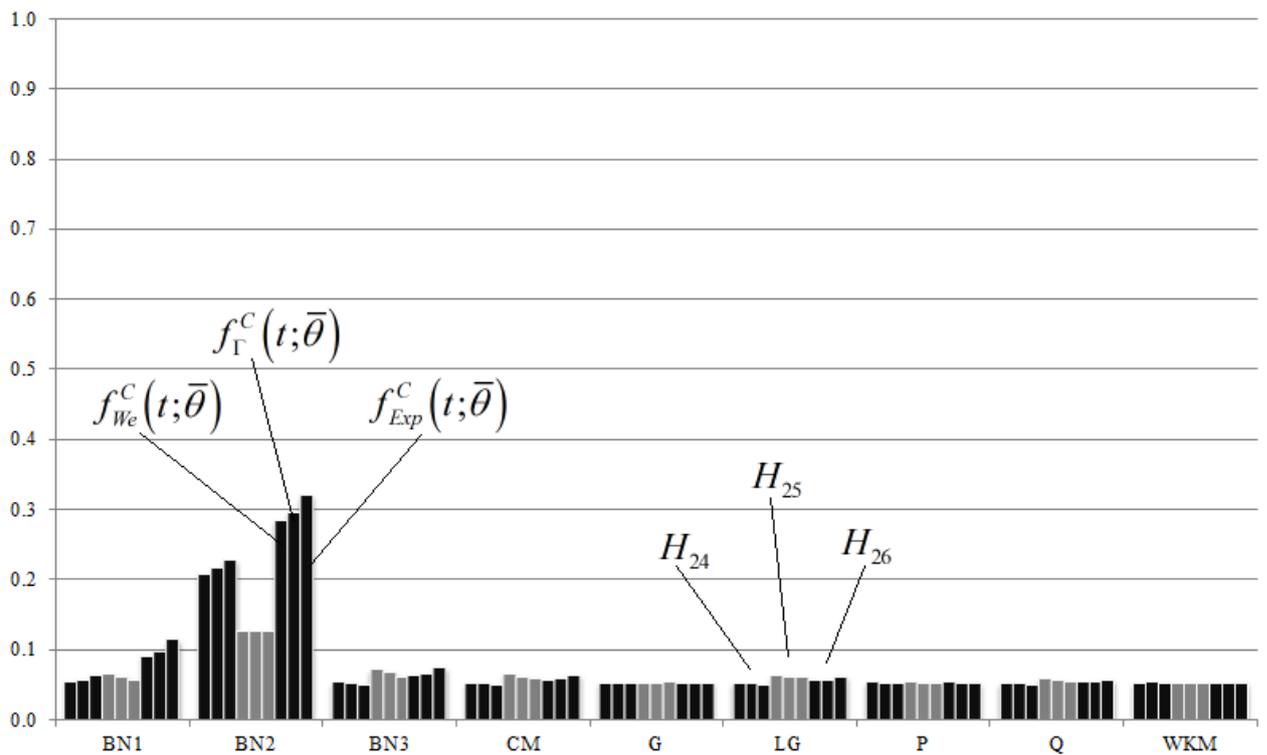


Рисунок 3.19 – Мощность критериев однородности на альтернативных гипотезах $H_{24} - H_{26}$, $R(Z_i) = 10\%$, $n_i = 200, \forall i$ для разных $F^C(t)$

Рассмотрим случай альтернативных гипотез $H_{27} - H_{29}$, которым соответствует тип альтернатив с двумя точками пересечений функций надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ в средние и поздние моменты времени.

В случае степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 10\%$ на альтернативной гипотезе H_{27} наиболее мощным критерием является критерий Багдонавичуса-Никулина (многократные пересечения); на альтернативе H_{28} – критерий Багдонавичуса-Никулина (многократные пересечения); на альтернативе H_{29} –

критерии Багдонавичуса-Никулина (многократные пересечения, однократные пересечения). В случае степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 50\%$ наиболее мощными критериями являются критерии Багдонавичуса-Никулина, критерий Гехана и взвешенный критерий Каплана-Мейера.

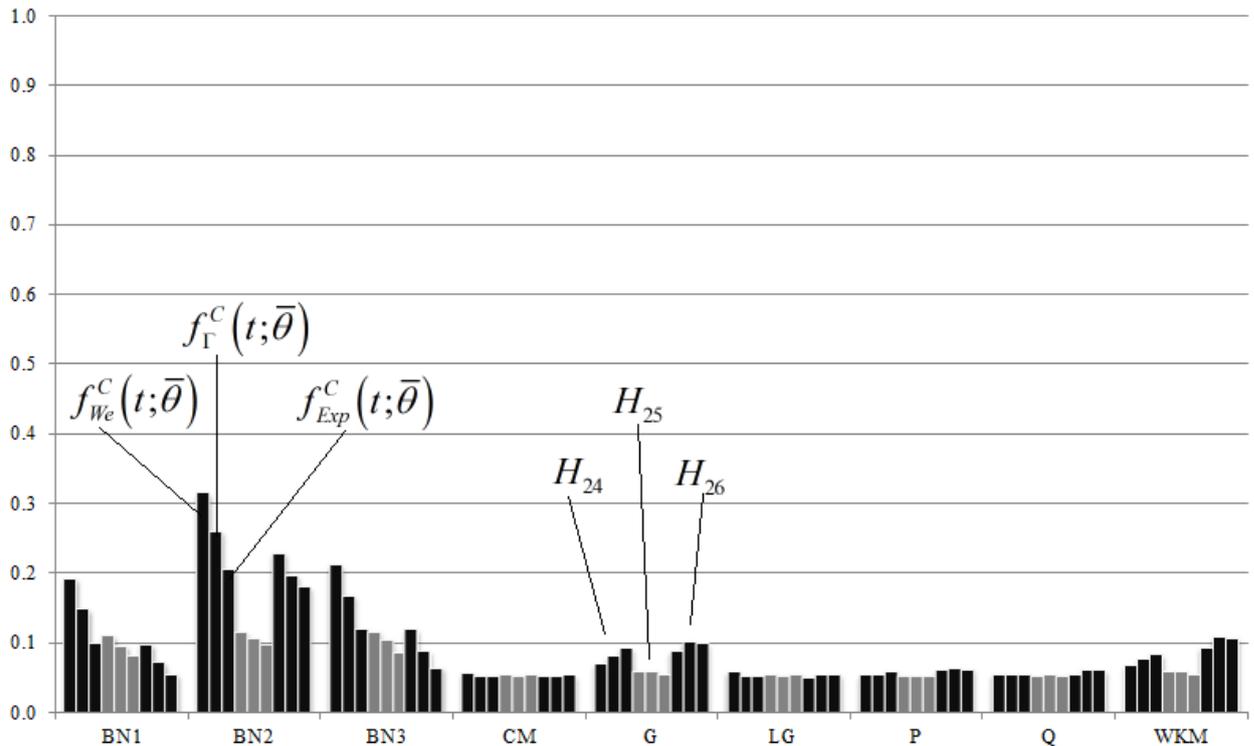


Рисунок 3.20 – Мощность критериев однородности на альтернативных гипотезах $H_{24} - H_{26}$, $R(Z_i) = 50\%$, $n_i = 200, \forall i$ для разных $F^C(t)$

Стоит отметить, что с ростом степени цензурирования от 10% до 50% произошло увеличение мощности критериев. Данный факт объясняется следующим образом: в области точек пересечений различия между функциями надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ из-за своей близости плохо различимы, следовательно, область наибольших отклонений между $S_1(t)$ и $S_2(t)$ находится в области ранних моментов времени. С ростом степени цензурирования полных наблюдений средние и поздние моменты времени становится меньше, что приводит к повышению статистической мощности критериев.

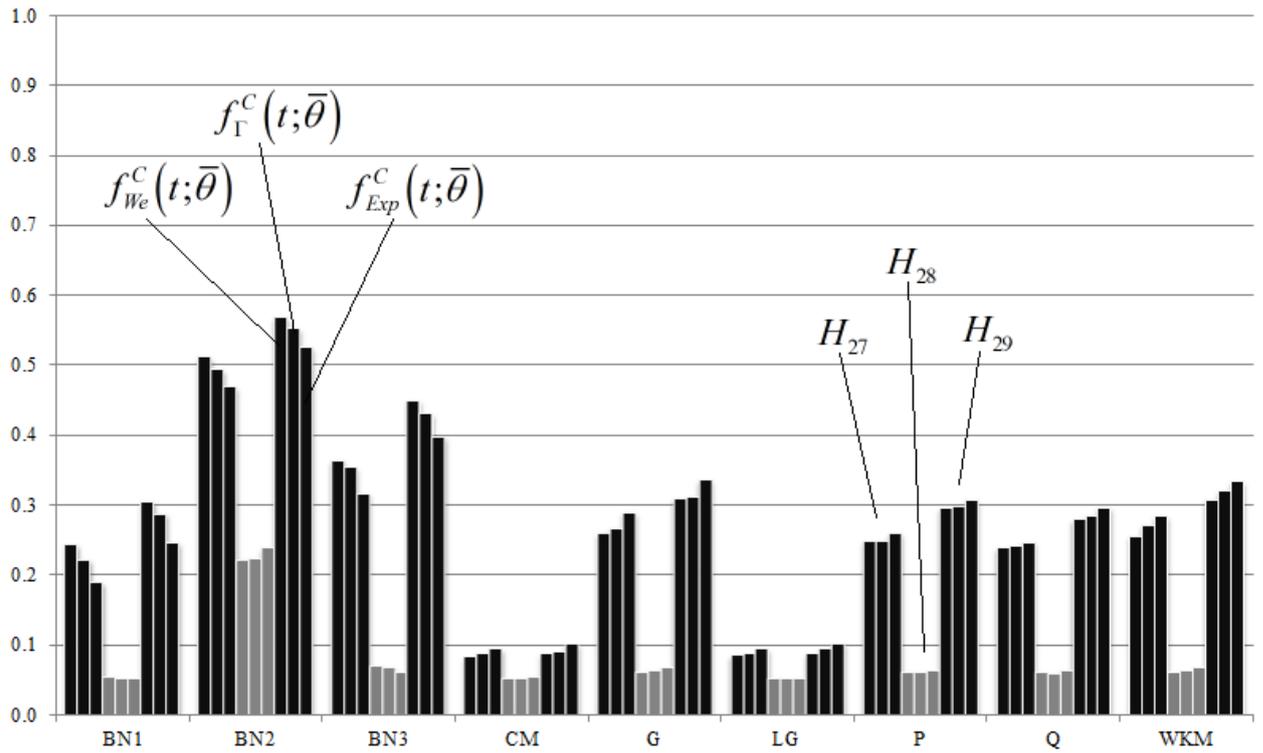


Рисунок 3.21 – Мощность критериев однородности на альтернативных гипотезах $H_{27} - H_{29}$, $R(Z_i) = 10\%$, $n_i = 200, \forall i$ для разных $F^C(t)$

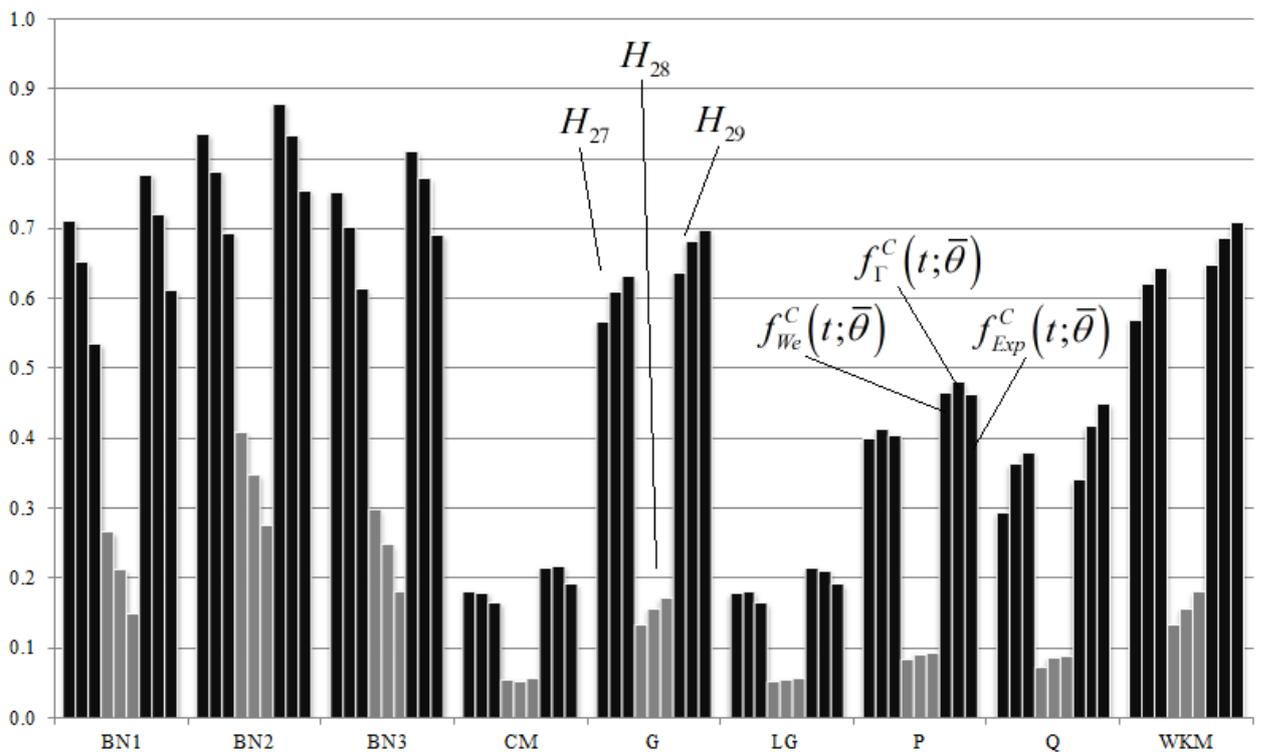


Рисунок 3.22 – Мощность критериев однородности на альтернативных гипотезах $H_{27} - H_{29}$, $R(Z_i) = 50\%$, $n_i = 200, \forall i$ для разных $F^C(t)$

Таким образом, по результатам сравнительного анализа статистической мощности получены результаты поведения функции мощности статистических критериев в зависимости от альтернативной гипотезы для фиксированного объема выборок. Благодаря сравнительному анализу мощности получено, что многие статистические критерии очень плохо различают конкурирующие гипотезы с одной точкой пересечений (в ранние или средние моменты времени) и двумя точками пересечений (в ранние и средние моменты времени или в ранние и поздние моменты времени). При выборе статистического критерия для осуществления корректного анализа данных необходимо учитывать характер типа альтернативной гипотезы.

3.2.3 Влияние разных объемов выборок на мощность критериев

Далеко не всегда при анализе данных исследуемые выборки имеют одинаковые объемы выборок, поэтому важно понимать, как функция мощности критериев зависит от объемов выборок n_1, n_2 . Для этого произведем сравнительный анализ мощности критериев со статистиками S_G , S_{BN1} и S_{LG} на альтернативах H_{01} (0 пересечений), H_{19} (1 пересечение) и H_{27} (2 пересечения) при фиксированном суммарном объеме наблюдений $n_1 + n_2 = 400$, степени цензурирования 0%-50% при $f_{we}^C(t; \bar{\theta})$, объем компьютерного моделирования $N = 150\,000$ повторений, вероятность ошибки I-го рода $\alpha = 0.05$. Результаты представим на рисунках 3.23-3.25.

Очевидно, что прослеживается следующая закономерность: для всех пар рассматриваемых объемов выборок таких, что $n_1 + n_2 = const$, наибольшая мощность критериев достигается в случае равенства объемов выборок, т.е. при $n_1 = n_2$. Этот факт нашел подтверждение на рассмотренных альтернативных гипотезах (H_{01}, H_{19} и H_{27}) и степенях цензурирования (0%-50%) при законе распределения моментов цензурирования $F^C(t)$ с функцией плотности $f_{we}^C(t; \bar{\theta})$.

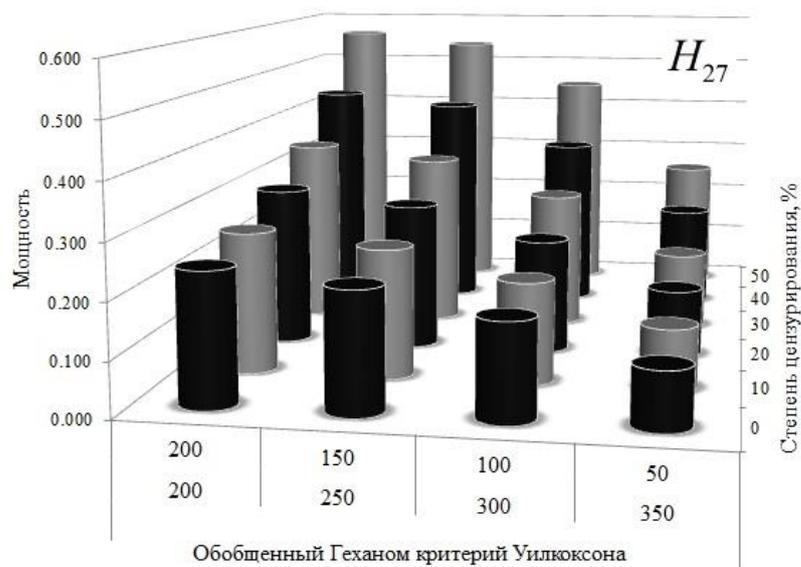
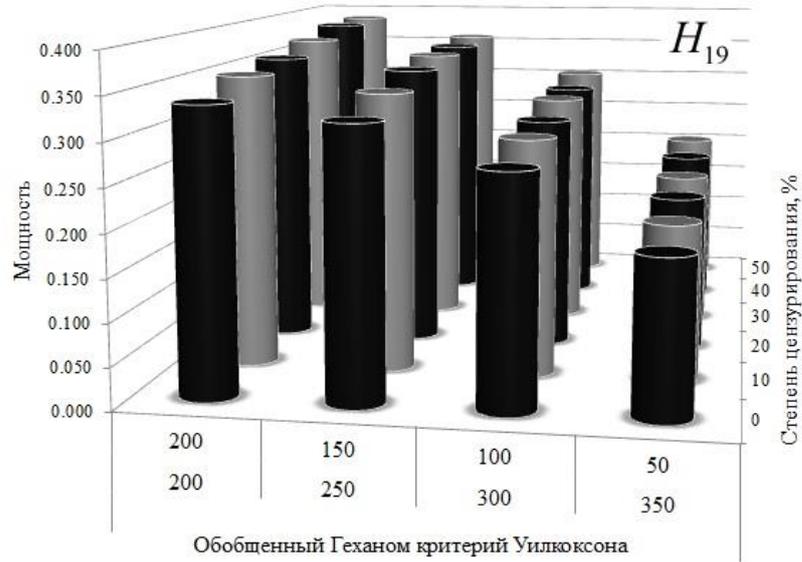
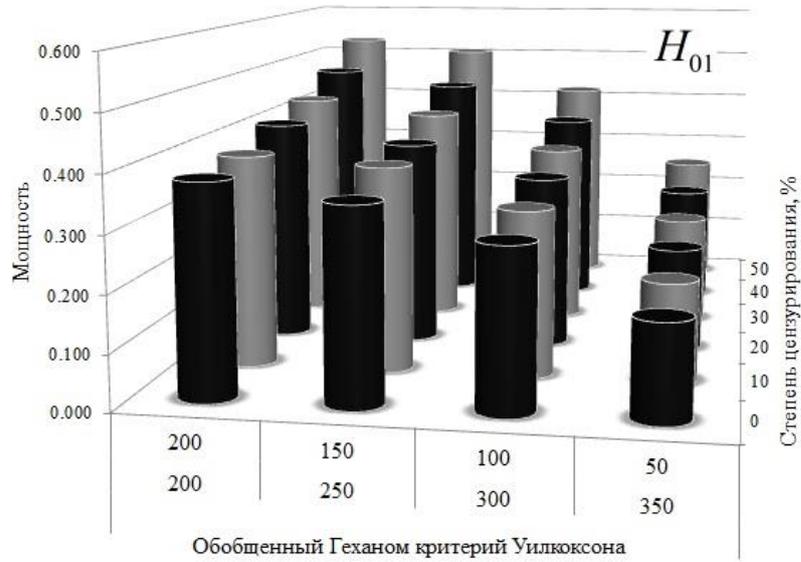


Рисунок 3.23 – Мощность критерия Гехана для разного объема выборок n_1, n_2 при фиксированном суммарном объеме $n_1 + n_2 = 400$

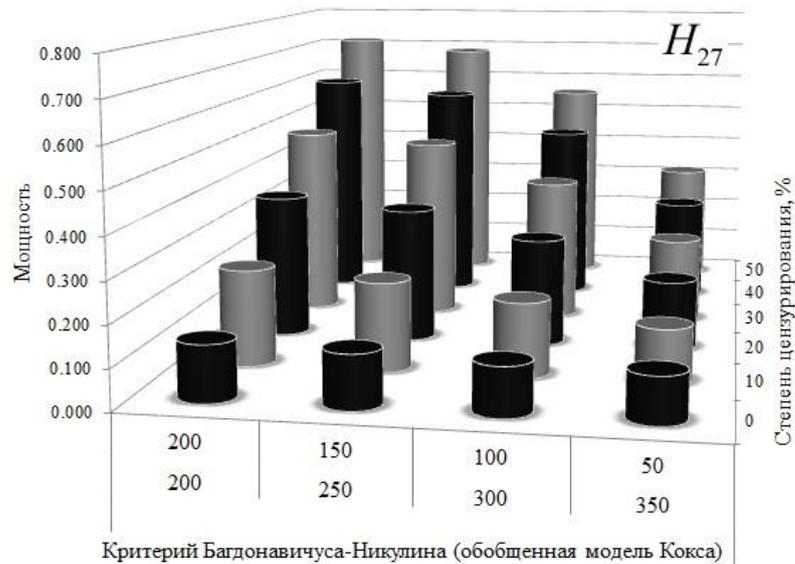
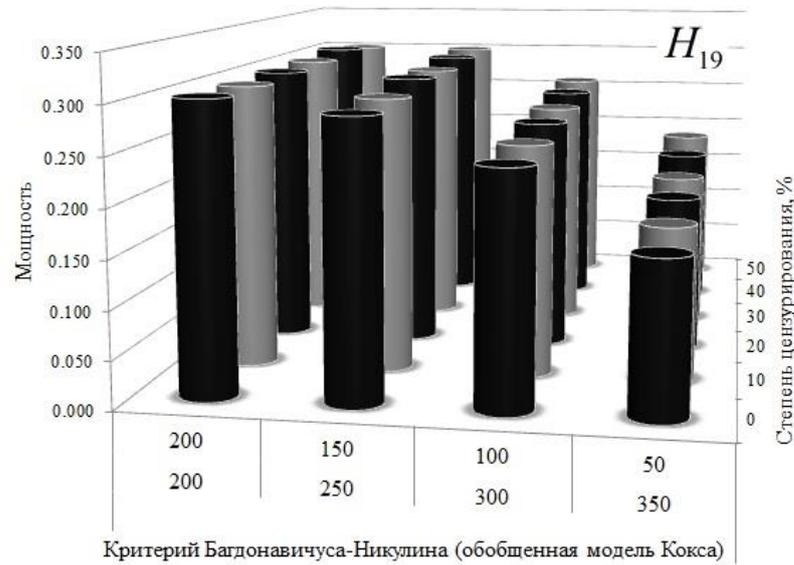
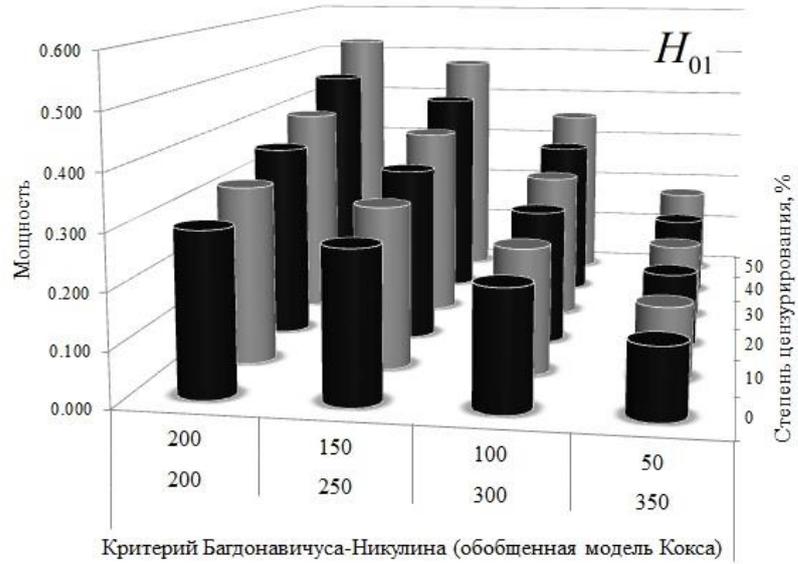


Рисунок 3.24 – Мощность критерия Багдонавичуса-Никулина для разного объема выборок n_1, n_2 при фиксированном суммарном объеме $n_1 + n_2 = 400$

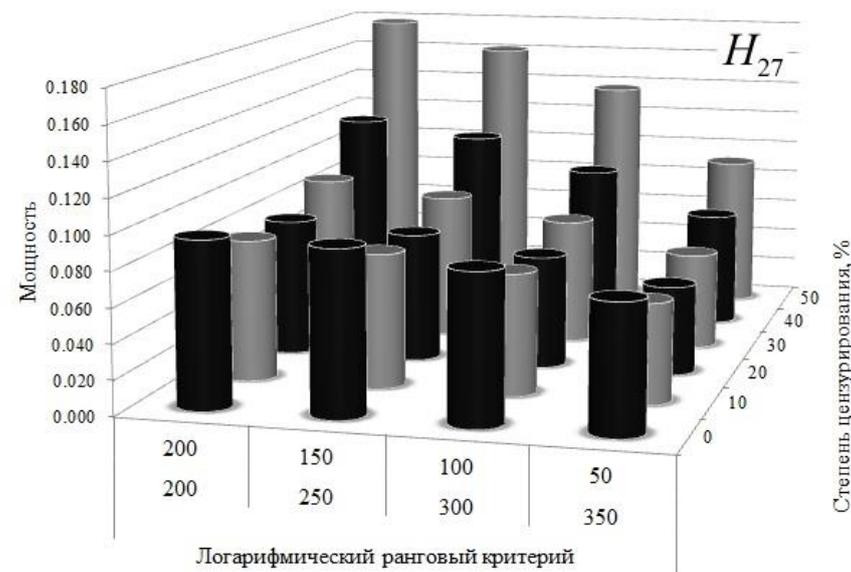
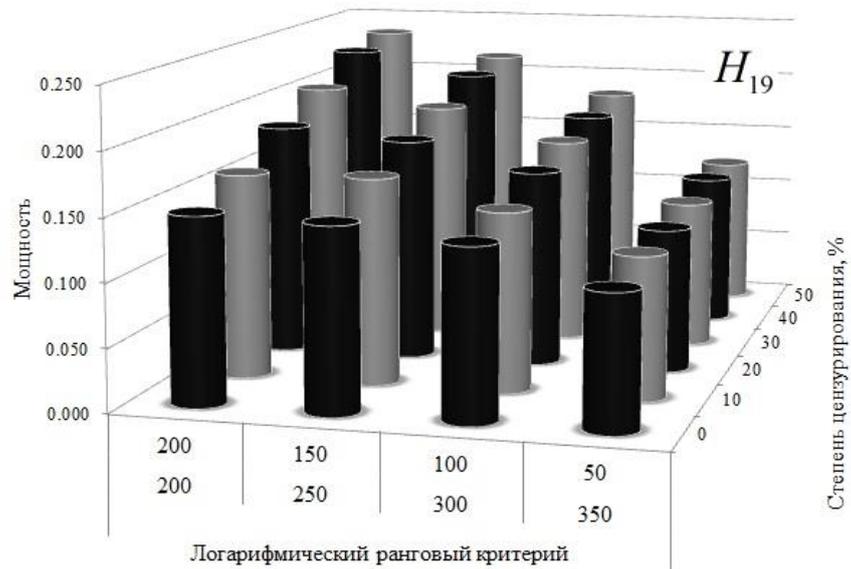
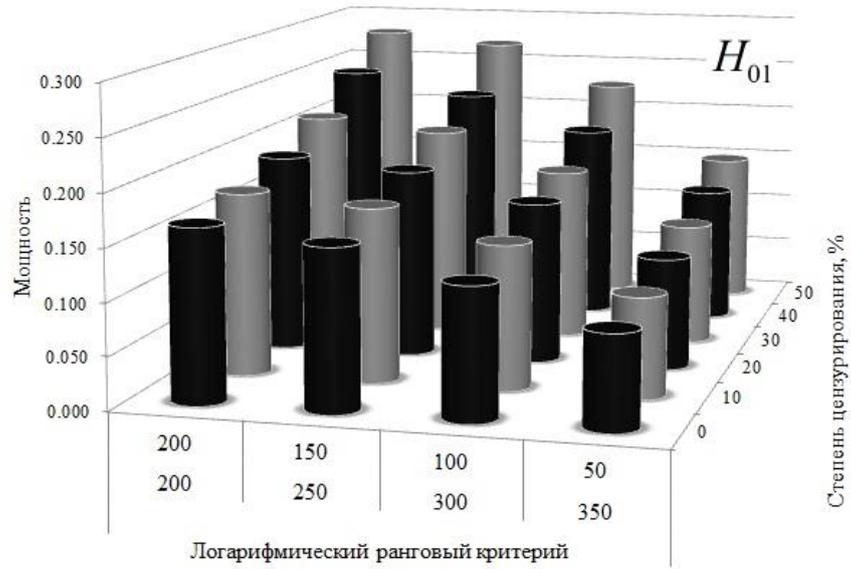


Рисунок 3.25 – Мощность логарифмического рангового критерия для разного объема выборок n_1, n_2 при фиксированном суммарном объеме $n_1 + n_2 = 400$

Данный результат является важным на этапе планирования эксперимента при последующем анализе данных и исследовании статистических закономерностей.

3.2.4 Влияние разных степеней цензурирования выборок на мощность критериев

Для определения влияния степени цензурирования на мощность критериев однородности проведем сравнительный анализ мощности для критериев Багдонавичуса-Никулина S_{BN1} и взвешенного логарифмического рангового критерия с весовой функцией Тэрона-Вэра $S_{WLG(TW)}$ (в дальнейшем будет использоваться следующее обозначение S_{TW}) при разных степенях цензурирования выборок на альтернативных гипотезах H_{01} (отклонения в ранние моменты времени), H_{06} (отклонения в средние моменты времени) и H_{07} (отклонения в поздние моменты времени), объем выборок $n_1 = n_2 = 200$, степени цензурирования 0%-50% при $f_{we}^c(t; \bar{\theta})$, объем компьютерного моделирования $N = 150\,000$ повторений, вероятность ошибки I рода $\alpha = 0.05$. Используемые альтернативные гипотезы показаны на рисунке 3.26. Результаты сравнительного анализа мощности представим на рисунках 3.27-3.28.

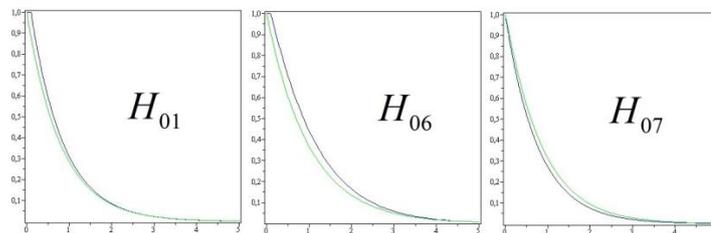


Рисунок 3.26 – Используемые альтернативные гипотезы

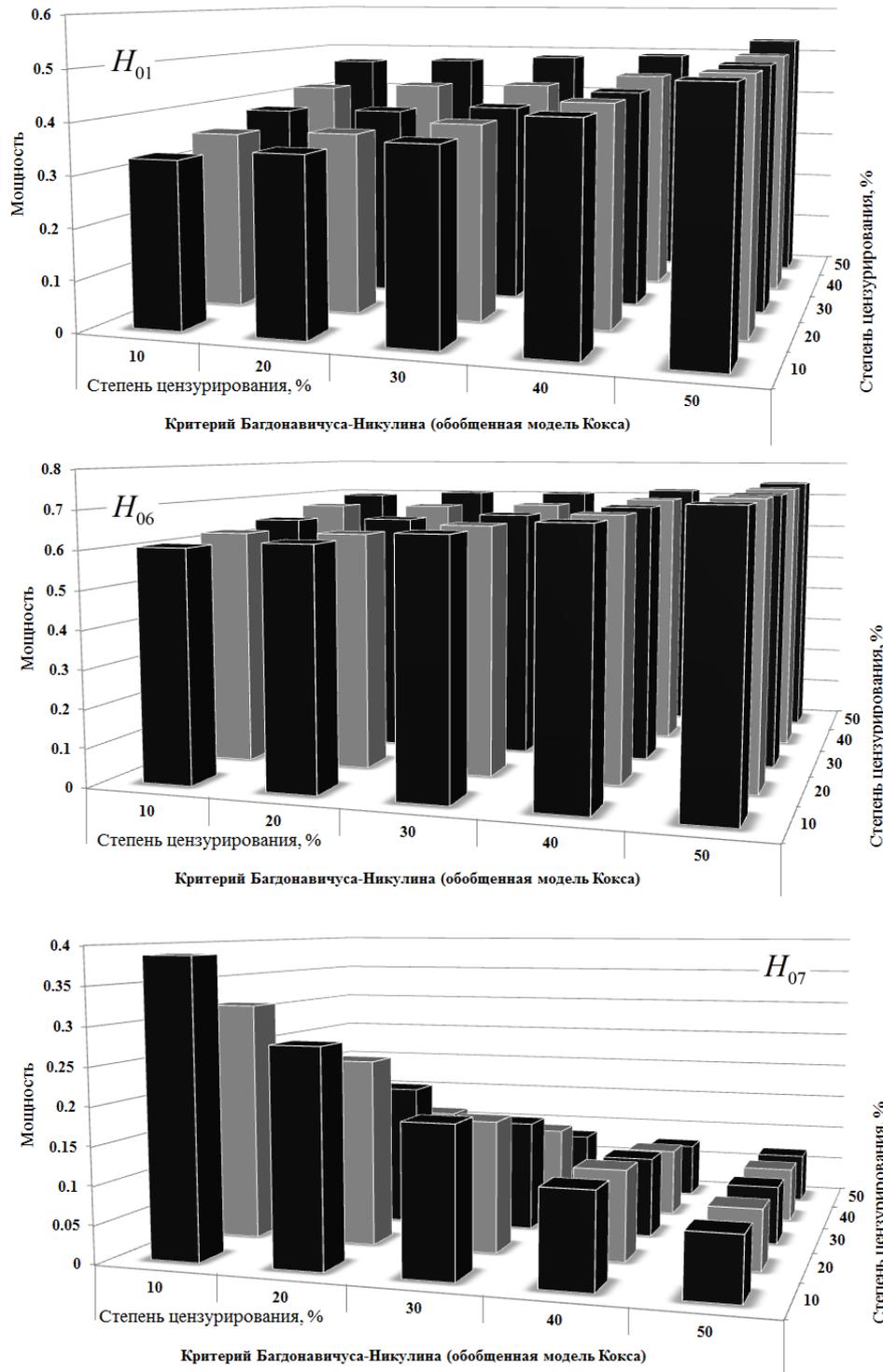


Рисунок 3.27 – Сравнительный анализ мощности критерия Багдонавичуса-Никулина для разных степеней цензурирования выборок

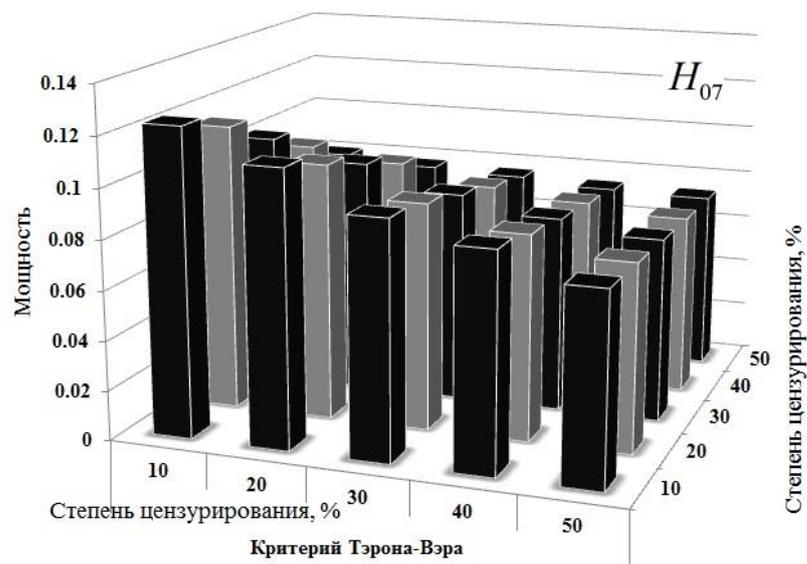
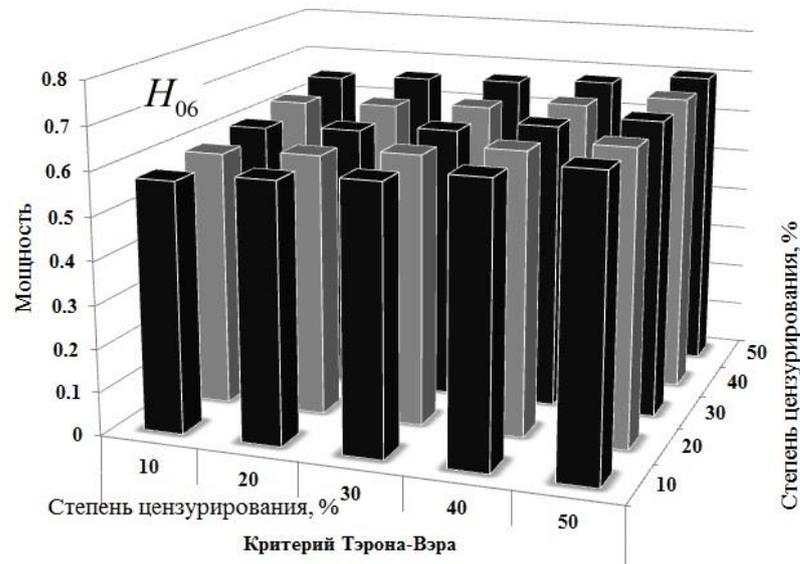
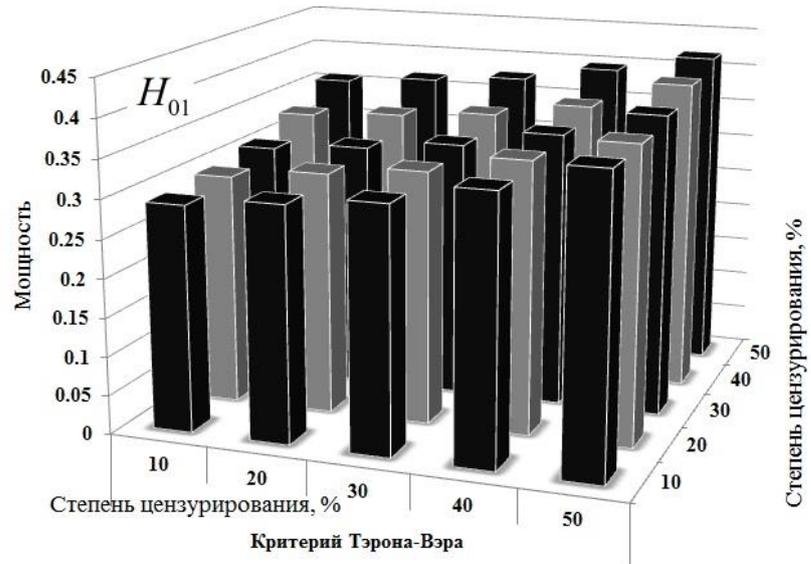


Рисунок 3.28 – Сравнительный анализ мощности критерия Тэрона-Вэра для разных степеней цензурирования выборок

В случае альтернативной гипотезы H_{01} для рассматриваемых критериев однородности наименьшие значения мощности достигаются в случае наименьших степеней цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 10\%$, а наибольшие значения мощности достигаются в случае наибольших степеней цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 50\%$. В случае альтернативной гипотезы H_{06} наблюдаются аналогичные результаты, как для альтернативной гипотезы H_{01} , но с меньшей разницей между наибольшим и наименьшим значениями мощности. Это объясняется следующим образом: для альтернативных гипотез H_{01} и H_{06} соответствуют наибольшие отклонения между функциями надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ в ранние и средние моменты времени соответственно, а наименьшие различия соответствуют поздним моментам времени, следовательно, из-за цензурирования справа (вместо наблюдения X_i рассматривается $(C_i, +\infty)$) поведение функций надежности в поздние моменты времени становится менее информативным. Это позволяет статистическим методам учитывать только наблюдения, которые соответствуют области наибольших различий (ранние и средние моменты времени), что приводит к росту мощности критериев однородности.

В случае альтернативной гипотезы H_{07} для рассматриваемых критериев однородности наименьшие значения мощности достигаются в случае наибольших степеней цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 50\%$, а наибольшие значения статистической мощности достигаются в случае наименьших степеней цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 10\%$. Это объясняется следующим образом: из-за цензурирования справа поведение функций надежности в поздние моменты времени становится менее информативным, где сосредоточены наибольшие отклонения между функциями надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$, что приводит к снижению статистической мощности критериев однородности [151].

3.2.5 Выбор статистического критерия как наилучшей стратегии с помощью правил принятия решений в условиях риска и неопределенности

На основании результатов проведенного сравнительного анализа мощности данной диссертационной работы стоит заметить, что на разных альтернативных гипотезах, принадлежащих одной группе, наибольшую мощность могут иметь разные критерии. Это создает трудности в формировании рекомендаций по выбору статистического критерия для определенной группы альтернатив. Следовательно, необходимо руководствоваться некоторым правилом, на основании которого по значениям мощности будет определяться предпочтительность данного критерия к определенному типу альтернативной гипотезы в сравнении с другими статистическими критериями.

В исследованиях операций [152] для решения задач принятия решений в условиях риска и неопределенности существуют различные методы, например, правила Лапласа, Гурвица, Сэвиджа, Вальда и др. Именно в качестве задачи принятия решения в условиях риска и неопределенности можно рассматривать выбор статистического критерия.

Пусть r – это стратегия применения статистического критерия со статистикой S при альтернативной гипотезе H . Тогда каждой стратегии r может быть присвоена некоторая полезность, используя функцию полезности $U(r|H)$ [153] (или сокращенно $U(r)$), для которой будут справедливыми следующие утверждения:

1. стратегия r_i предпочтительнее стратегии r_j (обозначим как $r_i \succ r_j$), если $U(r_i) \succ U(r_j)$, где $U(r_i), U(r_j)$ – значения полезности стратегий r_i и r_j ;
2. если $r_i \succ r_j$ и $r_j \succ r_k$, тогда $U(r_i) \succ U(r_k)$;
3. если r представима как $r = (1-\alpha)r_1 + \alpha r_2$, тогда $U(r) = (1-\alpha)U(r_1) + \alpha U(r_2)$;
4. если $U(r_1, r_2)$ – это объединенная полезность r_1, r_2 , тогда $U(r_1, r_2) = U(r_1) + U(r_2)$.

В диссертационной работе мощность статистического критерия со статистикой S относительно альтернативной гипотезы H используется в качестве функции полезности $U(r)$.

Каждый из критериев для решения задач принятия решений в условиях риска и неопределенности основан на оптимизации полезности при различных предположениях. Правило Вальда [154] – это способ выбора стратегии «осторожного наблюдателя», т.к. правило оптимизирует полезность (мощность критерия) при выполнении предположения, что для принятия решения среда (альтернативная гипотеза H) находится в самом неблагоприятном состоянии, т.е. в предположении, что значения мощности всех критериев на альтернативной гипотезе H минимальны. Правило выбора оптимального критерия на основании правила Вальда может быть записано следующим образом:

$$W = \max_{i=1,k} \min_{j=1,m} U(r_i | H_j), \quad (3.1)$$

где k – это число рассматриваемых статистических критериев, m – число рассматриваемых альтернативных гипотез. Способ вычисления статистики правила Вальда W представим в таблице 3.5.

Таблица 3.5 – Вычисление статистики правила Вальда W для принятия решений в условиях риска и неопределенности

Статистические критерии	Альтернативные гипотезы			Минимумы
	H_1	...	H_m	
Критерий 1	$U(r_1 H_1)$...	$U(r_1 H_m)$	$m_1 = \min \{U(r_1 H_1), \dots, U(r_1 H_m)\}$
Критерий 2	$U(r_2 H_1)$...	$U(r_2 H_m)$	$m_2 = \min \{U(r_2 H_1), \dots, U(r_2 H_m)\}$
...
Критерий k	$U(r_k H_1)$...	$U(r_k H_m)$	$m_k = \min \{U(r_k H_1), \dots, U(r_k H_m)\}$
				$W = \max \{m_1, \dots, m_k\}$

В основе правила Сэвиджа лежит другой подход. Это правило минимизации «сожалений». «Сожаление» – это величина, равная отклонению мощности критерия относительно наилучшего возможного значения

мощности на альтернативной гипотезе H . Чтобы определить "сожаление", поступаем следующим образом. Для каждого значения $U(r_i | H_j)$ в таблице 3.5 находим отклонение от наибольшего значения в j -м столбце $MAX_j, j = \overline{1, m}$, т.е. $u_{ij} = |U(r_i | H_j) - MAX_j|, i = \overline{1, k}, j = \overline{1, m}$. Вычисление значения правила Сэвиджа SV покажем в таблице 3.6.

Таблица 3.6 – Вычисление статистики правила Сэвиджа SV для принятия решений в условиях риска и неопределенности

Стат. критерии	Альтернативные гипотезы			Максимумы
	H_1	...	H_m	
Критерий 1	u_{11}	...	u_{1m}	$m_1 = \max \{u_{11}, \dots, u_{1m}\}$
Критерий 2	u_{21}	...	u_{2m}	$m_2 = \max \{u_{21}, \dots, u_{2m}\}$
...
Критерий k	u_{k1}	...	u_{km}	$m_k = \max \{u_{k1}, \dots, u_{km}\}$
				$SV = \min \{m_1, \dots, m_k\}$

Таким образом, будем формировать рекомендации по выбору статистического критерия для определенного типа альтернативной гипотезы на основе правил Вальда и Сэвиджа. Статистический критерий однородности, оптимальный по правилу Вальда для принятия решений в условиях риска и неопределенности [155], – это статистический критерий, чья минимальная мощность на всех альтернативных гипотезах максимальна среди всех критериев. Статистический критерий однородности, оптимальный по правилу Сэвиджа, – это статистический критерий, чье наибольшее отклонение от максимально возможного значения мощности является наименьшим.

Для вычисления значений статистик правил Вальда и Сэвиджа было произведено компьютерное моделирование мощности критериев с использованием метода Монте-Карло относительно конкурирующих гипотез $H_{01} - H_{29}$, при объемах выборок $n_1 = n_2 = 200$ и $n_1 = n_2 = 500$, степенях

цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2)$ в диапазоне от 0% до 50% с использованием закона распределения моментов цензурирования $F^C(t)$ с функциями плотности $f_{We}^C(t; \bar{\theta})$, $f_{\Gamma}^C(t; \bar{\theta})$ и $f_{Exp}^C(t; \bar{\theta})$, объем компьютерного моделирования $N = 150\,000$ повторений, зафиксированная вероятность ошибки I-го рода $\alpha = 0.05$. Результаты представлены в приложении А (таблицы А.1-А.18), а также на рисунках 3.29-3.35.

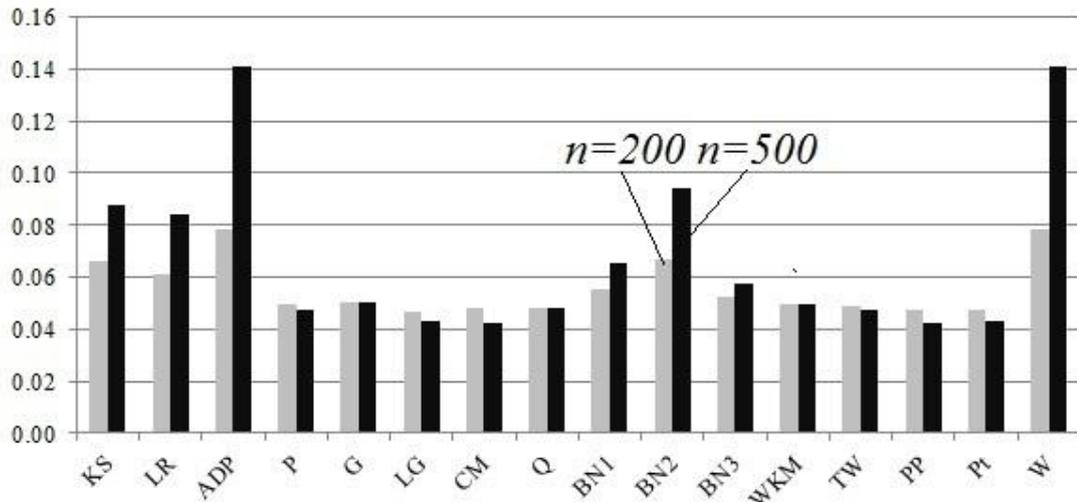


Рисунок 3.29 – Наименьшие значения мощности критериев для альтернатив $H_{01} - H_{29}$ и соответствующее значение Вальда в случае $R(Z_i) = 0\%, \forall i$

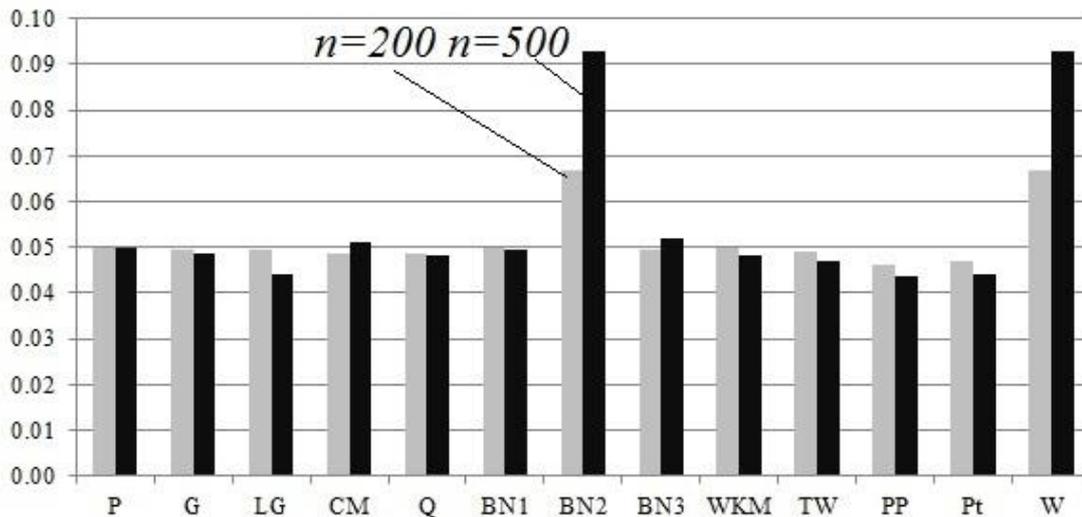


Рисунок 3.30 – Наименьшие значения мощности критериев для альтернатив $H_{01} - H_{29}$ и соответствующее значение Вальда в случае $R(Z_i) = 10\%, \forall i$

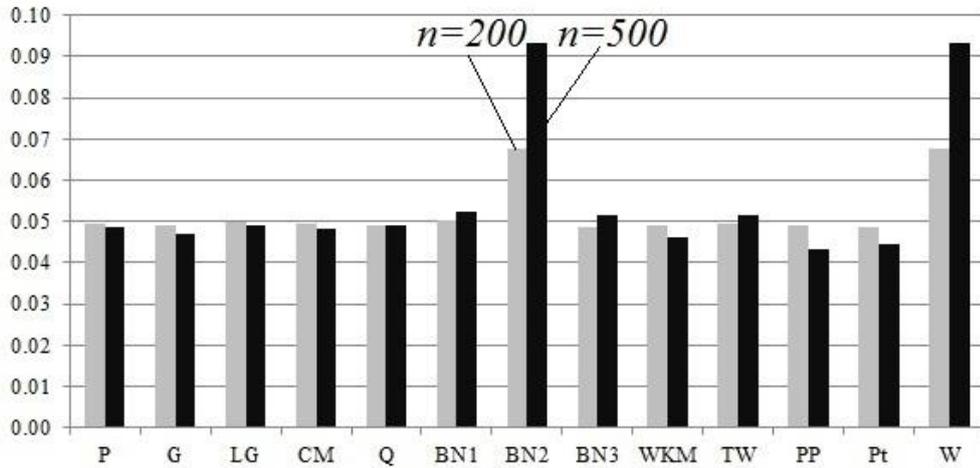


Рисунок 3.31 – Наименьшие значения мощности критериев для альтернатив $H_{01} - H_{29}$ и соответствующее значение Вальда в случае $R(Z_i) = 20\%, \forall i$

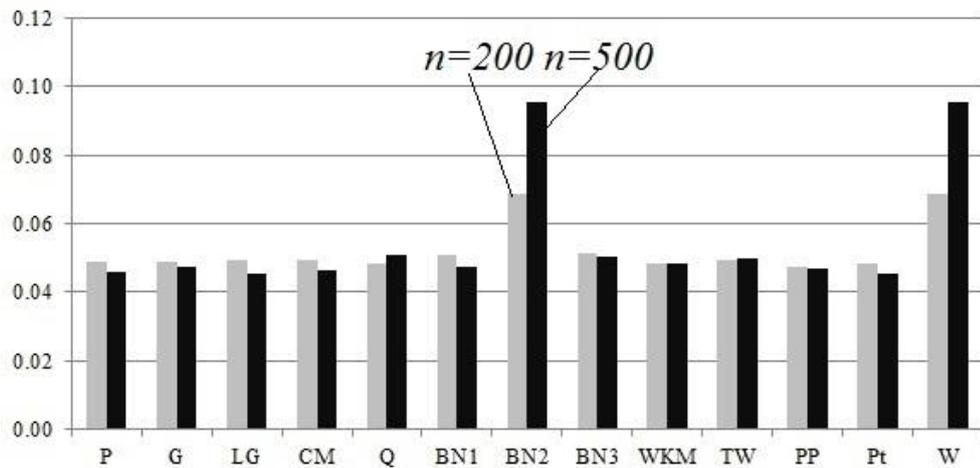


Рисунок 3.32 – Наименьшие значения мощности критериев для альтернатив $H_{01} - H_{29}$ и соответствующее значение Вальда в случае $R(Z_i) = 30\%, \forall i$

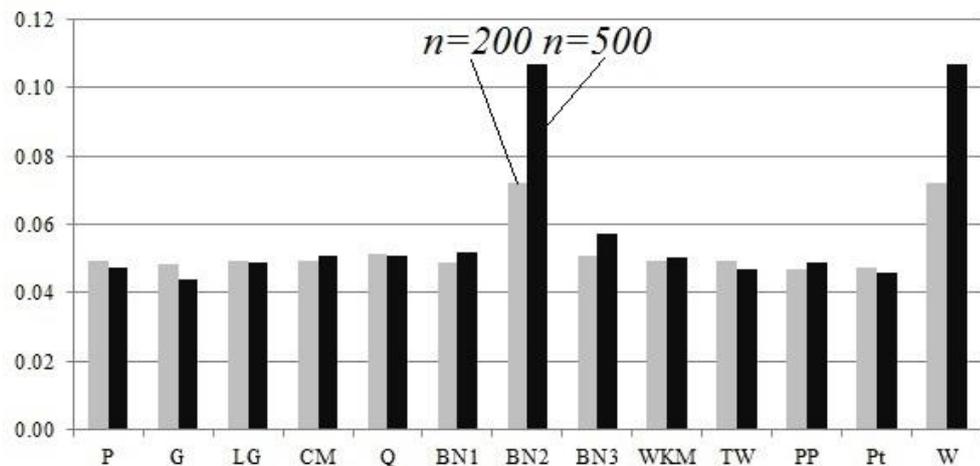


Рисунок 3.33 – Наименьшие значения мощности критериев для альтернатив $H_{01} - H_{29}$ и соответствующее значение Вальда в случае $R(Z_i) = 40\%, \forall i$

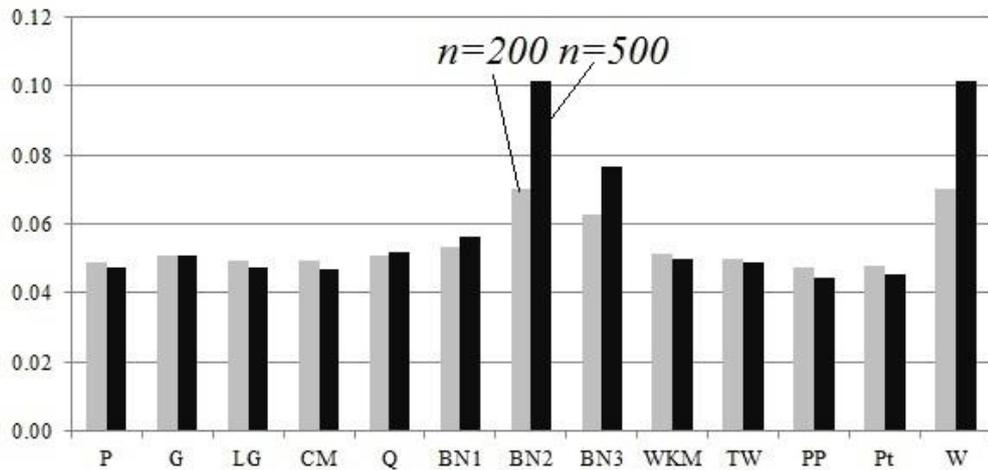


Рисунок 3.34 – Наименьшие значения мощности критериев для альтернатив $H_{01} - H_{29}$ и соответствующее значение Вальда в случае $R(Z_i) = 50\%, \forall i$

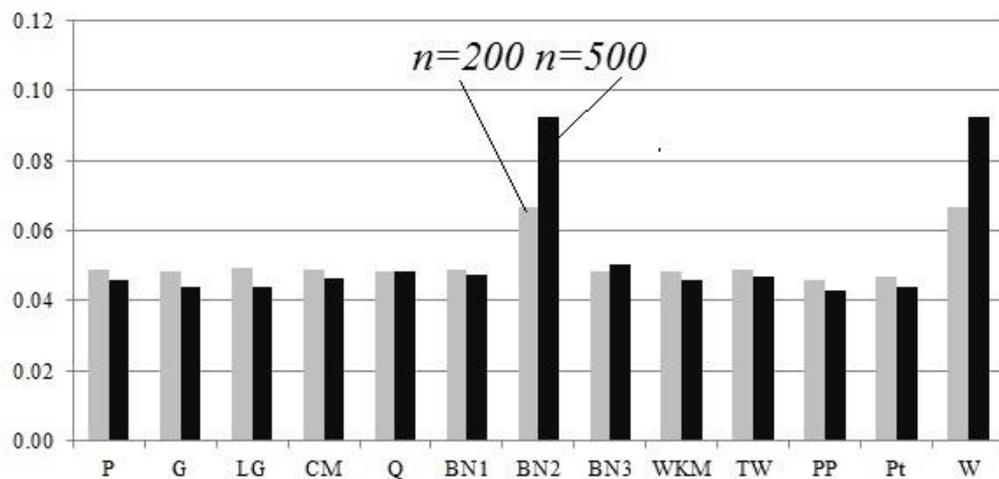


Рисунок 3.35 – Наименьшие значения мощности критериев для альтернатив $H_{01} - H_{29}$ и соответствующее значение Вальда в случае $10\% \leq R(Z_i) \leq 50\%, \forall i$

В соответствии с правилом Вальда (для принятия решений в условиях риска и неопределенности) было установлено, что для рассмотренных степеней цензурирования 10%-50% при альтернативных гипотезах $H_{01} - H_{29}$ оптимальной стратегией является использование критерия Багдонавичуса-Никулина (многократные пересечения), в случае степени цензурирования 0% – критерии Багдонавичуса-Никулина (многократные пересечения), Андерсона-Дарлинга-Петита и Колмогорова-Смирнова, т.к. этим критериям соответствует наибольшее значение правила Вальда.

В случае определения оптимальной стратегии (статистического критерия) на основе правила Сэвиджа получились следующие результаты, представленные на рисунках 3.36-3.42. Во случае всех рассмотренных степеней цензурирования в диапазоне от 0% до 50% получилось, что оптимальным статистическим критерием является критерий Багдонавичуса-Никулина для многократных пересечений на множестве всех альтернатив $H_{01} - H_{29}$, т.к. этому критерию соответствуют наименьшие значения «сожалений».

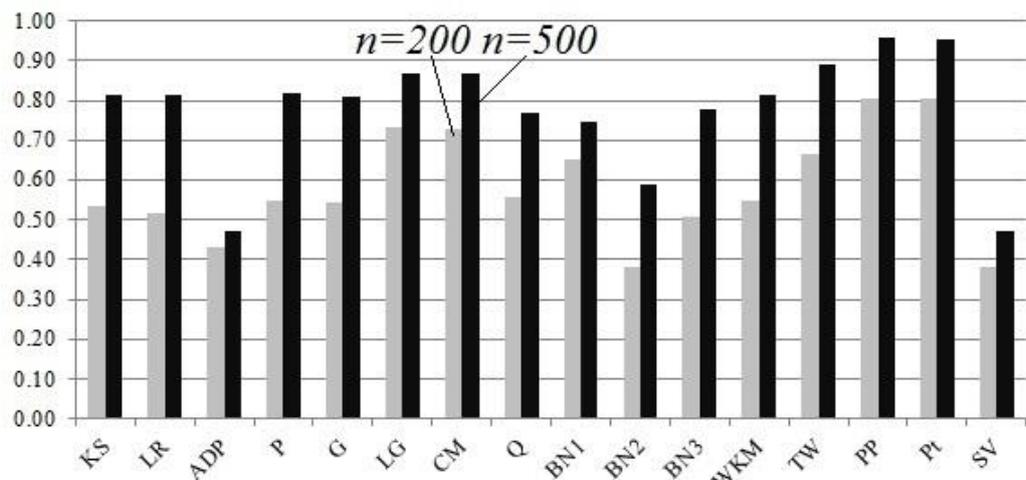


Рисунок 3.36 – Значение «сожалений» критериев и соответствующее значение Сэвиджа при $R(Z_1) = R(Z_2) = 0\%$ для альтернатив $H_{01} - H_{29}$

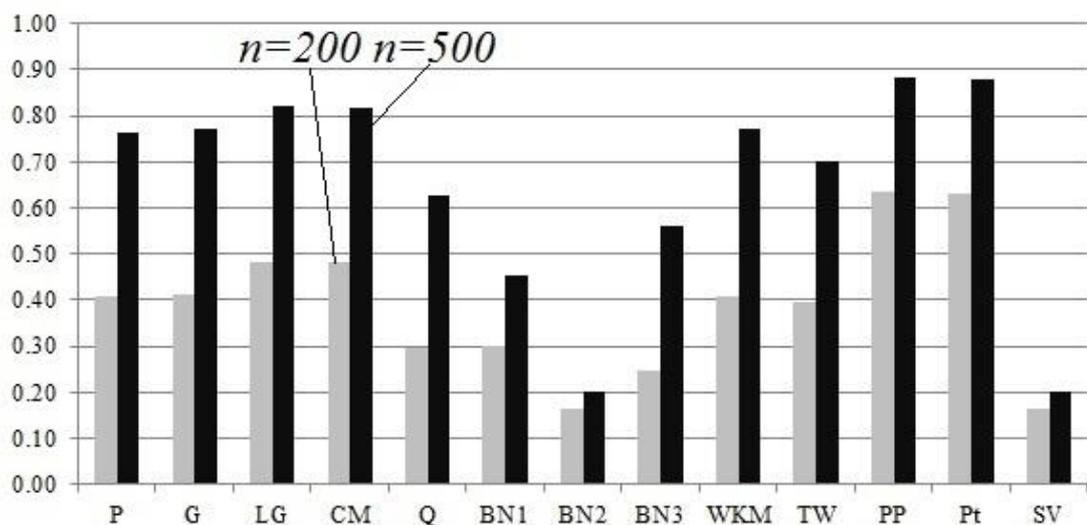


Рисунок 3.37 – Значение «сожалений» критериев и соответствующее значение Сэвиджа при $R(Z_1) = R(Z_2) = 10\%$ для альтернатив $H_{01} - H_{29}$

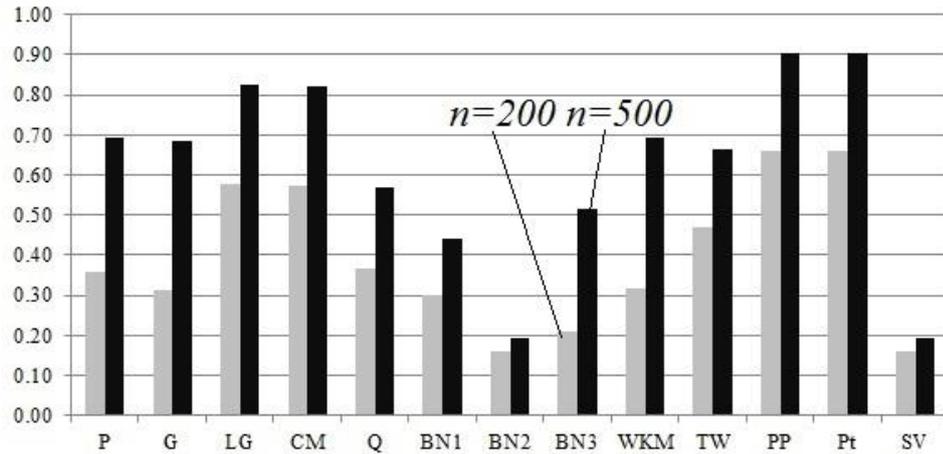


Рисунок 3.38 – Значение «сожалений» критериев и соответствующее значение Сэвиджа при $R(Z_1) = R(Z_2) = 20\%$ для альтернатив $H_{01} - H_{29}$

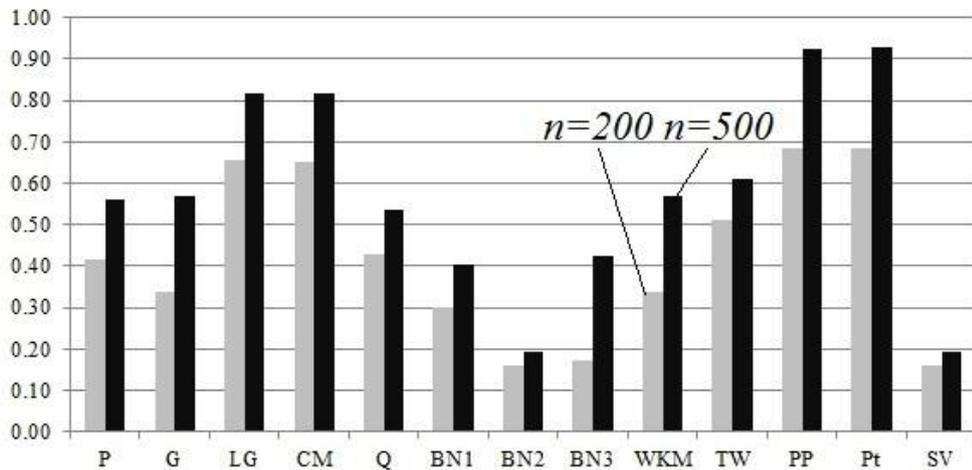


Рисунок 3.39 – Значение «сожалений» критериев и соответствующее значение Сэвиджа при $R(Z_1) = R(Z_2) = 30\%$ для альтернатив $H_{01} - H_{29}$

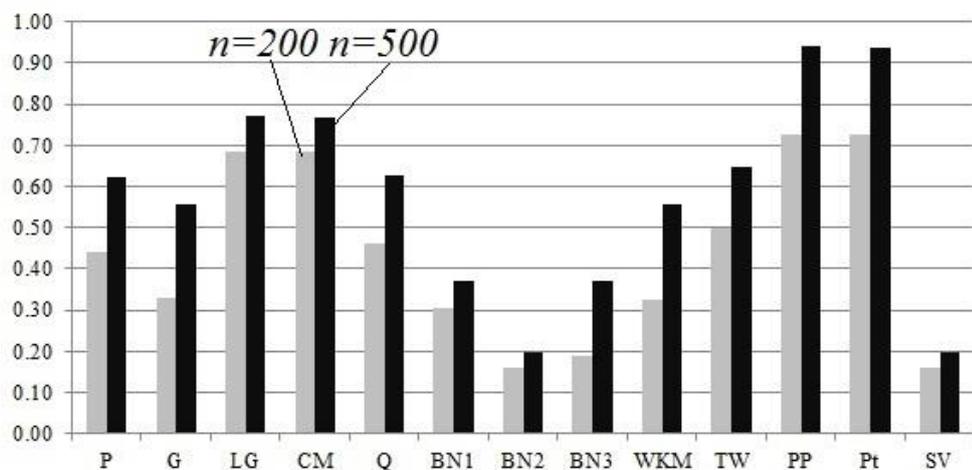


Рисунок 3.40 – Значение «сожалений» критериев и соответствующее значение Сэвиджа при $R(Z_1) = R(Z_2) = 40\%$ для альтернатив $H_{01} - H_{29}$

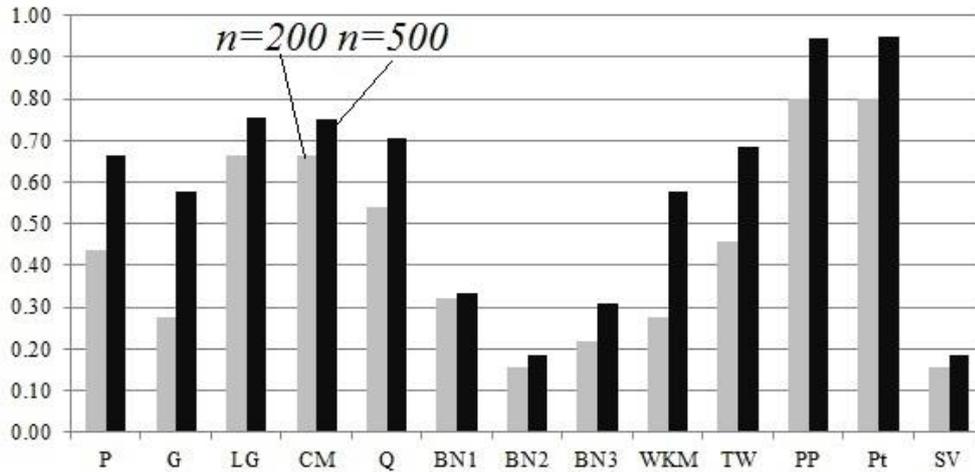


Рисунок 3.41 – Значение «сожалений» критериев и соответствующее значение Сэвиджа при $R(Z_1) = R(Z_2) = 50\%$ для альтернатив $H_{01} - H_{29}$

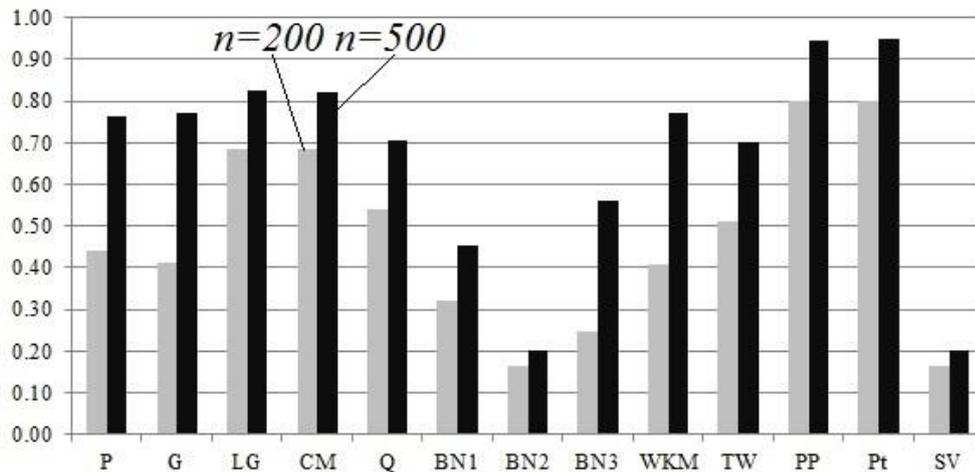


Рисунок 3.42 – Значение «сожалений» критериев и соответствующее значение Сэвиджа при $10\% \leq R(Z_1) = R(Z_2) \leq 50\%$ для альтернатив $H_{01} - H_{29}$

3.3 Выводы

В данной главе представлены результаты сравнительного анализа мощности критериев однородности при близких альтернативных гипотезах. Для этого было выбрано и обосновано множество альтернативных гипотез с различными конфигурациями функций надежности.

Были получены результаты оценки мощности в случае полных наблюдений, что позволило сравнить мощность большего множества статистических критериев однородности, включая критерии однородности

классического статистического анализа, например, критерии Колмогорова-Смирнова, Лемана-Розенблатта и др. Установлено, что критерии Андерсона-Дарлинга-Петита и Багдонавичуса-Никулина на большинстве рассмотренных альтернативных гипотез (для 0, 1 и 2 точек пересечений) являются предпочтительными критериями.

Был произведен сравнительный анализ мощности критериев в случае цензурированных данных, относительно каждой альтернативной гипотезы определены наиболее и наименее мощные критерии. Установлено, что критерии Багдонавичуса-Никулина для многократных и однократных пересечений, а также взвешенный критерий Каплана-Мейера на большинстве рассмотренных альтернативных гипотез обладают высокой мощностью и дополняют друг друга.

Кроме того, в данной главе определено влияние неравных объемов выборок на статистическую мощность критериев однородности: мощность критерия зависит от наименьшего объема выборки и при планировании эксперимента необходимо стремиться максимизировать наименьший объем двух выборок.

Показано влияние разных степеней цензурирования выборок на мощность критериев однородности. В случае, если наибольшие отклонения между функциями надежности сосредоточены в ранние и средние моменты времени, то рост степени цензурирования способствует увеличению статистической мощности критериев однородности. Однако, если наибольшие отклонения между функциями надежности расположены в поздние моменты времени, то рост степени цензурирования способствует снижению статистической мощности критериев однородности.

По результатам сравнительного анализа статистической мощности на группах альтернатив с применением правила Вальда (для принятия решений в условиях риска и неопределенности) были определены оптимальные стратегии выбора статистического критерия, чья мощность будет гарантированно наибольшей в случае такой альтернативной гипотезы, на

которой мощности всех критериев минимальны. В случае полных данных наиболее предпочтительными являются критерии Андерсона-Дарлинга-Петита и Багдонавичуса-Никулина для многократных пересечений, для цензурированных данных (степени цензурирования 10%-50%) – критерий Багдонавичуса-Никулина для многократных пересечений. На основе правила Сэвиджа (для принятия решений в условиях риска и неопределенности), который определяет наилучшую стратегию в виде минимизации «сожалений», было получено, что оптимальной стратегией для всех рассмотренных степеней цензурирования 0%-50% является использование критерия Багдонавичуса-Никулина для многократных пересечений. Применение методов для принятия решений в условиях риска и неопределенности позволяет определить такие статистические критерии, которые являются предпочтительными к типу альтернативной гипотезы. Полученные оптимальные стратегии являются готовыми рекомендациями по использованию статистическими критериями на практике в том случае, если нет оснований рассматривать определенный тип альтернативной гипотезы.

Поскольку нами было установлено, что нет такого статистического критерия однородности, мощность которого была бы наибольшей при всех типах альтернативных гипотез, то актуальна задача разработки нового статистического критерия однородности, применение которого было бы более оптимальной стратегией в соответствии с правилами Вальда и Сэвиджа (для принятия решений в условиях риска и неопределенности) при всех группах рассматриваемых альтернативных гипотез, чем имеющиеся статистические критерии.

ГЛАВА 4 НОВЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ГИПОТЕЗЫ ОДНОРОДНОСТИ

Разработка новых и модификация существующих статистических методов – это непрерывный процесс совершенствования методов статистического анализа. Каждый статистический метод обладает своими достоинствами и недостатками. Для избавления от существующих недостатков возможны два пути решения: либо разработка нового математического метода, предотвращающего появление нежелательных недостатков в существующих методах, либо разработка модификаций существующих методов на более широкий класс решаемых задач. И в том, и в другом случае это получается новая статистическая процедура, в эффективности которой необходимо удостовериться путем проведения статистического моделирования. В данной главе будут рассмотрены предложенные статистические методы, применимые для проверки гипотезы однородности распределений, а также будет показана эффективность их применения. Полученные результаты исследований опубликованы в [151, 156-166].

4.1 Непараметрический критерий однородности максимального значения как альтернатива Q -критерию

Мартинез и Норанхо [67] предложили в своей работе статистическую процедуру (Q -критерий), способную выбирать наиболее мощный критерий среди обобщенных критериев Уилкоксона (критерии Гехана и Пето) и логарифмического рангового критерия. В данной диссертации Q -критерий рассматривается в качестве двухэтапного критерия: сперва вычисляется вспомогательная статистика с помощью оценок функций надежности, а затем по ней вычисляется статистика критерия. Однако было получено, что распределение статистики Q -критерия при справедливости H_0 зависит от входных данных, например, от закона распределения моментов отказа $F(t)$,

как это показано на рисунке 4.1. В итоге, требовалась альтернатива Q -критерию.

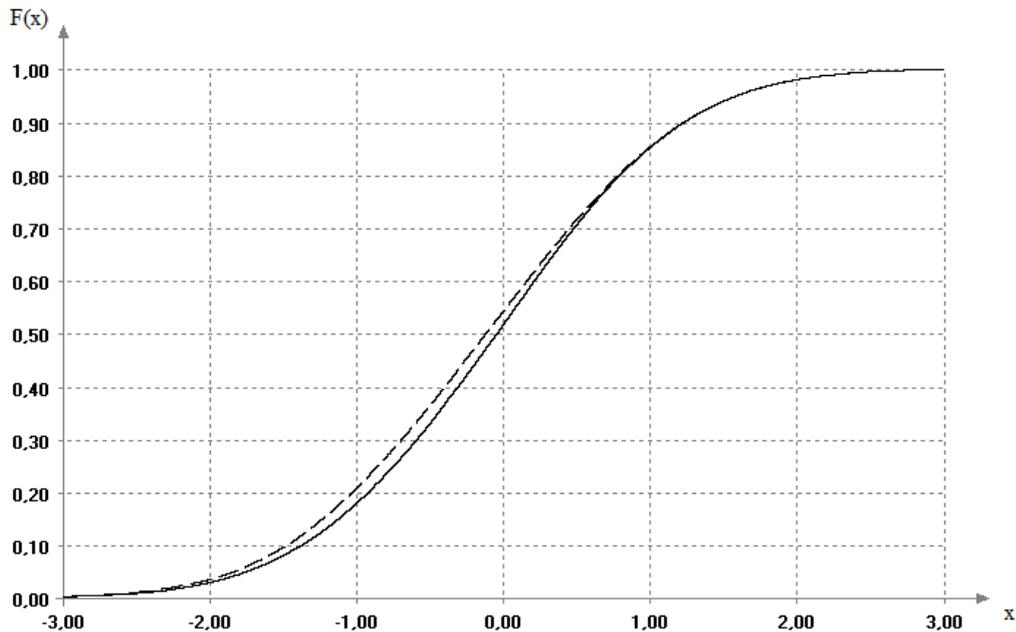


Рисунок 4.1 – Функции распределения статистики Q -критерия для разных законов распределения моментов отказа $F(t)$ при справедливости H_0

4.1.1 Критерий однородности распределений максимального значения для данных типа времени жизни

Этот критерий является более простой альтернативой Q -критерию, т.к. не требует построения непараметрических оценок функций надежности для вычисления вспомогательной статистики.

Идея критерия следующая: имеются две статистики критериев с одинаковым предельным распределением (один критерий предпочтителен в мощности на одном множестве альтернативных гипотез, а второй – на другом не пересекающем множестве). Выбирая значение статистики критерия, которой соответствует меньший достигнутый уровень значимости, получаем значение статистики критерия максимального значения [151, 156].

Статистика критерия максимального значения выглядит следующим образом:

$$S_{MAX} = \max \{ |S_G|, |S_{LG}| \}, \quad (4.1)$$

где S_G – статистика обобщенного Геханом критерия Уилкоксона, а S_{LG} – статистика логарифмического рангового критерия.

Предельное распределение статистики критерия S_{MAX} при справедливости гипотезы H_0 описывается следующей функцией плотности:

$$f(t; r) = 4\varphi(t) \left(\Phi_0 \left(t \sqrt{\frac{1-r}{1+r}} \right) + \Phi_0 \left(t \sqrt{\frac{1+r}{1-r}} \right) \right), t \geq 0, \quad (4.2)$$

где r – это коэффициент корреляции между случайными величинами S_G и S_{LG} при справедливости гипотезы H_0 ,

$$\Phi_0(t) = \int_0^t \varphi(x) dx = \int_0^t \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

Соотношение (4.2) получено из предположения, что распределение статистики критерия максимального значения – это случайная величина максимума от вектора стандартных нормальных случайных величин (т.к. S_G и S_{LG} распределены по стандартному нормальному закону). Покажем получение соотношения (4.2) в теореме 4.1 [156].

Было получено [156, 159, 161], что при использовании соотношения (4.2) для определения достигнутого уровня значимости при ошибке I-го рода $0 < \alpha \leq 0.15$, $r = 0.89$ погрешность вычисления составляет:

$$|p_v - \hat{p}_v| \leq 0.1 \cdot \alpha,$$

где p_v – значение достигнутого уровня значимости, полученное с помощью метода Монте-Карло при объеме компьютерного моделирования $N = 2\,700\,000$, а \hat{p}_v – значение достигнутого уровня значимости, полученное с помощью соотношения (4.2).

Теорема 4.1. Пусть компоненты η_1, η_2 нормального случайного вектора имеют математические ожидания 0 и дисперсии 1. Тогда случайная величина $\eta = \max\{\eta_1, \eta_2\}$ имеет следующую функцию плотности:

$$f_\eta(t; r) = 4\varphi(t) \left(\Phi_0 \left(t \sqrt{\frac{1-r}{1+r}} \right) + \Phi_0 \left(t \sqrt{\frac{1+r}{1-r}} \right) \right), t \geq 0,$$

где r – это коэффициент корреляции между случайными величинами η_1 и η_2 ,

$$\Phi_0(t) = \int_0^t \varphi(x) dx = \int_0^t \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

Если $r=0$, тогда $f_\eta(t) = 8\varphi(t)\Phi_0(t)$ при $t \geq 0$. Если $|r|=1$, тогда $f_\eta(t) = 2\varphi(t)$ при $t \geq 0$.

Доказательство. Случайная величина η_2 может быть представлена следующим образом $\eta_2 = r \cdot \eta_1 + \sqrt{1-r^2} \eta_3$, где η_1 и η_3 – это независимые и одинаково распределенные (по стандартному нормальному закону) случайные величины.

$$\begin{aligned} F_\eta(t) &= P(-t \leq \eta_1 \leq t, -t \leq \eta_2 \leq t) = \\ &= P\left(-t \leq \eta_1 \leq t, \frac{r \cdot \eta_1 - t}{\sqrt{1-r^2}} \leq \eta_3 \leq \frac{r \cdot \eta_1 + t}{\sqrt{1-r^2}}\right) = \\ &= 2 \int_0^t \varphi(\tau) \left(\Phi_0\left(\frac{t+r\tau}{\sqrt{1-r^2}}\right) + \Phi_0\left(\frac{t-r\tau}{\sqrt{1-r^2}}\right) \right) d\tau. \end{aligned}$$

Используя формулу дифференцирования:

$$\left(\int_0^t g(\tau, t) d\tau \right)' = g(t, t) + \int_0^t g'_x(\tau, t) d\tau$$

для непрерывно дифференцируемой функции g .

В соответствие с последним соотношением имеем:

$$\begin{aligned} f_\eta(t; r) &= 2\varphi(t) \left(\Phi_0\left(t\sqrt{\frac{1-r}{1+r}}\right) + \Phi_0\left(t\sqrt{\frac{1+r}{1-r}}\right) \right) + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{1-r^2}} \int_0^t \varphi(\tau) \left(\varphi\left(\frac{t+r\tau}{\sqrt{1-r^2}}\right) + \varphi\left(\frac{t-r\tau}{\sqrt{1-r^2}}\right) \right) d\tau. \end{aligned}$$

Второе слагаемое равно:

$$\frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}} \int_0^t \exp(-\tau^2/2) \left(\exp\left(-\frac{(t+r\tau)^2}{2(1-r^2)}\right) + \exp\left(-\frac{(t-r\tau)^2}{2(1-r^2)}\right) \right) d\tau.$$

Упростим последнее соотношение:

$$\frac{\exp(-t^2/2)}{\pi\sqrt{1-r^2}} \int_0^t \left(\exp\left(-\frac{(\tau+rt)^2}{2(1-r^2)}\right) + \exp\left(-\frac{(\tau-rt)^2}{2(1-r^2)}\right) \right) d\tau =$$

$$= 2\varphi(t) \left(\Phi_0 \left(t \sqrt{\frac{1-r}{1+r}} \right) + \Phi_0 \left(t \sqrt{\frac{1+r}{1-r}} \right) \right).$$

В итоге, получаем

$$f_\eta(t; r) = 4\varphi(t) \left(\Phi_0 \left(t \sqrt{\frac{1-r}{1+r}} \right) + \Phi_0 \left(t \sqrt{\frac{1+r}{1-r}} \right) \right), t \geq 0,$$

что и требовалось доказать.

4.1.2 Сравнительный анализ мощности предложенного и существующих критериев

Проведем сравнительный анализ статистической мощности предложенного критерия максимального значения S_{MAX} с другими критериями однородности (обобщенный Геханом критерий Уилкоксона S_G , обобщенный Пето критерий Уилкоксона S_P , логарифмический ранговый критерий S_{LG} , критерий Кокса-Мантела S_{CM} и Q -критерий S_Q) для степеней цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 0\%$ и $R(Z_1) = R(Z_2) = 50\%$ при $f_{we}^C(t; \bar{\theta})$ на альтернативных гипотезах H_{03} , H_{04} , H_{09} (функции надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ не пересекаются, но имеют наибольшие отклонения в ранние, средние и поздние моменты времени соответственно), H_{13} , H_{16} , H_{19} (функции надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ имеют одно пересечение в ранние, средние и поздние моменты времени соответственно), H_{23} , H_{26} и H_{28} (функции надежности $S_1(t)$ и $S_2(t)$ имеют два пересечения в ранние и средние, в ранние и поздние, средние и поздние моменты времени соответственно), объем выборок $n_1 = n_2 = 200$, объем компьютерного моделирования $N = 150\,000$ повторений, вероятность ошибки I-го рода $\alpha = 0.05$. Результаты сравнительного анализа мощности представим на рисунке 4.2.

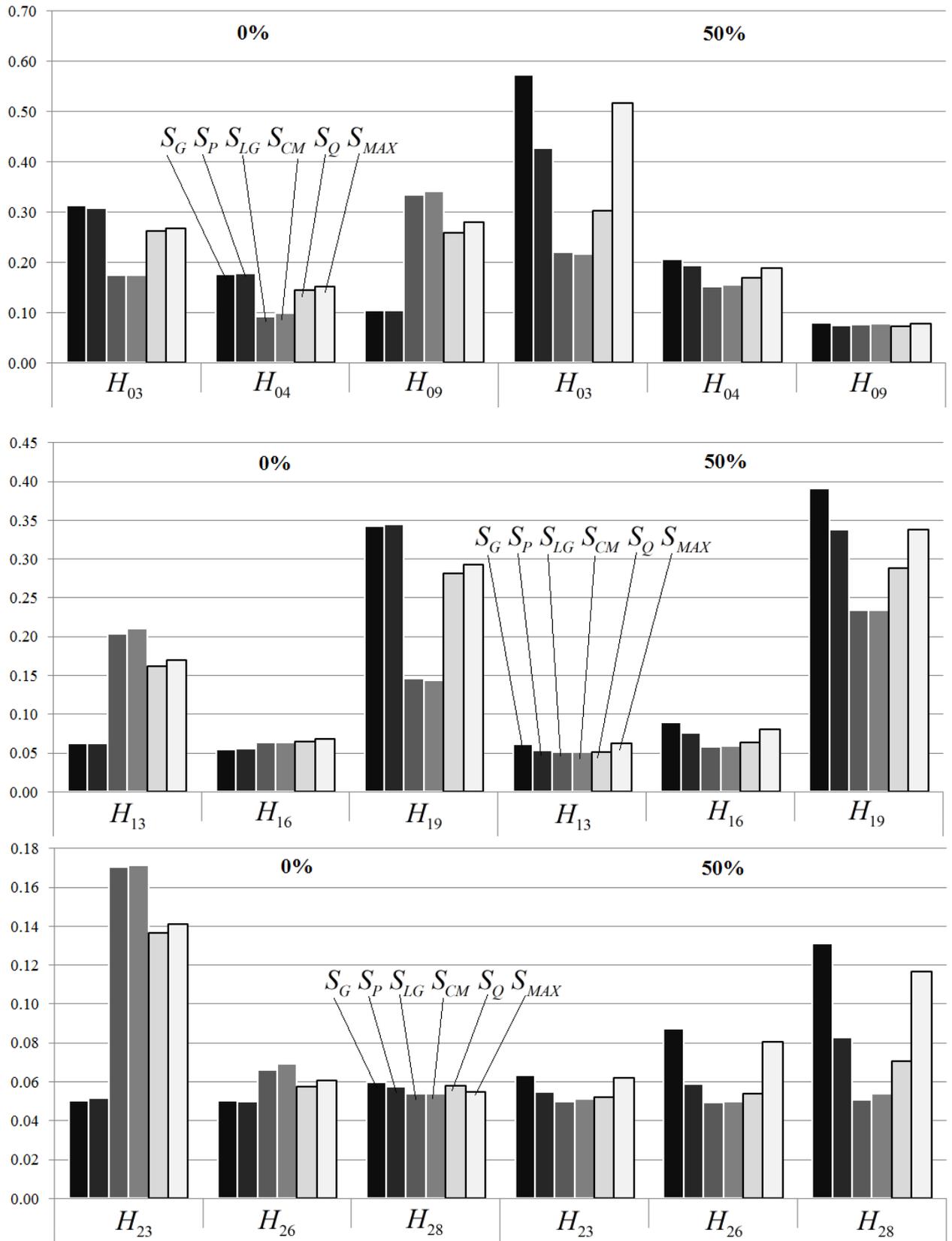


Рисунок 4.2 – Сравнительный анализ мощности критерия максимального значения с другими критериями однородности (степени цензурирования 0% и 50%)

Из полученных результатов видно, что критерий максимального значения не уступает в мощности Q -критерию, а во многих случаях даже существенно превосходит. Кроме того, критерий максимального значения S_{MAX} имеет мощность, близкую к наибольшей мощности среди всех рассмотренных критериев на всех рассмотренных альтернативных гипотезах. Учитывая вышеизложенное, можно сделать вывод о том, что использовать предложенный критерий максимального значения предпочтительнее, чем Q -критерий, по ряду причин (статистическая мощность, отсутствие необходимости построения непараметрических оценок функций надежности, более простое вычисление вспомогательной статистики), а также рекомендуется использовать критерий максимального значения вместо критериев со статистиками S_G , S_P , S_{LG} и S_{CM} , т.к. заранее неизвестен характер пары конкурирующих гипотез.

4.2 Непараметрический критерий однородности $MIN3$ как устойчивый критерий к неопределенности вида альтернативной гипотезы

Одним из выводов главы 3 является тот факт, что критерии Багдонавичуса-Никулина для многократных и однократных пересечений, а также взвешенный критерий Каплана-Мейера на большинстве рассмотренных альтернативных гипотез обладают высокой статистической мощностью и дополняют друг друга, т.е. при некоторых альтернативах большую мощность имеют критерии Багдонавичуса-Никулина, а при других – взвешенный критерий Каплана-Мейера.

На основе полученного результата был предложен новый критерий $MIN3$ [158].

4.2.1 Критерий однородности распределений $MIN3$ для данных типа времени жизни

Статистика критерия $MIN3$ выглядит следующим образом:

$$S_{MIN3} = \min \{pv_{WKM}, pv_{BN2}, pv_{BN3}\}, \quad (4.3)$$

где $pv_{WKM} = 2 \cdot \min \{F_{N(0,1)}(S_{WKM}), 1 - F_{N(0,1)}(S_{WKM})\}$, $pv_{BN2} = 1 - F_{\chi^2(3)}(S_{BN2})$, $pv_{BN3} = 1 - F_{\chi^2(2)}(S_{BN3})$, $F_{N(0,1)}(t)$ – функция распределения вероятностей стандартного нормального распределения в момент времени t , $F_{\chi^2(k)}(t)$ – функция распределения вероятностей хи-квадрат со степенью свободы k в момент времени t .

Гипотеза H_0 отклоняется, если $S_{MIN3} > G(S_{MIN3} | H_0)_{1-\alpha}$, где $G(S_{MIN3} | H_0)_{1-\alpha}$ – это $(1-\alpha)$ квантиль распределения статистики критерия $MIN3$. В противном случае нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

Поскольку аналитическое соотношение данного распределения отсутствует, то приведем в таблице 4.1 процентные точки данного распределения, полученные с помощью метода Монте-Карло (объемы выборок $n_1 = n_2 = 50$, объем компьютерного моделирования $N = 10^6$). Если объемы выборок будут отличаться от указанных в таблице, то распределение $G(S_{MIN3} | H_0)_{1-\alpha}$ необходимо смоделировать с помощью метода Монте-Карло.

Таблица 4.1 – Смоделированные процентные точки распределения статистики критерия $MIN3$ при справедливости нулевой гипотезы H_0

α	$\hat{G}(S_{MIN3} H_0)_{1-\alpha}$	α	$\hat{G}(S_{MIN3} H_0)_{1-\alpha}$
0.0010	0.9765	0.1500	0.6419
0.0025	0.9618	0.2000	0.5812
0.0050	0.9440	0.3000	0.4729
0.0075	0.9296	0.4000	0.3832
0.0100	0.9186	0.5000	0.3020
0.0250	0.8666	0.6000	0.2280
0.0500	0.8037	0.7000	0.1605
0.0750	0.7553	0.8000	0.0999
0.1000	0.7136	0.9000	0.0449
0.1250	0.6761	0.9990	0.0003

4.2.2 Сравнительный анализ мощности критериев на группах альтернативных гипотез с применением правил Вальда и Сэвиджа для принятия решений в условиях риска и неопределенности

Проведем сравнительный анализ статистической мощности предложенного критерия $MIN3$ с другими критериями однородности распределений (критерий Колмогорова-Смирнова S_{KS} ; критерий Лемана-Розенблатта S_{LR} ; критерий Андерсона-Дарлинга-Петита S_{ADP} ; обобщенные Геханом S_G и Пето S_P критерии Уилкоксона; логранговый критерий S_{LG} ; критерий Кокса-Мантела S_{CM} ; Q -критерий S_Q ; критерии Багдонавичуса-Никулина S_{BN1} , S_{BN2} , S_{BN3} ; взвешенный критерий Каплана-Мейера S_{WKM} ; взвешенные логранговые критерии $S_{WLG(TW)}$ (или S_{TW}); $S_{WLG(PP)}$ (или S_{PP}); $S_{WLG(P)}$ (или S_{Pt}); предложенные критерии S_{MAX} и S_{MIN3}) для $R(Z_1) = R(Z_2)$ 0%-50% при $f_{We}^C(t; \bar{\theta})$, $f_{\Gamma}^C(t; \bar{\theta})$ и $f_{Exp}^C(t; \bar{\theta})$ на альтернативных гипотезах H_0^E ($H_{01} - H_{03}$ без пересечений и с наибольшими отклонениями в ранние моменты времени), H_0^M ($H_{04} - H_{06}$ без пересечений и с наибольшими отклонениями в средние моменты времени), H_0^L ($H_{07} - H_{09}$ без пересечений и с наибольшими отклонениями в поздние моменты времени), H_1^E ($H_{11} - H_{13}$ с пересечением в ранние моменты времени), H_1^M ($H_{14} - H_{16}$ с пересечением в средние моменты времени), H_1^L ($H_{17} - H_{19}$ с пересечением в поздние моменты времени), H_2^{EM} ($H_{21} - H_{23}$ с пересечениями в ранние и средние моменты времени), H_2^{EL} ($H_{24} - H_{26}$ с пересечениями в ранние и поздние моменты времени) и H_2^{ML} ($H_{27} - H_{29}$ с пересечениями в средние и поздние моменты времени), объемы выборок $n_1 = n_2 = 200$ и $n_1 = n_2 = 500$, объем компьютерного моделирования $N = 150\,000$ повторений, вероятность ошибки I-го рода $\alpha = 0.05$. Результаты сравнительного анализа мощности представлены в приложении А (таблицы А.1-А.18) и на рисунках 4.3-4.9.

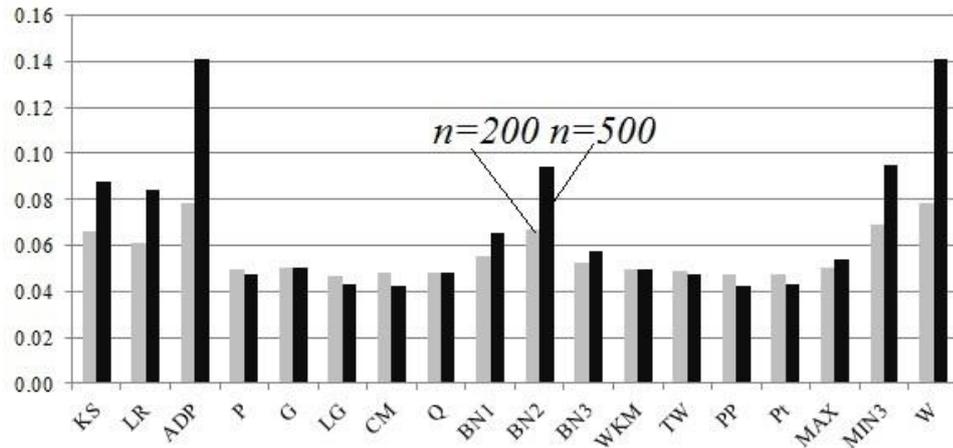


Рисунок 4.3 – Наименьшие значения мощности критериев для альтернатив $H_{01} - H_{29}$ и соответствующее значение Вальда в случае $R(Z_i) = 0\%, \forall i$

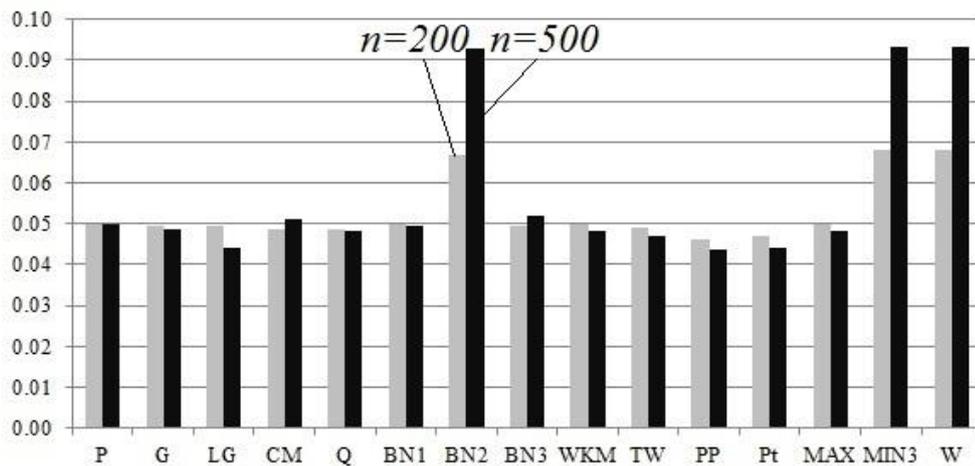


Рисунок 4.4 – Наименьшие значения мощности критериев для альтернатив $H_{01} - H_{29}$ и соответствующее значение Вальда в случае $R(Z_i) = 10\%, \forall i$

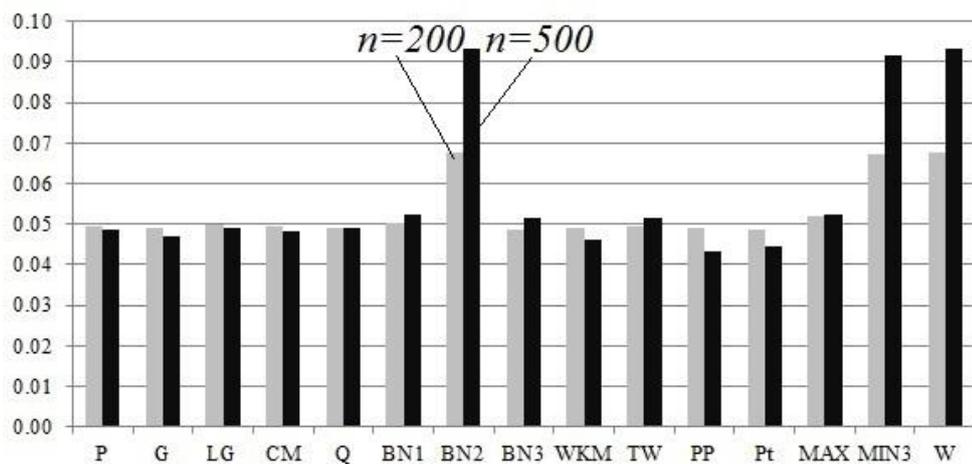


Рисунок 4.5 – Наименьшие значения мощности критериев для альтернатив $H_{01} - H_{29}$ и соответствующее значение Вальда в случае $R(Z_i) = 20\%, \forall i$

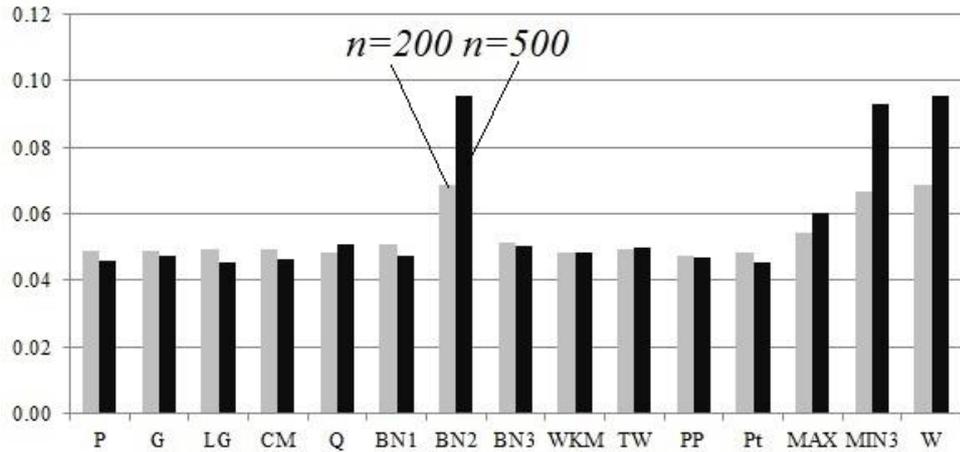


Рисунок 4.6 – Наименьшие значения мощности критериев для альтернатив $H_{01} - H_{29}$ и соответствующее значение Вальда в случае $R(Z_i) = 30\%, \forall i$

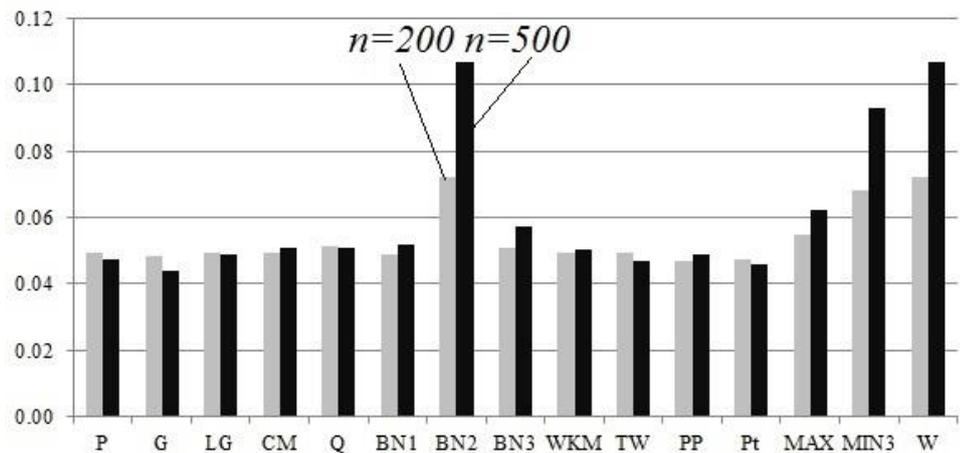


Рисунок 4.7 – Наименьшие значения мощности критериев для альтернатив $H_{01} - H_{29}$ и соответствующее значение Вальда в случае $R(Z_i) = 40\%, \forall i$

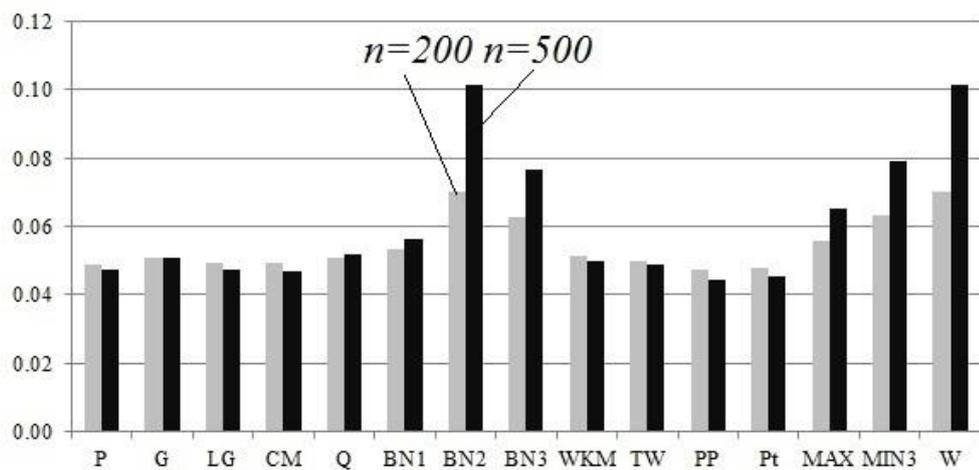


Рисунок 4.8 – Наименьшие значения мощности критериев для альтернатив $H_{01} - H_{29}$ и соответствующее значение Вальда в случае $R(Z_i) = 50\%, \forall i$

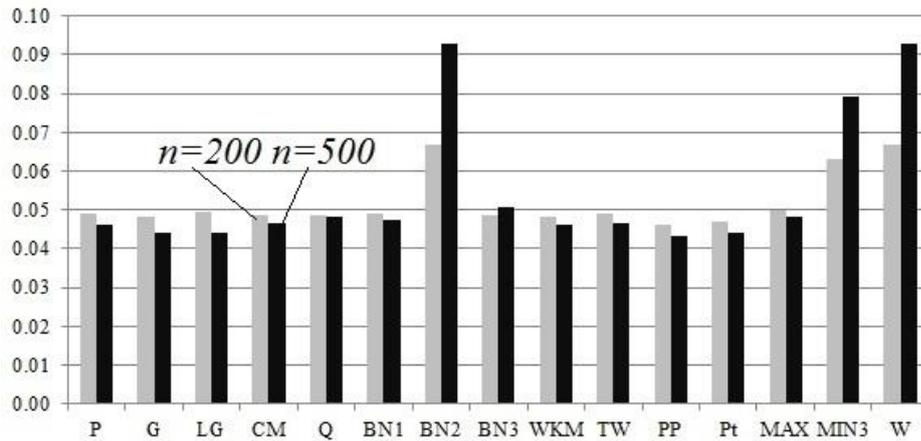


Рисунок 4.9 – Наименьшие значения мощности критериев для альтернатив $H_{01} - H_{29}$ и соответствующее значение Вальда в случае $10\% \leq R(Z_i) \leq 50\%, \forall i$

В соответствие с правилом Вальда (для принятия решений в условиях риска и неопределенности) было установлено, что в случае степени цензурирования 0% оптимальной стратегией являются критерии Андерсона-Дарлинга-Петита, Багдонавичуса-Никулина (многократные пересечения) и *MIN3*, в случае степени цензурирования 10%-50% – Багдонавичуса-Никулина (многократные пересечения) и *MIN3*.

В случае определения оптимальной стратегии (статистического критерия) на основе правила Сэвиджа получились следующие результаты, представленные на рисунках 4.10-4.16. Во случае всех рассмотренных степеней цензурирования в диапазоне от 10% до 50% получилось, что оптимальным статистическим критерием является предложенный критерий *MIN3* на множестве всех рассмотренных альтернативных гипотез $H_{01} - H_{29}$.

Из полученных результатов видно, что предложенный критерий *MIN3* является оптимальным в соответствие с правилом Сэвиджа на всех рассмотренных степенях цензурирования 10%-50%, а также является одним из оптимальных критериев в соответствие с правилом Вальда на всех рассмотренных степенях цензурирования и альтернативных гипотезах.

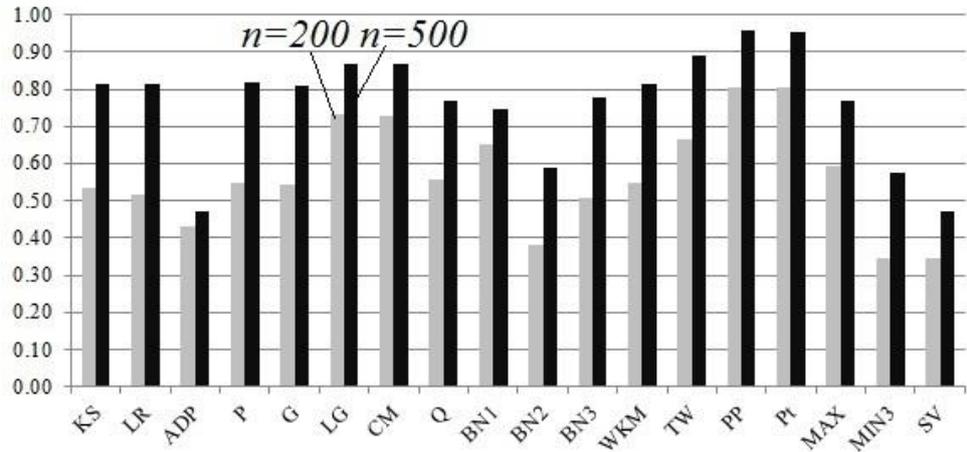


Рисунок 4.10 – Значение «сожалений» критериев и соответствующее значение Сэвиджа при $R(Z_1) = R(Z_2) = 0\%$ для альтернатив $H_{01} - H_{29}$

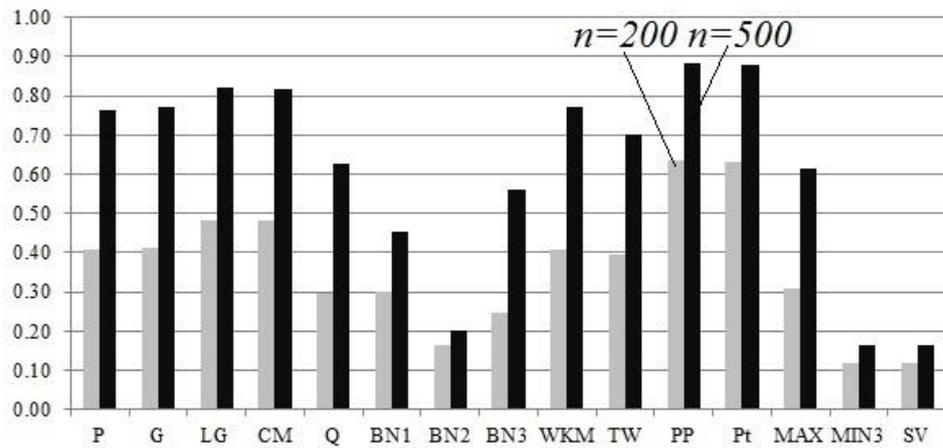


Рисунок 4.11 – Значение «сожалений» критериев и соответствующее значение Сэвиджа при $R(Z_1) = R(Z_2) = 10\%$ для альтернатив $H_{01} - H_{29}$

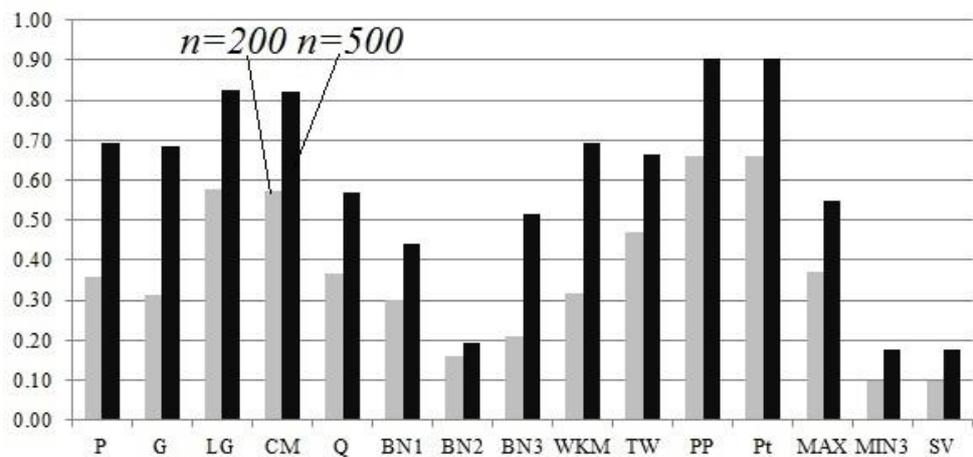


Рисунок 4.12 – Значение «сожалений» критериев и соответствующее значение Сэвиджа при $R(Z_1) = R(Z_2) = 20\%$ для альтернатив $H_{01} - H_{29}$

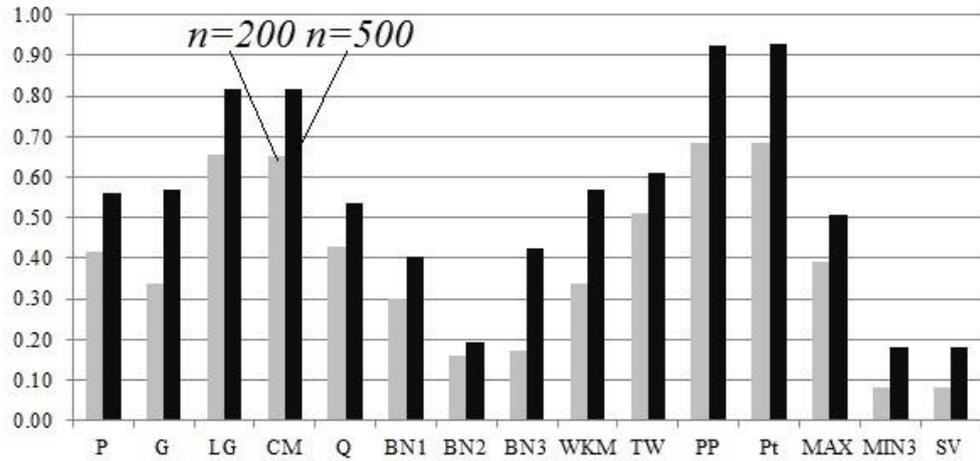


Рисунок 4.13 – Значение «сожалений» критериев и соответствующее значение Сэвиджа при $R(Z_1) = R(Z_2) = 30\%$ для альтернатив $H_{01} - H_{29}$

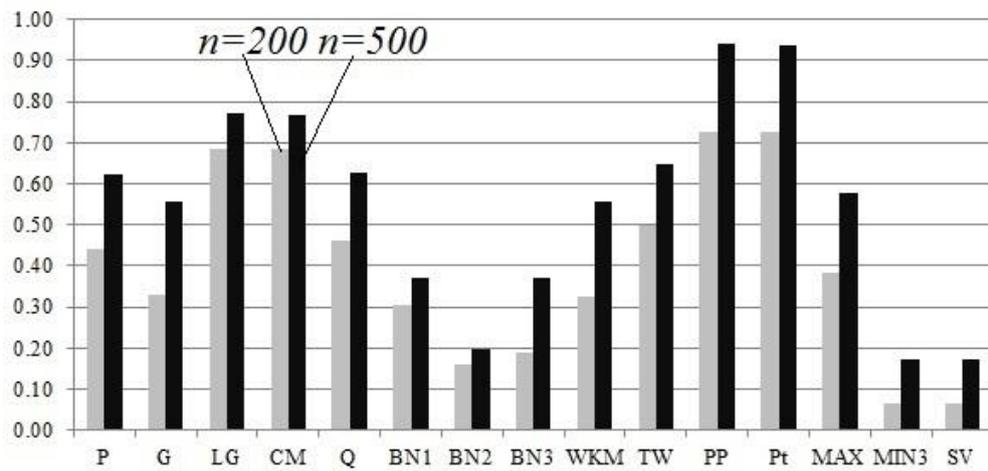


Рисунок 4.14 – Значение «сожалений» критериев и соответствующее значение Сэвиджа при $R(Z_1) = R(Z_2) = 40\%$ для альтернатив $H_{01} - H_{29}$

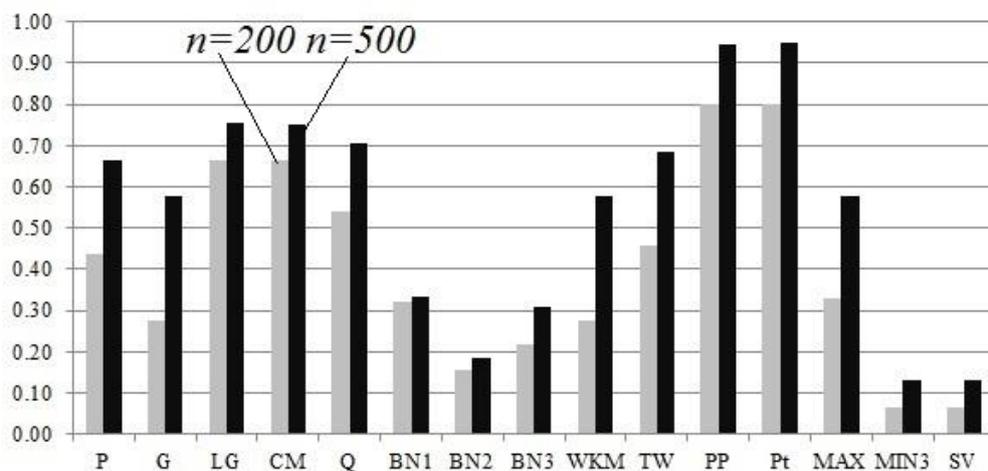


Рисунок 4.15 – Значение «сожалений» критериев и соответствующее значение Сэвиджа при $R(Z_1) = R(Z_2) = 50\%$ для альтернатив $H_{01} - H_{29}$

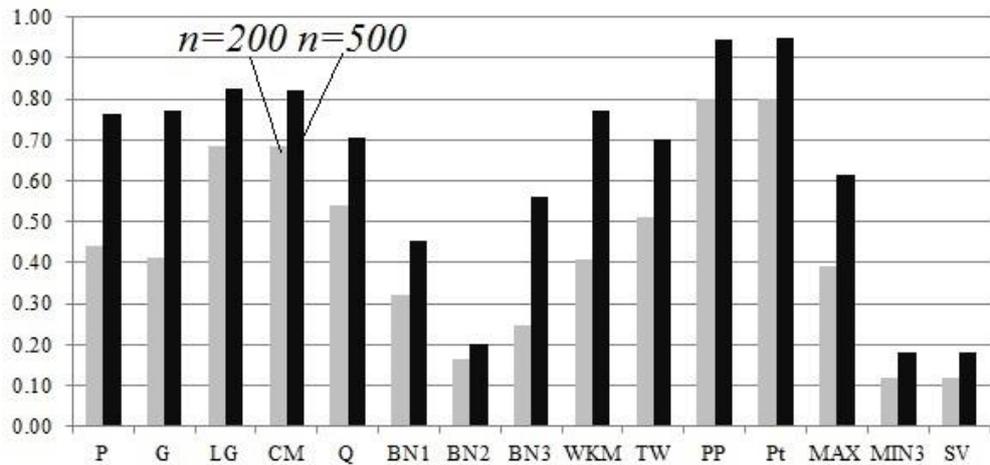


Рисунок 4.16 – Значение «сожалений» критериев и соответствующее значение Сэвиджа при $10\% \leq R(Z_1) = R(Z_2) \leq 50\%$ для альтернатив $H_{01} - H_{29}$

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что предложенный критерий *MIN3* может быть рекомендован в качестве предпочтительного критерия для проверки статистической гипотезы однородности распределений в том случае, если тип альтернативной гипотезы не известен.

4.3 Модификация критериев однородности средних на случай данных типа времени жизни

Мы уже говорили о том, что проверку статистической гипотезы однородности можно осуществлять с помощью критериев однородности характеристик случайных величин, например, средних. В таком случае, если гипотеза однородности средних будет нарушаться, то в таком случае имеются основания для отклонения нулевой гипотезы H_0 .

В классическом статистическом анализе широко известны параметрические критерии проверки гипотезы однородности средних Стьюдента [6, 75] и Крамера-Уэлча [76]. Для применения критериев требуется проверка априорного предположения о том, что данные распределены по нормальному закону. Тем не менее имеются работы [6, 8], на основании которых при больших объемах выборок в соответствие с

центральной предельной теоремой для критерия Стьюдента проверять гипотезу о нормальности данных не требуется.

Критерии Стьюдента и Крамера-Уэлча определены только для полных данных и не могут применяться в случае данных типа времени жизни, поэтому необходимы модификации статистик этих критериев для случая цензурированных справа наблюдений.

4.3.1 Модифицированный критерий однородности средних Стьюдента

Статистика модифицированного критерия Стьюдента для цензурированных справа данных полностью совпадает со статистикой классического критерия, отличается использованными оценками и выглядит следующим образом [157, 165]:

$$S_{ST} = \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2}{\sqrt{(n_1 - 1)\hat{\sigma}_1^2 + (n_2 - 1)\hat{\sigma}_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}, \quad (4.4)$$

где $\hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i^2, i = 1, 2$ – это оценки математического ожидания и несмещенной дисперсии. Далее получим эти оценки.

Гипотеза H_0 отклоняется с уровнем значимости α , если $|S_{ST}| > t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$, где $t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$ – это $(1 - \alpha/2)$ квантиль распределения Стьюдента со степенью свободы $n_1 + n_2 - 2$. В противном случае нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

Запишем определение математического ожидания [157] $\mu = M\xi$ случайной величины ξ , которой соответствует функция надежности $S_\xi(t) = 1 - F_\xi(t)$:

$$\mu = M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot dF(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot d(1 - S(t)) = - \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot S'(t) dt.$$

Таким образом, для вычисления математического ожидания в случае данных типа времени жизни необходима оценка $\hat{S}(t)$ для функции надежности $S_\xi(t)$. В качестве оценки функции надежности $\hat{S}(t)$

воспользуемся оценкой Абдушукурова $\hat{S}_A(t)$, т.к. данная оценка в отличие от оценок Каплана-Мейера и Бреслоу всегда имеет нулевое значение до $t = +\infty$ [157].

В итоге оценка математического ожидания в случае цензурированных данных справа может быть вычислена следующим образом:

$$\hat{\mu}_i = \sum_{j=1}^{n_i} T_{(ij)} \left(\hat{S}_i^A(t_j - \varepsilon) - \hat{S}_i^A(t_j + \varepsilon) \right), i=1,2, \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.5)$$

Воспользуемся свойством [101] дисперсии случайной величины $\sigma^2 = D\xi$ для случайной величины ξ :

$$\sigma^2 = D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = M\xi^2 - \mu^2, M\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot dF(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot d(1-S(t)) = - \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \cdot S'(t) dt,$$

тогда оценка несмещенной дисперсии случайной величины в случае данных типа времени жизни может быть вычислена следующим образом:

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{n_i}{n_i - 1} \left(\sum_{j=1}^{n_i} T_{(ij)}^2 \left(\hat{S}_i^A(t_j - \varepsilon) - \hat{S}_i^A(t_j + \varepsilon) \right) - \hat{\mu}_i^2 \right), i=1,2, \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.6)$$

В силу того факта, что оценки (4.5) и (4.6) для цензурированных справа наблюдений были получены из соответствующих классических определений математического ожидания и дисперсии [157], то асимптотические свойства (несмещенность, состоятельность) полученных оценок следуют из асимптотических свойств используемой оценки Абдушукурова [51, 52].

4.3.2 Модифицированный критерий однородности средних Крамера-Уэлча

Статистика модифицированного критерия Крамера-Уэлча для цензурированных справа данных полностью совпадает со статистикой классического критерия, отличается использованными оценками и выглядит следующим образом [157, 165]:

$$S_{CW} = \frac{\sqrt{n_1 n_2} (\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2)}{\sqrt{n_2 \hat{\sigma}_1^2 + n_1 \hat{\sigma}_2^2}}. \quad (4.7)$$

Для статистики (4.7) применяются оценки $\hat{\mu}_i$ и $\hat{\sigma}_i^2$, описанные в соотношениях (4.5) и (4.6) соответственно.

Гипотеза H_0 отклоняется, если $|S_{CW}| > t_{1-\alpha/2}(v)$, где $t_{1-\alpha/2}(v)$ – это $(1-\alpha/2)$ квантиль распределения Стьюдента со степенью свободы v , где v вычисляется следующим образом:

$$v = \frac{\left(\frac{\hat{\sigma}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{\hat{\sigma}_1^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{\hat{\sigma}_2^4}{n_2^2(n_2-1)}}.$$

В противном случае нет оснований для отклонения гипотезы H_0 .

4.3.3 Сравнительный анализ мощности критериев однородности средних

Покажем поведение функции мощности модифицированных критериев однородности математических ожиданий Стьюдента и Крамера-Уэлча при конкурирующих гипотезах с различной степенью близости, а также при конкурирующих гипотезах, для которых выполняются и нарушаются априорные предположения (для критерия Стьюдента) о том, что данные должны быть распределены по нормальному закону. Конкурирующие гипотезы показаны в таблице 4.2.

Объем статистического моделирования $N = 30\,000$ повторений, что обеспечивает погрешность моделирования распределения статистик критерия $G(S_n | H_0)$ не более 0.01 [167]), объемы выборок $n_1 = n_2 = 500$, степени цензурирования выборок $R(Z_1) = R(Z_2)$ от 0% до 50% при $f_{we}^c(t; \bar{\theta})$, зафиксированная ошибка I-го рода $\alpha = 0.05$. Результаты статистического моделирования оценок мощности рассматриваемых критериев представлены в таблице 4.3.

Таблица 4.2 – Альтернативные гипотезы для сравнительного анализа мощности модифицированных критериев однородности средних

Обозначение	Альтернатива		Значение параметров	
	Первая выборка	Вторая выборка	λ	ε
H_1	$f_N(t; \lambda, 1)$	$f_N(t; \lambda + \varepsilon, 1)$	0	0.01
H_2	$f_N(t; \lambda, 1)$	$f_N(t; \lambda + \varepsilon, 1)$	0	0.05
H_3	$f_{Exp}(t; 0, \lambda)$	$f_{Exp}(t; 0, \lambda - \varepsilon)$	1	0.01
H_4	$f_{Exp}(t; 0, \lambda)$	$f_{Exp}(t; 0, \lambda - \varepsilon)$	1	0.05

Таблица 4.3 – Оценки мощности модифицированных критериев однородности средних

Критерий	H_i	0%	10%	20%	30%	40%	50%
Модиф. критерий Стьюдента	H_1	0.052	0.052	0.046	0.053	0.056	0.062
	H_2	0.123	0.128	0.112	0.115	0.108	0.107
	H_3	0.052	0.057	0.054	0.056	0.050	0.048
	H_4	0.133	0.122	0.108	0.105	0.090	0.077
Модиф. критерий Крамера-Уэлча	H_1	0.053	0.055	0.053	0.058	0.054	0.062
	H_2	0.113	0.122	0.116	0.111	0.118	0.106
	H_3	0.050	0.058	0.052	0.049	0.059	0.051
	H_4	0.129	0.116	0.109	0.099	0.095	0.077

Из полученных результатов в таблице 4.3 можно сделать следующие выводы, что оба критерия очень плохо различают пару конкурирующих гипотез, когда близость между математическими ожиданиями ε составляет не более $\varepsilon \leq 0.01$, даже при объеме выборок $n_1 = n_2 = 500$, т.к. мощности критериев на альтернативных гипотезах H_1 и H_3 близки к значению зафиксированной ошибки первого рода $\alpha = 0.05$. Тем не менее, рассматриваемые критерии лучше определяют альтернативу, если близость математических ожиданий $0.01 < \varepsilon \leq 0.05$, это можно увидеть по результатам мощности на альтернативных гипотезах H_2 и H_4 . Отметим тот факт, что с ростом степени цензурирования мощность критериев уменьшается (в соответствии с результатами на альтернативных гипотезах H_2 и H_4). Кроме

того, мощности модифицированных критериев Стьюдента и Крамера-Уэлча для рассмотренных альтернативных критериев отличаются не более, чем на величину 0.01. В случае полных наблюдений данные критерии асимптотически эквивалентны.

4.4 Гладкая оценка функции надежности на основе интерполяционного сплайна Эрмита

На практике при анализе данных обрабатывают выборки конечного объема n наблюдений $Z = \{(T_i, \delta_i), i = 1, n\}$. Эти наблюдения соответствуют некоторому распределению с функцией надежности $S(t)$. В силу ограниченности объема исходных данных вместо функции надежности $S(t)$ возможно рассмотреть ее оценки $\hat{S}_n(t)$. Такой оценкой $\hat{S}_n(t)$ не всегда удобно пользоваться при решении практических задач в силу дискретности этой оценки для малых объемов данных и наличия точек разрыва в значениях T_i . Известные оценки функции надежности Каплана-Мейера, Бреслоу и Абдушукурова на высоких степенях цензурирования (более 20%) и небольших объемах данных ($n < 50$) имеют «большие скачки» в поздние моменты времени T_i . Поэтому целесообразен переход от оценки $\hat{S}_n(t)$ к некоторой оценке $\hat{S}(t)$, которая была бы непрерывной, проходила бы через фиксированные точки и с ростом объема данных $n \rightarrow \infty$ приближалась бы к истинной функции надежности $S(t)$. Именно такую оценку рассмотрим в данной диссертационной работе, в основе которой лежит кубический интерполяционный сплайн Эрмита [125] с непрерывной первой производной, проходящий через фиксированные точки непараметрической оценки функции надежности Бреслоу.

4.4.1 Гладкая оценка функции надежности

Пусть имеется выборка $Z = \{(T_i, \delta_i), i = 1, n\}$, состоящая из полных и цензурированных справа наблюдений. Для выборки Z построим оценку

функции надежности Бреслоу $\hat{S}_n^{Br}(t; Z) = \hat{S}_n(t)$. Далее из имеющихся наблюдений T_i выборки Z и соответствующих значений оценки Бреслоу $\hat{S}_n(T_i)$ составим следующее множество M :

$$M = \{(x_i, p_i), i = 1, l\},$$

где

$$l = n - 1, x_i = \frac{T_i + T_{i+1}}{2}, p_i = \hat{S}_n(x_i), i = 1, \bar{l}.$$

Используя множество M , построим монотонный кубический сплайн Эрмита с непрерывной первой производной [168]. Соотношение для вычисления значений классического кубического сплайна Эрмита на отрезке (x_k, x_{k+1}) для переменной $\tau = (t - x_k)/(x_{k+1} - x_k)$ выглядит следующим образом:

$$G(\tau) = (2\tau^3 - 3\tau^2 + 1)p_k + (\tau^3 - 2\tau^2 + \tau)(x_{k+1} - x_k)m_k + \\ + (-2\tau^3 + 3\tau^2)p_{k+1} + (\tau^3 - \tau^2)(x_{k+1} - x_k)m_{k+1}.$$

Для корректного применения функции $G(\tau)$ необходимо выполнение условия монотонности $G(\tau) \geq G(\tau + \varepsilon), \varepsilon > 0$. На выполнение условия монотонности влияют значения производных m_k и m_{k+1} [170]. Для того, чтобы определить значения m_k и m_{k+1} , запишем функцию $G(\tau)$ в следующем виде:

$$G(\tau) = A\tau^3 + B\tau^2 + C\tau + D,$$

где

$$A = 2p_k + (x_{k+1} - x_k)m_k - 2p_{k+1} + (x_{k+1} - x_k)m_{k+1}, \\ B = -3p_k - 2(x_{k+1} - x_k)m_k + 3p_{k+1} - (x_{k+1} - x_k)m_{k+1}, \\ C = (x_{k+1} - x_k)m_k, \\ D = pk.$$

В таком случае производная функции $G(t)$ на (x_k, x_{k+1}) по переменной t выглядит следующим образом:

$$\frac{dG(t)}{dt} = \frac{3A}{(x_{k+1} - x_k)^3}(t - x_k)^2 + \frac{2B}{(x_{k+1} - x_k)^2}(t - x_k) + \frac{C}{x_{k+1} - x_k}, t \in (x_k, x_{k+1}).$$

Лемма 4.1. Для того, чтобы выполнялось условие монотонности $G(t) \geq G(t + \varepsilon), \varepsilon > 0$ необходимо и достаточно, чтобы действительные корни t_i из равенства $\frac{dG(t)}{dt} = 0$ не принадлежали интервалу $t_i \notin (x_k, x_{k+1}), \forall i$.

Доказательство следует из свойства производной, что смена знака производной $\frac{dG(t)}{dt}$ приводит к смене направления монотонности функции

$G(t)$. Таким образом, действительные корни уравнения $\frac{dG(t)}{dt} = 0$ следующие:

$$t_1 = \frac{1}{3A} \left((3A + B)x_k - Bx_{k+1} + \sqrt{-(x_k - x_{k+1})^2 (3AC - B^2)} \right),$$

$$t_2 = \frac{1}{3A} \left((3A + B)x_k - Bx_{k+1} - \sqrt{-(x_k - x_{k+1})^2 (3AC - B^2)} \right).$$

Если действительных корней t_1 и t_2 не существует, значит условие монотонности $G(t) \geq G(t + \varepsilon), \varepsilon > 0$ на интервале (x_k, x_{k+1}) не нарушается.

Таким образом, величины m_k и m_{k+1} будут вычисляться следующим образом:

$$m_k = \begin{cases} \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1}, k = 1, \\ \max \left\{ x : x \in \left[\frac{p_{k+1} - p_k}{2(x_{k+1} - x_k)} + \frac{p_k - p_{k-1}}{2(x_k - x_{k-1})}, 0 \right] \wedge t_1, t_2 \notin (x_k, x_{k+1}) \right\}, 1 < k < l, \\ \max \left\{ x : x \in \left[\frac{p_n - p_{n-1}}{(x_n - x_{n-1})}, 0 \right] \wedge t_1, t_2 \notin (x_{n-1}, x_n) \right\}, k = l. \end{cases}$$

Поскольку получаем *непрерывную оценку функции надежности Бреслоу*, которая является экспоненциальной оценкой [52], то целесообразно дополнить интервалы $(-\infty, x_1)$ и $(x_l, +\infty)$ соответствующими экспоненциальными функциями.

В итоге, *гладкая оценка Бреслоу* $\hat{S}(t)$ для функции надежности $S(t)$ примет окончательный вид:

$$\hat{S}(t) = \begin{cases} 1 - (p_1 - 1) \exp\left(\frac{m_1}{p_1 - 1} t\right) / \exp\left(\frac{m_1 x_1}{p_1 - 1}\right), t \leq x_1 \\ G\left(\frac{t - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right), x_k < t \leq x_{k+1}, k = \overline{1, l}, \\ p_l \exp\left(\frac{m_l}{p_l} t\right) / \exp\left(\frac{m_l x_l}{p_l}\right), t > x_l. \end{cases} \quad (4.8)$$

Приведем пример оценки $\hat{S}(t)$ и соответствующей оценки Бреслоу $\hat{S}_n^{Br}(t)$ на рисунке 4.17.

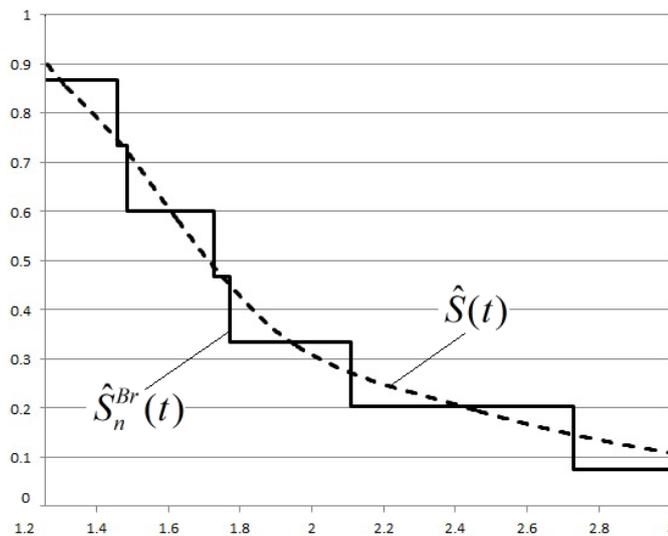


Рисунок 4.17 – Пример оценок $\hat{S}(t)$ и соответствующей $\hat{S}_n^{Br}(t)$

4.4.2 Алгоритм вычисления достигнутого уровня значимости по двум исходным выборкам в случае полных данных

Описанная гладкая оценка Бреслоу в соотношении (4.8) может быть также применена для вычисления достигнутого уровня значимости при проверке статистической гипотезы однородности в случае полных данных. Необходимые для этого действия описаны в Алгоритме 4.1.

Алгоритм 4.1. Вычисление достигнутого уровня значимости p_v для статистических критериев однородности по двум исходным выборкам Z_1, Z_2 объемами n_1, n_2 соответственно в случае полных данных $R(Z_1) = R(Z_2) = 0\%$:

1. Объединяем рассматриваемые выборки $Z = Z_1 \cup Z_2$;
2. По выборке Z строим непрерывную оценку Бреслоу $\hat{S}(t)$;

3. Моделируем $r_1 \sim U[0,1]$;
4. Моделируем $r_2 \sim U[0,1]$ (случайные величины r_1 и r_2 должны быть независимыми);
5. Вычисляем значение $v_i = \hat{S}^{-1}(r_1)$;
6. Вычисляем значения $w_i = \hat{S}^{-1}(r_2)$;
7. Пункты 3 и 5 повторяем n_1 раз, будет получена выборка $X_1 = \{(v_i, 1), i = \overline{1, n_1}\}$;
8. Пункты 4 и 6 повторяем n_2 раз, будет получена выборка $X_2 = \{(w_i, 1), i = \overline{1, n_2}\}$;
9. Используя выборки X_1 и X_2 , вычисляем значение статистики критерия $(S_{n_1, n_2}^*)_i$;
10. Шаги 3-9 повторяем N раз.
11. Из значений $(S_{n_1, n_2}^*)_i, i = \overline{1, N}$ получаем распределение статистики критерия однородности при справедливости нулевой гипотезы $G(S_{n_1, n_2}^* | H_0)$;
12. Используя распределение $G(S_{n_1, n_2}^* | H_0)$, вычисляем значение достигнутого уровня значимости p_v .

4.4.3 Сравнительный анализ погрешности вычисления достигнутого уровня значимости

Для того, чтобы оценить точность предложенного алгоритма 4.1 при вычислении достигнутого уровня значимости, приведем результаты статистического моделирования, в котором рассматривались разные способы вычисления достигнутого уровня значимости критерия однородности распределений:

1. значение достигнутого уровня значимости p_{v1} с использованием предельного распределения $G(S^* | H_0)$;

2. значение достигнутого уровня значимости pv_2 , вычисленное с помощью распределения $\hat{G}(S^* | H_0)$, которое получено с помощью метода Монте-Карло по известным законам распределения моментов отказа $F(t)$;
3. значение достигнутого уровня значимости pv_3 , вычисленное с помощью распределения $G(S_{n_1, n_2}^* | H_0)$, полученного из алгоритма 4.1.

Для статистического моделирования будем использовать закон распределения моментов отказа $F(t)$ Вейбулла-Гнеденко с параметрами формы и масштаба 2, объемы выборок $n_1 = n_2$ в диапазоне от 5 до 20 наблюдений, степени цензурирования $R(Z_1) = R(Z_2) = 0\%$, объем моделирования $N = 450\,000$ повторений (в таком случае погрешность вычисления pv_2 не будет превышать 0.0025 [104, 167]). В статистическом моделировании будем использовать следующие критерии однородности распределений: критерии Багдонавичуса-Никулина $S_{BN1}, S_{BN2}, S_{BN3}$, обобщенный Геханом критерий Уилкоксона S_G , логарифмический ранговый критерий S_{LG} и взвешенный критерий Каплана-Мейера S_{WKM} .

Процедура статистического моделирования состоит в следующем:

1. Моделируем две выборки Z_1 и Z_2 при справедливости гипотезы H_0 ;
2. По выборкам Z_1 и Z_2 из пункта 1 считаем значение статистики критерия однородности S_{n_1, n_2}^* ;
3. Для значения S_{n_1, n_2}^* вычисляем достигнутый уровень значимости pv_1 , используя предельное распределение статистик критерия;
4. Для значения S_{n_1, n_2}^* вычисляем достигнутый уровень значимости pv_2 , используя метод Монте-Карло (наиболее точная оценка достигнутого уровня значимости);
5. Для значения S_{n_1, n_2}^* вычисляем достигнутый уровень значимости pv_3 с использованием алгоритма 4.1;

6. Вычисляем отклонения между pv_1 и pv_2 , а также pv_2 и pv_3 .

Полученные результаты представим в таблицах 4.4, 4.5.

Таблица 4.4 – Сравнение точности вычисления достигнутого уровня значимости критериев однородности различными методами для $n_1, n_2 \in [5, 9]$

$n_1 = n_2$	Критерий	S_{n_1, n_2}^*	pv_1	pv_2	pv_3	$ pv_1 - pv_2 $	$ pv_2 - pv_3 $
5	S_{BN1}	1.084	0.582	0.667	0.667	0.085	0.000
	S_{BN2}	4.950	0.176	0.199	0.198	0.023	0.001
	S_{BN3}	4.318	0.115	0.143	0.143	0.028	0.001
	S_G	-0.522	0.602	0.691	0.691	0.089	0.001
	S_{LG}	-0.638	0.524	0.571	0.573	0.047	0.002
	S_{WKM}	1.871	0.061	0.040	0.040	0.022	0.000
7	S_{BN1}	0.798	0.671	0.740	0.740	0.069	0.000
	S_{BN2}	4.990	0.173	0.207	0.205	0.034	0.001
	S_{BN3}	1.231	0.540	0.608	0.608	0.068	0.000
	S_G	-0.703	0.482	0.534	0.535	0.051	0.001
	S_{LG}	-1.856	0.064	0.054	0.054	0.010	0.001
	S_{WKM}	-0.061	0.951	0.913	0.908	0.038	0.005
9	S_{BN1}	2.414	0.299	0.363	0.363	0.064	0.001
	S_{BN2}	0.826	0.843	0.908	0.908	0.065	0.000
	S_{BN3}	0.156	0.925	0.942	0.943	0.017	0.000
	S_G	-0.751	0.453	0.489	0.490	0.036	0.001
	S_{LG}	0.415	0.678	0.700	0.703	0.021	0.004
	S_{WKM}	1.071	0.284	0.258	0.255	0.026	0.003

Из полученных результатов можно сделать вывод о том, что предложенный метод (алгоритм 4.1) вычисления достигнутого уровня значимости имеет значительно меньшую погрешность, чем использование предельного распределения, т.к. отклонения $|pv_2 - pv_3|$ меньше, чем отклонения $|pv_1 - pv_2|$. Кроме того, предложенный метод не требует знания предельных законов распределения исходных данных, достаточно двух исходных выборок для построения совместной гладкой оценки функции надежности Бреслоу.

Таблица 4.5 – Сравнение точности вычисления достигнутого уровня значимости критериев однородности различными методами для $n_1, n_2 \in [15, 19]$

$n_1 = n_2$	Критерий	S_{n_1, n_2}^*	pv_1	pv_2	pv_3	$ pv_1 - pv_2 $	$ pv_2 - pv_3 $
15	S_{BN1}	1.639	0.441	0.491	0.492	0.050	0.001
	S_{BN2}	1.024	0.796	0.858	0.858	0.063	0.000
	S_{BN3}	0.735	0.692	0.722	0.722	0.030	0.001
	S_G	-1.597	0.110	0.116	0.114	0.006	0.002
	S_{LG}	0.882	0.378	0.396	0.395	0.019	0.001
	S_{WKM}	-0.346	0.729	0.731	0.731	0.002	0.000
17	S_{BN1}	3.036	0.219	0.263	0.262	0.043	0.000
	S_{BN2}	1.259	0.739	0.813	0.813	0.075	0.000
	S_{BN3}	1.180	0.554	0.588	0.589	0.034	0.001
	S_G	-0.189	0.850	0.866	0.864	0.016	0.001
	S_{LG}	-0.331	0.741	0.753	0.753	0.012	0.000
	S_{WKM}	0.628	0.530	0.528	0.532	0.002	0.004
19	S_{BN1}	3.832	0.147	0.181	0.182	0.034	0.000
	S_{BN2}	8.470	0.037	0.058	0.058	0.021	0.000
	S_{BN3}	0.303	0.860	0.871	0.871	0.012	0.000
	S_G	1.270	0.204	0.202	0.201	0.002	0.000
	S_{LG}	0.098	0.922	0.924	0.925	0.003	0.001
	S_{WKM}	-1.541	0.123	0.121	0.122	0.002	0.001

Использование метода вычисления достигнутого уровня значимости с использованием метода Монте-Карло взято за основу (как наиболее точное), поскольку это единственная оценка значения достигнутого уровня значимости, для которой можно корректно оценить погрешность ее вычисления. В данной задаче эта погрешность не превышает 0.0025.

4.5 Выводы

В данной главе представлены новые и модификации существующих статистических методов, которые могут быть применены для проверки гипотезы однородности распределений.

Был предложен новый статистический критерий однородности – критерий максимального значения, который является двухэтапным и основан на статистиках других известных критериев однородности. Для предложенного критерия был проведен сравнительный анализ мощности, из которого видно, что критерий максимального значения является более удобной альтернативой Q -критерию, т.к. не требует построения вспомогательных оценок, имеет фиксированное предельное распределение, а также на всех альтернативных гипотезах имеет мощность, близкую к наибольшей среди группы критериев: Пето, Гехана, Кокса-Мантела и логрангового.

Был предложен новый статистический критерий – критерий $MIN3$. Для разработанного критерия был проведен сравнительный анализ мощности на группах альтернативных гипотез с использованием правил Сэвиджа и Вальда (для принятия решений в условиях риска и неопределенности). Было показано, что для случайно цензурированных данных (степень цензурирования 10%-50%) на каждой группе альтернатив предложенный критерий является предпочтительным по правилу Сэвиджа, т.к. ему соответствуют наименьшие значения «сожалений», когда мы выбираем не лучший критерий для этой альтернативы. Кроме того, по правилу Вальда критерий $MIN3$ является одним из предпочтительных критериев вместе с критерием Багдонавичуса-Никулина (многократные пересечения). Это позволяет применять предложенный критерий в том случае, когда тип альтернативной гипотезы неизвестен.

Были предложены модификации критериев однородности средних Стьюдента и Крамера-Уэлча для случая цензурированных справа данных. Сравнительный анализ мощности критериев показал, что мощности критериев близки.

Была предложена непрерывная оценка функции надежности, основанная на интерполяционном сплайне Эрмита с непрерывной первой производной по значениям оценки Бреслоу. С использованием данной

непрерывной оценки Бреслоу был предложен алгоритм вычисления достигнутого уровня значимости по двум исходным выборкам. Статистическое моделирование показало, что применение предложенного алгоритма имеет значительно меньшую погрешность, чем использование предельного распределения на выборках конечного объема. Кроме того, предложенный метод вычисления достигнутого уровня значимости не требует знания предельных законов распределения исходных данных, достаточно двух исходных выборок для построения совместной гладкой оценки функции надежности Бреслоу.

ГЛАВА 5 ОПИСАНИЕ РАЗРАБОТАННОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ НА РЕАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В данной главе приведено краткое описание разработанного программного обеспечения, используемого для проведения статистического моделирования в рамках данной диссертационной работы, а также описано применение новых научных результатов для статистического контроля качества на действующих предприятиях химической (ФКП «Бийский олеумный завод») и пищевой промышленности (ООО «Российские мясопродукты – Холдинг»).

5.1 Описание разработанного программного обеспечения

В рамках диссертационной работы была разработана программная система для проведения статистического моделирования. Разработанная программная система позволяет:

1. вычислять значение статистик критериев однородности для полных и цензурированных справа наблюдений (не менее 10-ти статистик);
2. дополнять программную систему новыми статистическими критериями однородности;
3. строить различные оценки функции надежности по выборочным данным, отличные от множительной оценки Каплана-Мейера;
4. дополнять программную систему отсутствующими оценками функции надежности;
5. моделировать выборки, распределения наблюдений которых соответствуют одному из множества (не менее 20-ти) известных распределений;
6. моделировать распределение статистики критериев однородности как при справедливости гипотез H_0 , и H_1 ;

7. вычислять оценку значения мощности критериев по смоделированным распределениям статистики критерия $G(S_{n_1, n_2} | H_0)$ и $G(S_{n_1, n_2} | H_1)$.

Для разработки был использован язык программирования C++ [171], а также библиотека с открытым исходным кодом Boost C++ Libraries [172, 173], в которой реализованы методы обработки случайных величин.

Разработанная программная система обладает значительно большим набором статистических методов (критериев однородности распределений и оценок функции надежности) в сравнении с программными комплексами MatLab, Maple, Minitab Statistical Software и LiTiS. Более того, разработанная программная система может быть дополнена новыми методами.

Выбор языка программирования обосновывается тем фактом, что имеется возможность объектно-ориентированного подхода [174] при разработке и модификации статистических методов независимо друг от друга. Более наглядно используемая объектная структура (предок-наследник), используемая при разработке программного обеспечения (ПО), для критериев однородности показана на рисунке 5.1. Аналогична объектно-ориентированная модель для оценок функции надежности.



Рисунок 5.1 – Используемая объектно-ориентированная модель статистических критериев, используемая при разработке ПО

Выбор указанной библиотеки Boost C++ Libraries обосновывается тем фактом, что в ней реализованы большинство известных распределений случайных величин и готовые методы вычисления числовых характеристик случайных величин (квантиль, медиана, мода и др.), что в значительной мере

упрощает процесс статистического моделирования, основанного на методе обратной функции [175].

Таким образом, была разработана программная система с возможностью расширения своего функционирования на случай рассмотрения новых статистических критериев однородности и оценок функций надежности. Кроме того, разработанная программная система соответствует указанным выше условиям 1-7.

Разработанное программное обеспечение зарегистрировано (см. Приложение Б) в федеральной службе по интеллектуальной собственности, о чем имеется Свидетельство о государственной регистрации программы ЭВМ «Программа для вычисления значений статистик критериев однородности по двум выборкам» (Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2017615277 (2017 г.). – М.: Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент)).

5.2 Анализ процесса статистического контроля качества при производстве электродной продукции

Эффективно управлять качеством продукции – это значит активно использовать экономические и организационные рычаги воздействия на разработку, производство и эксплуатацию изделий. Для того чтобы выпускать продукцию высокого технического уровня и качества, необходимо эффективно управлять процессами формирования этих комплексных и обобщающих характеристик изделий [176].

Особое место в управлении качеством продукции занимает контроль качества. Именно контроль качества является одним из эффективных средств управления и способствует выпуску продукции высокого качества. Техническому контролю заслуженно отводится большая роль в современном производстве и управлении качеством продукции. От степени совершенства контроля качества, его технического оснащения и организации во многом зависит эффективность производства в целом [177].

Контроль является одной из важнейших функций действующей на предприятии системы управления качеством. Именно в процессе контроля осуществляется сопоставление фактически достигнутых результатов функционирования системы с запланированными. Современные методы контроля качества продукции, позволяющие при минимальных затратах достичь высокой стабильности показателей качества, приобретают все большее значение [178].

Одним из таких методов контроля качества является аппарат проверки статистических гипотез [2]. Используя собранную предприятием статистику, можно сделать выводы об эффективности работы производства и/или отдельных его подразделений.

Рассмотрим процесс контроля качества при производстве сварочных электродов, производимых ФКП «Бийский олеумный завод». Особенность данного производства заключается в том, что на стержень электрода наносится специальное сварочное покрытие. Чем равномернее (однороднее [151-158]) нанесено покрытие при обязательном достижении минимально допустимой толщины, тем эффективнее с технологической точки зрения получаемая электродная продукция, а также существенная экономия предприятием денежных средств на производство покрытия электрода.

5.2.1 Нормативные требования при производстве электродной продукции

Существует ряд стандартов, регулирующих требования к качеству продукции и определяющих процедуры статистического контроля качества.

Первым таким стандартом является ГОСТ 9466-75. Нормативные значения для разнотолщинности определены в п. 3.9 (см. таблицу 5.1), где в скобках указаны значения, допускаемые для 10% контролируемых электродов.

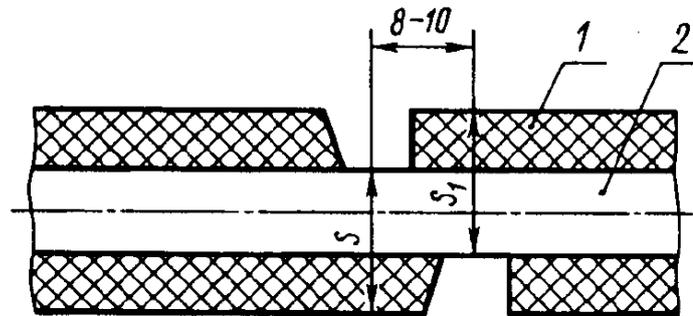
Согласно п. 4.6 для проверки соответствия электродов требованиям п.3.9 из разных пачек или коробок отбирают не менее 5 электродов от

каждой тонны, входящей в партию, но не менее 10 и не более 50 электродов от партии.

Таблица 5.1 – Нормативные значения разнотолщинности в соответствии с ГОСТ 9466-75

Номинальный диаметр электрода	Значение e для электродов	
	с тонким, средним и толстым покрытиями	с особо толстым покрытием для наплавки поверхностных слоев с особыми свойствами
1,6	0,08 (0,12)	0,12 (0,16)
2,0	0,10 (0,14)	0,15 (0,20)
2,5	0,12 (0,16)	0,18 (0,24)
3,0; 3,15	0,15 (0,20)	0,23 (0,28)
4,0	0,20 (0,26)	0,28 (0,34)
5,0	0,24 (0,32)	0,32 (0,40)
6,0; 6,3	0,28 (0,36)	0,36 (0,45)
Св. 6,3	0,30 (0,40)	0,40 (0,50)

В п.5.3 указывается, что разность толщины покрытия определяют в трех местах электрода, смещенных относительно друг друга на 50-100 мм по длине и на $(120 \pm 15)^\circ$ по окружности. При этом разность толщин равна $e = S - S_1$, где S и S_1 определяются как показано на рисунке 5.2.



1 — покрытие электрода; 2 — стержень электрода

Рисунок 5.2 – Порядок определения разности толщин покрытия

Вторым нормативным документом является постановление Госгортехнадзора РФ от 19 июня 2003 г. N 101 "Об утверждении Порядка применения сварочных материалов при изготовлении, монтаже, ремонте и реконструкции технических устройств для опасных производственных объектов" (РД 03-613-03). Согласно этому документу допускается

применение электродов, изготовленных по стандартам, разность покрытий не должна превышать значений, приведенных в таблице 5.2.

Таблица 5.2 – Нормативные значения разнотолщинности в соответствии с РД 03-613-03

Номинальный диаметр электродов, мм	Максимально допустимая разность толщины покрытия, мм
2,5	0,10
3,0	0,12
4,0	0,16
5,0	0,20

Сопоставляя требования стандарта ГОСТ 9466-75 и постановление Госгортехнадзора, можно отметить, что текущие требования являются более строгими.

Таким образом, при реализации статистического контроля необходимо обеспечить проверку соответствия требованиям, содержащихся в обоих нормативных документах, чтобы правильно классифицировать партии продукции.

5.2.2 Текущая организация контроля качества на предприятии

В настоящее время контроль качества продукции на предприятии осуществляется в три этапа.

Первый этап контроля проводится непосредственно на производстве, где отбирается 25 образцов из партии. Партия признается бракованной, если хотя бы один электрод не соответствует требованиям стандарта.

Второй этап производится в лаборатории, где сначала берется 30 электродов, и партия признается годной, если количество бракованных электродов не более одного, а при наличии двух и более бракованных – еще 60. Партия признается бракованной, если среди этих 60-ти присутствует более двух бракованных электродов. В лаборатории контроль проводится в трех точках каждого электрода (на краях и в середине).

Третий этап выполняется отделом технического контроля, где сначала анализируется два электрода и при наличии среди них одного бракованного выбирается еще четыре. Партия бракуется при наличии хотя бы одного (из четырех) неудовлетворяющего требованиям.

Используется процедура неразрушающего контроля, после проверки электроды возвращаются в партию продукции.

Таким образом, максимальное количество электродов, отбираемых из партии для контроля, составляет 121 штуку.

5.2.3 Статистический анализ сравнения распределений толщин покрытия электродов между разными партиями

Для проведения статистического контроля предприятием были предоставлены результаты измерений разнотолщинности партии за ноябрь 2012 года (замесы 197-431), с производства и из лаборатории. Проводится следующий вид статистического анализа: проверка однородности результатов измерений между разными партиями.

Для проведения анализа воспользуемся следующими статистическими критериями однородности: критериями Багдонавичуса-Никулина (обобщенная модель Кокса S_{BN1} , многократные пересечения S_{BN2} и однократные пересечения S_{BN3}). Выбор критериев связан с результатами сравнительного анализа статистической мощности критериев, полученных в главе 3 данной диссертационной работы.

При проведении статистического контроля для принятия статистического решения использовалась вероятность ошибки I-го рода $\alpha = 0.01$, т.е. вероятность признать две партии неоднородными, в то время, когда они на самом деле однородны, составляет 1%. Объем рассматриваемых выборок $n_1 = n_2 = n$ составлял не менее $n \geq 90$ наблюдений в каждой выборке.

Результаты представлены в таблицах 5.3-5.5 в виде достигнутых уровней значимостей, стоящих на пересечении распределений каждой партии

(данные распределения составлены из значений e , как показано на рисунке 5.2), и на рисунке 5.3 в виде графика распределений разностей толщин покрытия e для разных партий.

Таблица 5.3 – Достигнутые уровни значимости между распределениями разностей толщины e разных партий для статистики S_{BN1}

№	Номер партии															
	199	200	201	208	299	302	306	308	404	411	414	417	419	424	426	431
197	0.91	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
199		0.00	0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
200			0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.08	0.00	0.00	0.09	0.00	0.00
201				0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
208					0.00	0.32	0.20	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
299						0.00	0.00	0.75	0.01	0.12	0.00	0.02	0.12	0.00	0.02	0.00
302							0.89	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
306								0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
308									0.10	0.21	0.00	0.13	0.21	0.01	0.14	0.00
404										0.04	0.01	0.45	0.04	0.00	0.35	0.16
411											0.01	0.18	1.00	0.05	0.18	0.00
414												0.19	0.01	0.48	0.30	0.30
417													0.18	0.09	0.93	0.80
419														0.05	0.18	0.00
424															0.15	0.03
426																0.52

Таблица 5.4 – Достигнутые уровни значимости между распределениями разностей толщины e разных партий для статистики S_{BN2}

№	Номер партии															
	199	200	201	208	299	302	306	308	404	411	414	417	419	424	426	431
197	0.57	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
199		0.00	0.15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
200			0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00
201				0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
208					0.00	0.21	0.33	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
299						0.00	0.00	0.22	0.01	0.24	0.00	0.06	0.24	0.00	0.05	0.00
302							0.23	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
306								0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
308									0.03	0.22	0.00	0.16	0.22	0.00	0.18	0.00
404										0.08	0.03	0.32	0.08	0.01	0.37	0.29
411											0.02	0.33	1.00	0.08	0.32	0.01
414												0.17	0.02	0.71	0.43	0.43
417													0.33	0.09	0.94	0.40
419														0.08	0.32	0.01
424															0.19	0.07
426																0.51

В статистических выводах между критериями имеются различия: на одной и той же паре выборок разными критериями делаются разные статистические выводы (одними критериями гипотеза однородности не

отклоняется, а другими – отклоняется). Однако среди общей совокупности полученных статистических выводов прослеживается общая закономерность, что гипотеза однородности распределений отклоняется гораздо чаще, чем принимается (из 136 пар конкурирующих гипотез однородными были признаны: по критериям Багдонавичуса-Никулина – 33%, 34% и 30%).

Таблица 5.5 – Достигнутые уровни значимости между распределениями разностей толщины e разных партий для статистики S_{BN3}

№	Номер партии																
	199	200	201	208	299	302	306	308	404	411	414	417	419	424	426	431	
197	0.95	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
199		0.00	0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
200			0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00
201				0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
208					0.00	0.47	0.41	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
299						0.00	0.00	0.87	0.00	0.13	0.00	0.06	0.13	0.00	0.07	0.00	0.00
302							0.64	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
306								0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
308									0.03	0.13	0.00	0.17	0.13	0.00	0.17	0.01	0.01
404										0.01	0.00	0.28	0.01	0.00	0.19	0.18	0.18
411											0.02	0.20	1.00	0.06	0.24	0.01	0.01
414												0.16	0.03	0.54	0.27	0.19	0.19
417													0.22	0.05	0.95	0.73	0.73
419														0.06	0.24	0.01	0.01
424															0.10	0.01	0.01
426																	0.44

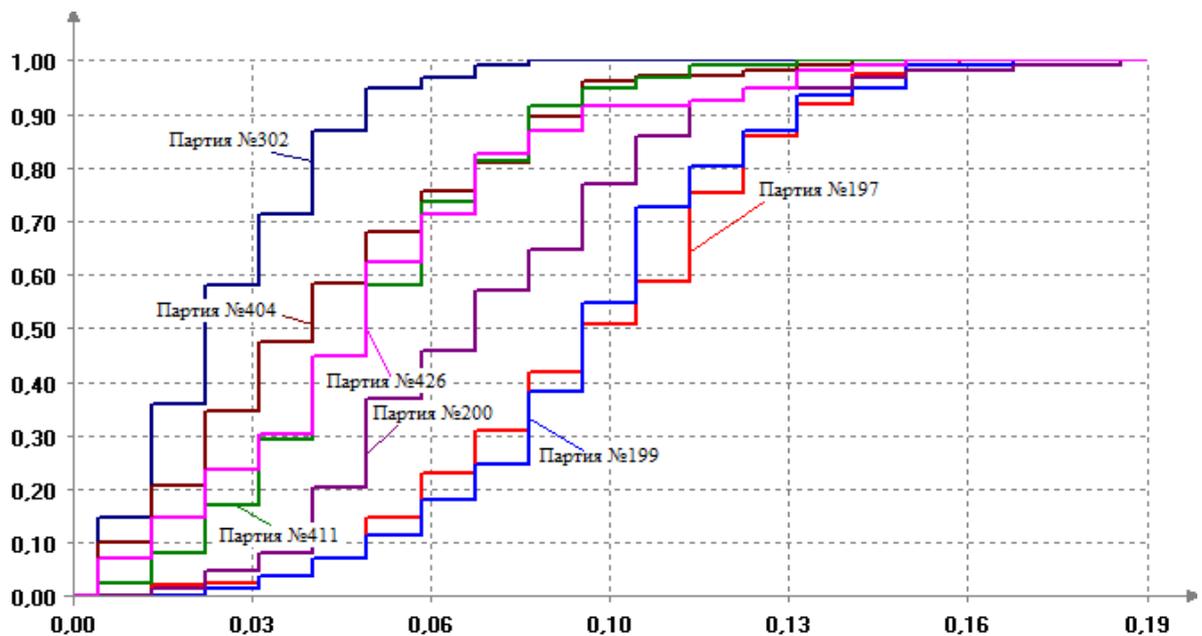


Рисунок 5.3 – Распределения разностей толщин покрытия для разных партий

Так как никакой дополнительной информации о характере конкурирующих гипотез нет, следовательно, стоит воспользоваться некоторым критерием однородности распределений, который был бы предпочтительным в случае, когда альтернативная гипотеза неизвестна. Таким критерием является предложенный критерий $MIN3$ на основе статистик критериев Багдонавичуса-Никулина [63, 64] и взвешенного критерия Каплана-Мейера [53].

Приведем аналогичные результаты достигнутых уровней значимости для указанного критерия со статистикой S_{MIN3} в таблице 5.6.

Таблица 5.6 – Достигнутые уровни значимости между распределениями разностей толщины e разных партий для статистики S_{MIN3}

№	Номер партии															
	199	200	201	208	299	302	306	308	404	411	414	417	419	424	426	431
197	0.80	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
199		0.00	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
200			0.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.00	0.00	0.05	0.00	0.00
201				0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
208					0.00	0.39	0.55	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
299						0.00	0.00	0.39	0.01	0.25	0.00	0.15	0.25	0.00	0.11	0.00
302							0.41	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
306								0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
308									0.07	0.26	0.00	0.32	0.26	0.01	0.32	0.01
404										0.03	0.01	0.49	0.03	0.00	0.36	0.34
411											0.04	0.38	1.00	0.14	0.44	0.02
414												0.31	0.04	0.77	0.47	0.35
417													0.40	0.12	1.00	0.63
419														0.14	0.44	0.02
424															0.21	0.03
426																0.68

Результаты применения нового критерия однородности со статистикой S_{MIN3} показывают, что среди всей совокупности пар конкурирующих гипотез (136 пар) лишь только в 35% случаях гипотеза однородности не отклоняется.

Стоит также отметить тот факт, что распределения выборок, составленных из значений ранних партий 197-306, чаще оказываются неоднородными, в отличие от распределений выборок, составленных из значений более поздних партий, начиная с 308-й. Это можно увидеть по величине достигнутых уровней значимости в таблице 5.6 и по функциям

распределений на рисунке 5.3. Возможно были внесены изменения в технологический процесс производства электродов и получаемые распределения отклонений толщин покрытия электродов стали стабильно однородными, либо точность регистрируемых отклонений была увеличена за счет настройки/наладки регистрирующего оборудования.

Таким образом, по результатам проведенных исследований можно заключить: имеются статистически значимые различия результатов контроля, что позволяет с большой достоверностью утверждать о различии распределений разнотолщинности (между партиями 197-306), что возможно при нарушении технологического процесса производства, наличии различий в методах измерений и/или способах их регистрации. Полученные результаты позволяют сделать следующие рекомендации: провести проверку используемых приборов контроля и унификацию способов регистрации измерений, например, с помощью автоматизированной системы записи измерений в единую базу данных результатов контроля с целью дальнейшего анализа однородности распределений, соответствующих различным партиям.

5.3 Анализ процесса статистического контроля качества при производстве колбасной продукции

Рассмотрим процесс статистического контроля качества при производстве колбасной продукции, производимой ОАО «Российские мясопродукты – Холдинг». Особенность данного производства заключается в наполнении оболочки каждой единицы продукции колбасным фаршем. Масса фарша – это регламентированная величина, которая не должна зависеть от типа и вида используемого оборудования. Однако на практике по ряду причин (например, настройка оборудования, качество входного сырья, уровень квалификации персонала и др.) фактическая масса единицы штучной продукции отличается от соответствующей регламентированной. В том случае, если фактическая масса превышает регламентированную, то происходит неплановый перерасход сырья, и предприятие несет убытки,

иначе – предприятие несет убытки в виде штрафных санкций со стороны контролирующего государственного органа.

В связи с этим необходимы контрольные мероприятия по исследованию фактической массы штучной продукции. Необходимо, чтобы партии производимой продукции были близки к некоторому эталону продукции, что позволит эффективнее контролировать качество готовой штучной продукции.

5.3.1 Нормативные требования при производстве колбасной продукции

Существует стандарт, регулирующий пределы допустимых отклонений в массе или объеме продукции. Таким стандартом является ГОСТ 8.579-2002. В зависимости от весовой группы продукта (от 100 до 200 гр., от 200 и до 300 гр. и др.) в соответствии с данным нормативным документом установлены разные допустимые отклонения. С допустимыми отклонениями можно ознакомиться в таблице 5.7.

Таблица 5.7 – Предел допускаемых отрицательных отклонений содержимого нетто от номинального количества (не более 10 кг или 10 л)

Номинальное количество нетто, г или мл	Предел допускаемых отрицательных отклонений	
	%	г или мл
(5,50]	9	–
(50,100]	–	4,5
(100,200]	4,5	–
(200,300]	–	9
(300,500]	3	–
(500,1 000]	–	15
(1 000,10 000]	1,5	–

В соответствие с таблицей 5.7 для каждого наименования готовой продукции по ее соответствующей регламентированной массе определяется весовая категория ((5,50],(50,100] и др.). Для найденной весовой категории

определяется допустимое отклонение между фактической и регламентируемой массами продукции. В том случае, если фактическая масса меньше регламентируемой массы с учетом допустимого отклонения, то для производителя предусмотрены штрафные санкции за каждую единицу продукции.

Так, например, для штучной продукции, регламентируемая масса которой составляет 380 грамм, допустимое отклонение составляет 3%, т.е. 11.4 грамм. Следовательно, если фактическая масса хотя бы одной единицы такой продукции будет менее 368.6 грамм, то производителю может грозить штраф.

Таким образом, при реализации статистического контроля необходимо также обеспечить выполнение требований, содержащихся в указанном нормативном документе.

5.3.2 Текущая организация контроля качества на предприятии

В настоящее время с целью выполнения установленных норм указанного нормативного документа к регламентированной массе продукта добавляется величина, равная значению установленного допустимого отклонения. В итоге, для такой штучной продукции величина допустимого отклонения дополнительно увеличивается.

Например, для штучной продукции с регламентируемой массой 380 грамм допустимое отклонение составляет 11.4 грамм. Следовательно, предприятием закладывается завышенная регламентированная масса 391.4 грамма, что на $2 \cdot 11.4 = 22.8$ грамма превышает минимально допустимую массу штучной продукции.

Таким образом, для выполнения установленных норм соответствующего нормативного документа производитель вынужден закладывать больший объем сырья на производство того же самого регламентированного объема штучной продукции.

5.3.3 Статистический анализ сравнения распределений масс одинаковой колбасной продукции

Существующие методики контроля качества основаны либо на контроле значений средних [180] или дисперсий [180], либо на выполнении предположения о том, что исходные данные распределены по нормальному распределению [8]. Такие методы не учитывают в должной мере всю имеющуюся информацию о виде распределения. Поэтому более эффективный способ статистического управления качеством продукции заключается в том, чтобы производить сравнение некоторой произведенной продукции с некоторой эталонной партией. В таком случае распределение масс штучной продукции не будет иметь значимых отклонений (как вверх, так и вниз).

Определить массу каждой единицы штучного колбасной продукции не представляется возможным, поэтому была использована следующая схема статистического анализа масс колбасной продукции, которая позволяет контролировать, что технологический процесс не претерпел статистически значимых изменений ни на одном этапе производства:

Во-первых, в составе комиссии, состоящей из членов инженерно-технической службы (ИТС), технологической службы (ТС) и отдела контроля качества (ОКК), проводится контрольная выработка продукции с тотальным контролем всех технологических этапов в соответствии с технологической картой продукта. В результате работы такой комиссии получается эталонная партия, к которой должны быть близки все остальные партии. Каждая единица штучной продукции из эталонной партии взвешивается. В итоге, получается *контрольная выборка*, состоящая из значений фактических масс колбасной продукции под специальным контролем.

Во-вторых, в обычном режиме работы производства взвешивается некоторое случайное количество единиц колбасной продукции определенной партии. В итоге, получается *тестовая выборка*, состоящая из значений фактических масс колбасной продукции, выпущенной производством.

В-третьих, используя *контрольную* и *тестовые* выборки, проверяется статистическая гипотеза однородности распределений, т.к. при выполнении этой гипотезы H_0 гарантируется, что тестовая и контрольная выработки отличаются статистически незначимо. В противном случае это сигнал, что в производственном процессе имеет место сбой, т.к. различия статистически значимые и могут привести в последствие к получению штучной продукции несоответствующего качества.

Для проведения статистического контроля был рассмотрен один и тот же продукт с регламентированной массой 380 грамм. Для этого продукта были получены контрольная выборка, состоящая из масс штучной колбасной продукции при специальном контроле производства, и тестовые выборки за разные даты. Произведем проверку статистической гипотезы однородности всевозможных пар контрольной и тестовых выборок. Для проверки статистической гипотезы воспользуемся следующими критериями: Андерсона-Дарлинга-Петита S_{ADP} , Багдонавичуса-Никулина S_{BN1} , S_{BN2} , S_{BN3} , а также критериями максимального значения и $MIN3$ со статистика S_{MAX} и S_{MIN3} . Выбор этих статистических критериев связан с полученными результатами сравнительного анализа мощности критериев в главе 3 и в главе 4. Для вычисления достигнутого уровня значимости указанных критериев воспользуемся алгоритмом 4.1, описанным в главе 4 данной диссертационной работы (объем компьютерного моделирования $N = 2.7 \cdot 10^6$). Для проведения статистического эксперимента будем использовать вероятность ошибки I-го рода 1%, т.е. $\alpha = 0.01$. Результаты статистического контроля представлены в таблицах 5.8-5.11 и на рисунках 5.4-5.7.

Из полученных результатов очевидно, что для тестовых партий от 18, 19 и 26 февраля 2016 года справедливо утверждение о том, что распределения масс штучной колбасной продукции, произведенной в обычном режиме, значимо не отличаются от распределения масс эталонной

колбасной продукции для одного продукта. Достоверность данного утверждения определяется мощностью критериев.

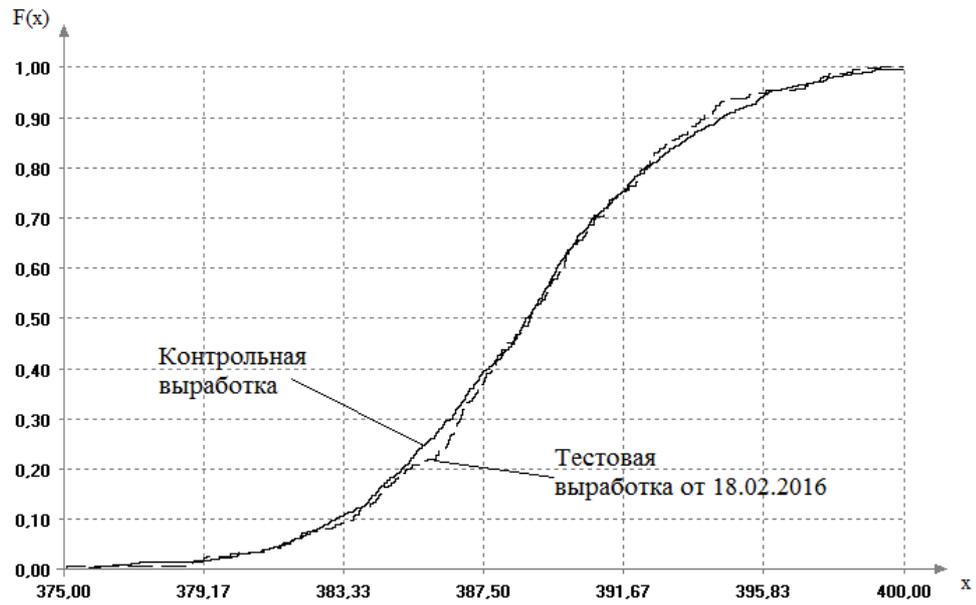


Рисунок 5.4 – Распределения масс выборок контрольной и тестовой (от 18.02.2016)

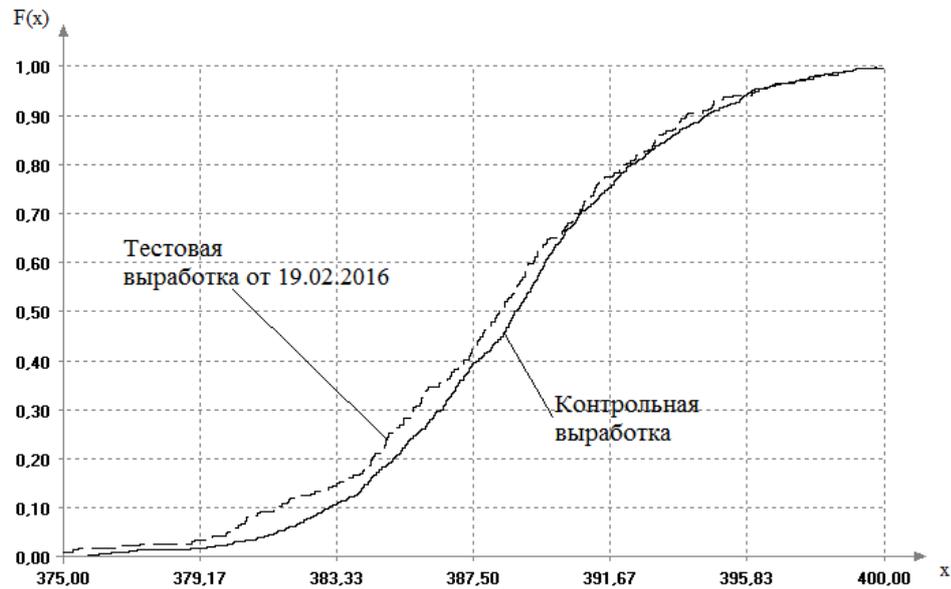


Рисунок 5.5 – Распределения масс выборок контрольной и тестовой (от 19.02.2016)

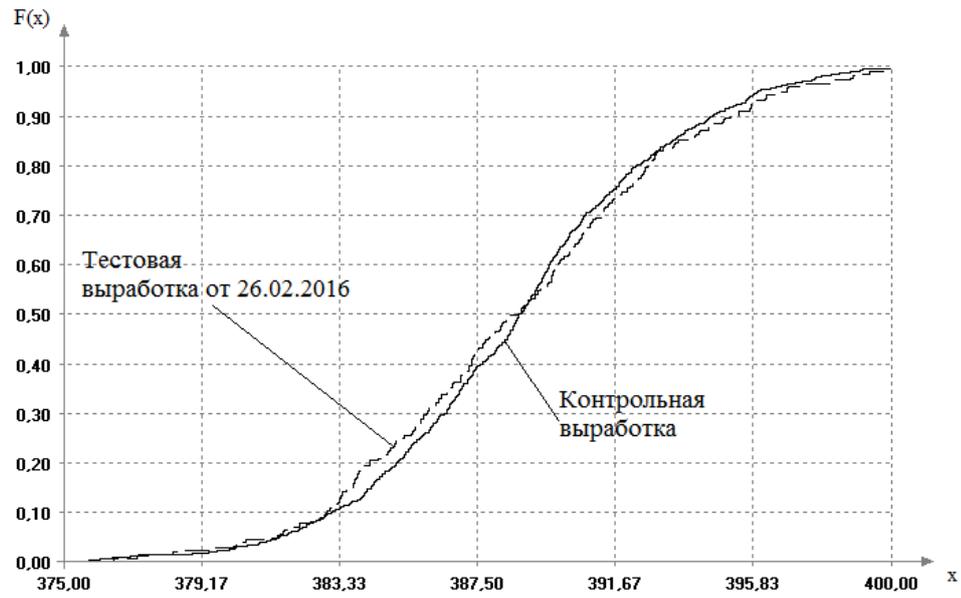


Рисунок 5.6 – Распределения масс выборок
контрольной и тестовой (от 26.02.2016)

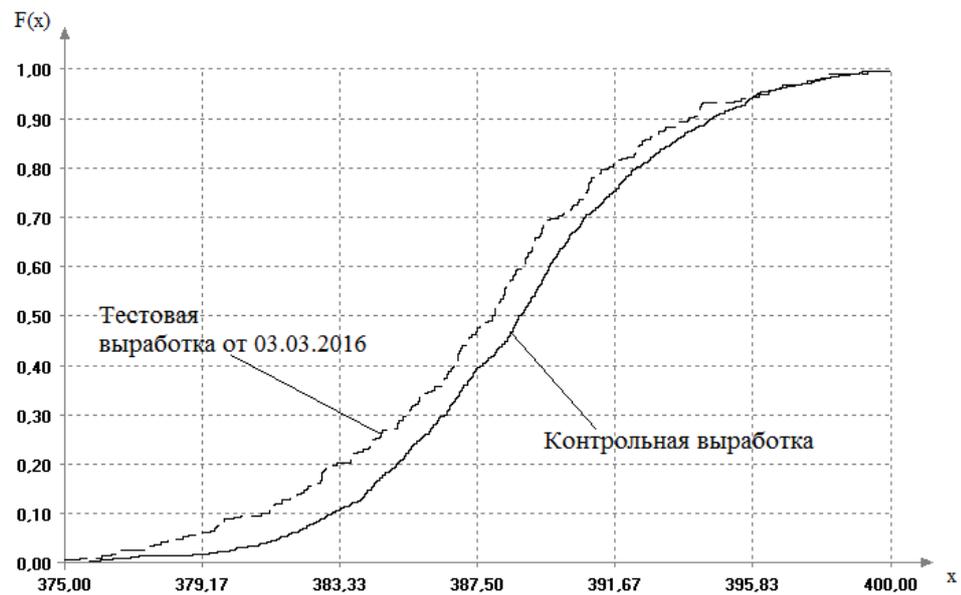


Рисунок 5.7 – Распределения масс выборок
контрольной и тестовой (от 03.03.2016)

Таблица 5.8 – Результаты проверки статистической гипотезы между контрольной $n_1 = 973$ и тестовой $n_2 = 243$ (от 18.02.2016) выборками

Критерий	Значение достигнутого уровня значимости p_v	Статистический вывод
S_{ADP}	0.8621	Нет оснований для отклонения гипотезы H_0
S_{BN1}	0.4415	Нет оснований для отклонения гипотезы H_0
S_{BN2}	0.6440	Нет оснований для отклонения гипотезы H_0
S_{BN3}	0.4599	Нет оснований для отклонения гипотезы H_0
S_{MAX}	0.8859	Нет оснований для отклонения гипотезы H_0
S_{MIN3}	0.6968	Нет оснований для отклонения гипотезы H_0

Таблица 5.9 – Результаты проверки статистической гипотезы между контрольной $n_1 = 973$ и тестовой $n_2 = 245$ (от 19.02.2016) выборками

Критерий	Значение достигнутого уровня значимости p_v	Статистический вывод
S_{ADP}	0.1045	Нет оснований для отклонения гипотезы H_0
S_{BN1}	0.2372	Нет оснований для отклонения гипотезы H_0
S_{BN2}	0.4040	Нет оснований для отклонения гипотезы H_0
S_{BN3}	0.1883	Нет оснований для отклонения гипотезы H_0
S_{MAX}	0.1660	Нет оснований для отклонения гипотезы H_0
S_{MIN3}	0.2417	Нет оснований для отклонения гипотезы H_0

Таблица 5.10 – Результаты проверки статистической гипотезы между контрольной $n_1 = 973$ и тестовой $n_2 = 238$ (от 26.02.2016) выборками

Критерий	Значение достигнутого уровня значимости p_v	Статистический вывод
S_{ADP}	0.4085	Нет оснований для отклонения гипотезы H_0
S_{BN1}	0.3713	Нет оснований для отклонения гипотезы H_0
S_{BN2}	0.4453	Нет оснований для отклонения гипотезы H_0
S_{BN3}	0.2649	Нет оснований для отклонения гипотезы H_0
S_{MAX}	0.6338	Нет оснований для отклонения гипотезы H_0
S_{MIN3}	0.4637	Нет оснований для отклонения гипотезы H_0

Таблица 5.11 – Результаты проверки статистической гипотезы между контрольной $n_1 = 973$ и тестовой $n_2 = 256$ (от 03.03.2016) выборками

Критерий	Значение достигнутого уровня значимости p_v	Статистический вывод
S_{ADP}	0.0005	Гипотеза H_0 отклоняется
S_{BN1}	0.0017	Гипотеза H_0 отклоняется
S_{BN2}	0.0059	Гипотеза H_0 отклоняется
S_{BN3}	0.0011	Гипотеза H_0 отклоняется
S_{MAX}	0.0019	Гипотеза H_0 отклоняется
S_{MIN3}	0.0038	Гипотеза H_0 отклоняется

Тем не менее, для тестовой выборки от 03.03.2016 было получено, что справедливость рассматриваемой гипотезы отклонена. Это означает, что для полученной штучной продукции требуется провести профилактические работы на предмет наличия нарушений требований технологических карт.

Таким образом, была предложена процедура статистического контроля, основанная на проверке статистической гипотезы однородности распределений, которая применяется для контроля качества на действующем производстве, о чем имеется Акт о внедрении (см. Приложение В).

5.4 Выводы

На основе результатов, полученных в главах 1-3, данной диссертационной работы разработана программная система для проведения статистического моделирования в рамках настоящей диссертационной работы. Кроме того, данная программа для вычисления значения статистик критериев однородности распределений прошла государственную регистрацию программы ЭВМ.

Полученные результаты и разработанные статистические методы были использованы в задачах статистического контроля качества на предприятиях химической (для сравнения однородности нанесения сварочного слоя при производстве электродной продукции между разными партиями) и пищевой промышленности (для статистического контроля распределений масс

штучной колбасной продукции между контрольной и тестовой выработками), что подтверждается наличием Акта о внедрении.

Полученные результаты исследований опубликованы в [105, 170].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В соответствии с поставленными задачами исследования были получены следующие основные результаты:

1. Для статистических критериев однородности распределений была исследована скорость сходимости распределений статистик критериев однородности к соответствующим предельным распределениям в случае цензурированных справа наблюдений. Для непараметрических критериев однородности распределений (критерии Гехана, Пето, Кокса-Мантела, Багдонавичуса-Никулина и логранговые) были найдены объемы выборок, начиная с которых, погрешность вычисления достигнутого уровня значимости при использовании предельного распределения не превышает 0.01. Результаты справедливы для степеней цензурирования 0%-50%.

2. Для статистических критериев однородности распределений, как для полных наблюдений, так и для цензурированных справа наблюдений (при степени цензурирования 0%–50%) был проведен сравнительный анализ мощности относительно сформированных групп близких альтернативных гипотез. Было установлено, что в случае полных наблюдений высокую мощность имеют критерии Андерсона-Дарлинга-Петита и Багдонавичуса-Никулина (многократные пересечения), в цензурированном случае – критерий Багдонавичуса-Никулина (многократные пересечения).

Было показано влияние на мощность критериев однородности неравных объемов, степеней цензурирования выборок и закона распределения моментов цензурирования. Если наибольшие отклонения между функциями надежности расположены в ранние моменты времени, то рост степени цензурирования способствует росту мощности, в поздние моменты времени – снижению мощности.

3. Для проверки статистической гипотезы однородности распределений был предложен критерий максимального значения, который в сравнении с Q -критерием не уступает последнему в мощности и имеет более простой способ вычисления статистики, а также имеет мощность, близкую к

наибольшей среди группы статистических критериев – критерии Гехана, Пето, Кокса-Мантела и логрангового.

4. Для проверки статистической гипотезы однородности распределений был предложен критерий $MIN3$, выбор которого в соответствии с правилом Сэвиджа является оптимальной стратегией при рассмотренных степенях цензурирования 10%-50%, а в соответствии с правилом Вальда критерий $MIN3$ является одним из предпочтительных критериев при всех рассмотренных степенях цензурирования 10%-50%. Это позволяет рекомендовать использование критерия в случае неопределенности типа альтернативной гипотезы.

5. Для проверки статистической гипотезы однородности были предложены модификации параметрических критериев однородности средних Стьюдента и Крамера-Уэлча с использованием непараметрической оценки функции надежности Абдушукурова для случая цензурированных справа данных.

6. Была предложена непрерывная оценка функции надежности (гладкая оценка Бреслоу), основанная на интерполяционном сплайне Эрмита с непрерывной первой производной по значениям непараметрической оценки функции надежности Бреслоу.

7. Для проверки статистической гипотезы однородности с помощью разработанной гладкой оценки Бреслоу был предложен метод вычисления достигаемого уровня значимости по двум исходным полным выборкам. Результаты статистического моделирования показывают, что погрешность вычисленного достигнутого уровня значимости с помощью предложенного метода ниже, чем от применения соответствующего предельного распределения на выборках конечного объема.

8. На основе полученных результатов разработана программная среда для вычисления значения статистики критериев однородности и для проведения статистического моделирования в рамках настоящей диссертационной работы, как для полных, так и для цензурированных справа

наблюдений. Разработанная программная система прошла государственную регистрацию, предусмотренную для программ ЭВМ.

Научные результаты и разработанная программная система, полученные в рамках данной диссертационной работы, были использованы для статистического контроля качества на предприятии химической промышленности ФКП «Бийский олеумный завод», были внедрены в практику деятельности предприятия пищевой промышленности ООО «Российские мясопродукты – Холдинг», а также нашли практическое применение в учебном процессе на факультете прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет», что подтверждается соответствующими актами о внедрении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. Справочник для инженеров и научных работников. – М.: Физматлит, 2006. – 816 с.
2. Леман Э. Проверка статистических гипотез. М., Наука, 1979.
3. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983. - 416 с.
4. Кокс Д., Хинкли Д., Теоретическая статистика. М., Мир, 1978.
5. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Под ред. Ю.В. Прохорова. – М.: Большая российская энциклопедия, 2003. – 912 с.
6. Лемешко Б. Ю. Об устойчивости и мощности критериев проверки однородности средних / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // Измерительная техника. - М: ФГУП «Рос. науч.-техн. центр информации по стандартизации, метрологии и оценке соответствия», 2008. - № 9. – С.23-28.
7. Шеффе Г. Дисперсионный анализ. - М.: Физматгиз, 1980. - 628 с.
8. Орлов А.И. О проверке однородности двух независимых выборок // Заводская лаборатория. – 2003. – Т.69. №.1. – С.55-60.
9. Douglas A. Wolfe (1977) Two-Stage Two-Sample Median Test, Technometrics, 19:4, 495-501
10. Смирнов Н.В. Оценка расхождения между эмпирическими кривыми распределения в двух независимых выборках // Бюллетень МГУ, серия А. – 1939. – Т.2. №2. – С.3-14.
11. Smirnov N (1948). "Table for estimating the goodness of fit of empirical distributions". Annals of Mathematical Statistics. 19: 279–281.
12. Kolmogorov A (1933). "Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione". G. Ist. Ital. Attuari. 4: 83–91.
13. Glivenko, V. (1933). Sulla determinazione empirica della legge di probabilita. Giorn. Ist. Ital. Attuari 4, 92-99.

14. Cantelli, F. P. (1933). Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilita. Giorn. Ist. Ital. Attuari 4, 221-424.
15. Lehmann E.L. Consistency and unbiasedness of certain nonparametric tests / Ann. Math. Statist. – 1951. V.22. № 1. – P.165-179.
16. Rosenblatt M. Limit theorems associated with variants of the von Mises statistic // Ann. Math. Statist. – 1952. V.23. – P.617-623.
17. Крамер Г. Математические методы статистики. М., Мир. 1975
18. Anderson T.W., and Darling D.A. A test of goodness of fit // J. Amer. Stist. Assoc., 1954. V.29. – P.765-769.
19. Jin Zhang (2006) Powerful Two-Sample Tests Based on the Likelihood Ratio, Technometrics, 48:1, 95-103, DOI: 10.1198/004017005000000328
20. Mann, N. R.; et al. (1975). Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data. New York: Wiley. ISBN 047156737X.
21. Miller, Rupert G. (1997), Survival analysis, John Wiley & Sons, ISBN 0-471-25218-2
22. Cox D.R. and Oakes D. (1984). Analysis of Survival Data. Chapman and Hall, New York.
23. Kalbfleisch J.D. and Prentice R.L. (2002). The Statistical Analysis of Failure Time Data. Second Edition. Wiley, New York.
24. Половко А. М., Гуров С.В. Основы теории надежности / А. М. Половко, С.В. Гуров // СПб: БХВ-Петербург. – 2006. – 704 с.
25. Антонов, А.В. Статистические модели в теории надежности: Учеб. пособие. / А.В. Антонов, М.С. Никулин. - М.: Абрис, 2012. – 390 с.
26. Антонов, А.В. Теория надежности. Статистические модели: Учеб. пособие. / А.В. Антонов, М.С. Никулин, А.М. Никулин, В.А. Чепурко. – М.: ИНФРА-М, 2015. – 576 с.
27. Аронов, И.З. Оценка надежности по результатам сокращенных испытаний. / И.З. Аронов, Е.И. Бурдасов. - Москва: Изд-во стандартов, 1987. – 184 с.

28. Гнеденко, Б.В. Математические методы в теории надежности. / Б.В. Гнеденко, Ю.К. Беляев, А.Д. Соловьев. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
29. Острейковский, В.А. Теория надежности: Учебник для вузов. / В.А. Острейковский. – М.: Высш. шк., 2003. – 463 с.
30. Скрипник, В.М. Анализ надежности технических систем по цензурированным выборкам. / В.М. Скрипник, А.Е. Назин, Ю.Г. Приходько, Ю.Н. Благовещенский. – М.: Радио и связь, 1988. – 183 с.
31. Bagdonavicius, V. Modelling and testing of presence of hazard rates crossing under censoring / V. Bagdonavicius, R. Levulienė, M. Nikulin // *Communication in Statistics- Simulation and Computation*. – 2012. – Vol. 41. No. 7. – P. 980-991.
32. Абдушукуров А.А., Статистика неполных наблюдений. Асимптотическая теория оценивания для неклассических моделей / А.А. Абдушукуров. – Ташкент: Университет, 2009 – 270 с.
33. Balakrishnan, N. Left truncated and right censored Weibull data and likelihood inference with an illustration / N. Balakrishnan, D. Mitra // *Computational statistics and data analysis*. – 2012. – Vol. 56. – P. 4011-4025.
34. Cox D.R., *Statistical analysis and survival data: an introduction*. Annual Cardiac Surgery, - 1992. - 97-100.
35. Nelson, W. (1969). Hazard plotting for incomplete failure data, *Journal of Quality Technology* 1, 27–52.
36. Gehan E. A. “A Generalized Wilcoxon Test for Comparing Arbitrarily Singly-Censored Samples”, *Biometrika*, vol. 52, num. 1/2, 1965, p. 203-223.
37. Peto R., Peto J. “Asymptotically efficient rank invariant test procedures”, *Journal of the Royal Statistical Society, Series A (General)*, vol. 135, num. 2, 1972, p. 185-207.
38. Wilcoxon, F. (1945). Individual comparisons by ranking methods. *Biometrics*, 1, 80-83.

39. Schumacher, M. (1984). Two-sample tests of the Cramer-von Mises and Kolmogorov-Smirnov type for randomly censored data. *International Statistical Review* 52, 263-281.
40. Tommaso Gastaldi (1991) Generalized two sample kolmogorov-smirnov test involving a possibly censored sample, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 20:1, 365-373, DOI: 10.1080/03610919108812957
41. James A. Koziol & David P. Byar (1975) Percentage Points of the Asymptotic Distributions of One and Two Sample K-S Statistics for Truncated or Censored Data, *Technometrics*, 17:4, 507-510
42. Pablo Martinez-Cambor (2011) Testing the equality among distribution functions from independent and right censored samples via Cramer-von Mises criterion, *Journal of Applied Statistics*, 38:6, 1117-1131, DOI: 10.1080/02664763.2010.484486
43. Koziol J. A two-sample Cramer-von Mises test for randomly censored data. *Biometrical Journal* 1978; 20:603-608.
44. Kaplan, E. L. and Meier, P. (1958). Nonparametric Estimation from Incomplete Observations. *Journal of the American Statistical Association*, 53: 457-481.
45. Zhou, Mai. Some Properties of the Kaplan-Meier Estimator for Independent Nonidentically Distributed Random Variables. *Ann. Statist.* 19 (1991), no. 4, 2266-2274.
46. Rich J.T., Neely J.G., Paniello R.C., Voelker C.C., Nussenbaum B., Wang E.W. (2010). "A practical guide to understanding Kaplan-Meier curves.". *Otolaryngol Head Neck Surg.* 143 (3): 331-6.
47. Breslow NE (1972) Discussion of the paper by D. R. Cox. *J R Statist Soc B* 34:216-217
48. Breslow, N.E. and Crowley, J.J. (1974), A large sample study of the life table and the product limit estimates under random censorship. *Ann. Statist.* 2, 437-453.

49. Lin, D.Y. Lifetime Data Analysis (2007). "On the Breslow estimator". 13: 471. doi:10.1007/s10985-007-9048-y
50. Hanley, J.A. (2008). "The Breslow estimator of the nonparametric baseline survivor function in Cox's regression model: some heuristics". *Epidemiology*. January, 2008. Vol.19, №1: pp.101-102. DOI: 10.1097/EDE.0b013e31815be045
51. A.A. Abdushukurov (1998). Nonparametric estimation of the survival function from censored data based on relative risk function, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 27:8, 1991-2012, DOI:10.1080/03610929808832205
52. А.А. Абдушукуров, Р.С. Мурадов (2014). "Об оценках функции распределения в моделях случайного цензурирования", *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. – 11.2014. №11(80).
53. M.S. Pepe and T.R. Fleming, Weighted Kaplan–Meier statistics: A class of distance tests for censored survival data, *Biometrics* 45 (1989), pp. 497–507.
54. Mantel, N. (1966). Evaluation of Survival Data and Two New Rank Order Statistics Arising in Its Consideration. *Cancer Chemotherapy Reports*, 50, 163–170.
55. Savage, I. R. (1956). Contributions to the Theory of Rank Order Statistics: The Two Sample Case. *Annals of Mathematical Statistics*, 27, 590–615.
56. Mantel, N. (1966). Evaluation of Survival Data and Two New Rank Order Statistics Arising in Its Consideration. *Cancer Chemotherapy Reports*, 50, 163—170.
57. Cox, D. R. (1972). Regression Models and Life Tables. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 34, 187—220.
58. Steven Buyske, Richard Fagerstrom and Zhiliang Ying (2000). "A Class of Weighted Log-Rank Tests for Survival Data When the Event is Rare" *Journal of the American Statistical Association* Vol. 95, No. 449 (Mar., 2000), pp. 249-258. DOI: 10.2307/2669542.

59. Seung-Hwan Lee & Eun-Joo Lee (2009) On testing equality of two censored samples, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 79:2, 135-143, DOI:10.1080/00949650701628758
60. Tarone R.E., Ware J. (1977). On distribution-free tests for equality of survival distributions. *Biometrika* 64, 156-160.
61. Prentice R.L. (1978). *Linear Rank Tests with Right-censored Data*. *Biometrika*, London, 65 (2), 167-179.
62. M.P. Jones, J. Crowley (1989). "A General Class of Nonparametric Tests for Survival Analysis". *Biometrics* Vol. 45, No. 1 (Mar., 1989), pp. 157-170. DOI: 10.2307/2532042.
63. Bagdonavicius V. B., Nikulin M. "On goodness-of-fit tests for homogeneity and proportional hazards", *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, vol. 22, num. 1, 2006, p. 607-619.
64. Bagdonavicius, V., Kruopis, J. and Nikulin, M. S. (2013) *Censored and Truncated Data, in Non-parametric Tests for Censored Data*, John Wiley & Sons, Inc, Hoboken, NJ, USA.
65. Bagdonavicius V. B., Levulienė R. J., Nikulin M. S., Zdorova-Cheminadeo "Tests for equality of survival distributions against non-location alternatives", *Lifetime Data Analysis*, vol. 10, num. 4, 2004, p. 445-460.
66. Hon Keung Tony Ng, Ram C. Tripathi & Narayanaswamy Balakrishnan (2013): A two-stage Wilcoxon-type nonparametric test for stochastic ordering in two samples, *Journal of Nonparametric Statistics*, 25:1, 73-89.
67. Ruvie Lou Maria C. Martinez A pretest for choosing between logrank and wilcoxon tests in the two-sample problem / Ruvie Lou Maria C. Martinez, Joshua D. Naranjo // *International Journal of Statistics*, vol. LXVIII, n. 2, 2010. – 111 - 125 pp.
68. Neuhauser, Markus, Buning, Herbert and Hothorn, Ludwig A.(2004) 'Maximum Test versus Adaptive Tests for the Two-Sample Location Problem', *Journal of Applied Statistics*, 31: 2, 215 — 227.

69. Buning, Herbert(2001) 'KOLMOGOROV-SMIRNOV- AND CRAMER-VON MISES TYPE TWO-SAMPLE TESTS WITH VARIOUS WEIGHT FUNCTIONS', *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 30: 4, 847–865
70. Annie Tordilla Darilay, Joshua D. Naranjo (2011). “A pretest for using logrank or Wilcoxon in the two-sample problem“. *Computational Statistics and Data Analysis* 55 (2011) 2400–2409.
71. Liting Zhu, Xianming Tan & Dongsheng Tu (2010) Testing the Homogeneity of Two Survival Functions Against a Mixture Alternative Based on Censored Data, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 39:4, 767-776, DOI: 10.1080/03610911003637414.
72. Patrick Marsh (2010) A two-sample nonparametric likelihood ratio test, *Journal of Nonparametric Statistics*, 22:8, 1053-1065, DOI:10.1080/10485250903486078.
73. H. Frick & T. Van Sant (2003) Two-Sample Comparisons with the Efron-Test Under Random Censorship, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 32:2, 353-366, DOI: 10.1081/SAC-120017495.
74. Park, Hyo-II(2004) “Median test for multivariate and right censored data“, *Journal of Nonparametric Statistics*, 16: 5, 753–760.
75. Student. The probable error of a mean. // *Biometrika*. 1908. № 6 (1). P. 1-25.
76. Welch B. L. The generalization of “Student`s” problem when several different population variances are involved // *Biometrika*. 1947. V. 34. P. 29–35.
77. Горбунова А. А. Критерии проверки гипотез об однородности дисперсий при наблюдаемых законах, отличных от нормального / А. А. Горбунова, Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко // *Материалы X международной конференции “Актуальные проблемы электронного приборостроения” АПЭП-2010*. Т.6, Новосибирск, 2010. – С.36-41.
78. Bartlett M.S. Properties of sufficiency of statistical tests // *Proc. Roy. Soc.* – 1937. – A 160. – P. 268-287

79. Cochran W.G. The distribution of the largest of a set of estimated variances as a fraction of their total // *Annals of Eugenics*. – 1941. – V.11. – P. 47-52.
80. Hartley H.O. The maximum F-ratio as a short-cut test of heterogeneity of variance // *Biometrika*. – 1950. – V.37. – P. 308-312.
81. Levene H. Robust tests for equality of variances // *Contributions to Probability and Statistics: Essays in Honor of Harold Hotelling*. – 1960. – P. 278-292.
82. Ansari A.R., Bradley R.A. Rank-tests for dispersions // *AMS*.1960. V.31. №4. – P.1174-1189.
83. Siegel S., Tukey J.W. A nonparametric sum of rank procedure for relative spread in unpaired samples // *JASA*. – 1960. – V.55, №291. – P. 429-445.
84. Mood A. On the asymptotic efficiency of certain nonparametric tests // *AMS*. – 1954. – V.25. – P. 514-522.
85. Capon J. Asymptotic efficiency of certain locally most powerful rank tests // *AMS*. – 1961. – V.32, №1. – P. 88-100.
86. Klotz J. Nonparametric tests for scale // *AMS*. – 1962. – V.33. – P. 498-512.
87. M.L. Tiku & N. Balakrishnan (1984) Testing equality of population variances the robust way, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 13:17, 2143-2159, DOI:10.1080/03610928408828818.
88. Violeta De La Huerta Contreras , Humberto Vaquera Huerta & Barry C. Arnold (2013): A test for equality of variances with censored samples, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, DOI: 10.1080/00949655.2013.825095.
89. M.L. Tiku (1982) Robust statistics for testing equality of means or variances, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 11:22, 2543-2558, DOI:10.1080/03610918208828405.
90. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для ВУЗов. — 2- изд., перераб. и доп.-М:ЮНИТИ-ДАНА, 2004. — 573 с.

91. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин А.Д. Прикладная статистика. М., Финансы и статистика, т. 1, 1983, т. 2, 1985.
92. Тарасенко Ф.П. Непараметрическая статистика. — Томск: изд-во Томского ун-та, 1976. — 291 с.
93. Орлов А. И. Прикладная статистика. М.: Экзамен, 2006. 671 с.
94. Холлендер М., Вульф Д.А. Непараметрические методы статистики. М., Финансы и статистика, 1983
95. Эфрон Б. Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа. М., Финансы и статистика, 1988.
96. Ивченко Г. И. Математическая статистика: учебное пособие для вузов / Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев. – М: Высшая школа. 1984. – 248 с.
97. Петрович М.Л., Давидович М.И. Статистическое оценивание и проверка гипотез на ЭВМ. М.: Финансы и статистика, 1989. — 191 с.
98. Лемешко Б.Ю. Статистический анализ одномерных наблюдений случайных величин: Программная система. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1995. — 125 с.
99. Колмогоров, А. Н. «Основные понятия теории вероятностей», М.: Наука, 1974.
100. Гнеденко, Б. В. «Курс теории вероятностей», — М.: Наука, 1988.
101. Бекарева Н. Д. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ : учеб. пособие / Н. Д. Бекарева. - : Изд-во НГТУ, 2007. - 196 с.
102. Соболев И. М. Метод Монте-Карло. — М.: Наука, 1968. — 64 с.
103. Metropolis, N., Ulam, S. The Monte Carlo Method, — Journal of the American Statistical Association 1949 44 № 247 335—341.
104. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход: [монография]: монография / Б. Ю. Лемешко, С. Б. Лемешко, С. Н. Постовалов, Е. В. Чимитова. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. 888 с.

105. Филоненко П.А., Программа для вычисления значений статистик критериев однородности по двум выборкам, Программа для ЭВМ 2017615277, №5, 2017.
106. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980.
107. Иткина Н. Б. Функциональный анализ. : учеб. пособие / Н. Б. Иткина. - : НГТУ, 2006. - 72 с.
108. Klein J.P. Survival analysis: techniques for censored and truncated data / J.P. Klein, M.L. Moeschberger //Springer, New York. 2003. 536 p.
109. Barlow R.E., Marshall A.W., Proschan F. (1963). Properties of probability distributions with monotone hazard rate; Ann. Math. Statist. 34, 375–389.
110. Боровков А.А. К задаче о двух выборках / А.А. Боровков // Изв. АН СССР, Сер. матем. 1962. – Т.26. – С. 605-624.
111. Смирнов Н.В. Вероятности больших значений непараметрических односторонних критериев согласия / Н.В. Смирнов // Тр. матем. ин-та АН СССР. – 1961. – Т. 64. – С. 185-210.
112. Cramer, H. (1928). "On the Composition of Elementary Errors". Scandinavian Actuarial Journal. 1928 (1): 13–74.
113. von Mises, R. E. (1928). Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Julius Springer.
114. Anderson, T. W. (1962). "On the Distribution of the Two-Sample Cramer–von Mises Criterion". Annals of Mathematical Statistics. Institute of Mathematical Statistics. 33 (3): 1148–1159.
115. Darling D. A., "The Kolmogorov-Smirnov, Cramer-von Mises Tests", Ann. Math. Statist, vol. 28, p. 823-838, 1957.
116. Pettitt A. N. "A two-sample Anderson-Darling rank statistic", Biometrika, 63, 1, 1976, p. 161-168.
117. Scholz F. W., Stephens M. A., "K-Sample Anderson-Darling Tests", Journal of the American Statistical Association, vol. 82, num. 399, p. 918-924, 1987.
118. Постовалов С.Н. Применение компьютерного моделирования для расширения прикладных возможностей классических методов

- проверки статистических гипотез. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. Новосибирск. 2013. 298 с.
119. Лемешко Б. Ю. Критерии проверки гипотез об однородности. Руководство по применению : монография / Б. Ю. Лемешко. - Москва : ИНФРА-М, 2017. - 208 с. - 500 экз. - ISBN 978-5-16-012557-2.
 120. Lee E. T., Wang J. W. (2003) *Statistical Methods for Survival Data Analysis*, Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley.
 121. Altshuler, B. (1970). Theory for Measurement of Competing Risks in Animal Experiments. *Mathematical Biosciences*, 6, 1—11.
 122. T.R. Fleming and D.P. Harrington, *Counting Process and Survival Analysis*, Wiley, New York, NY, 1991.
 123. Yu-Mei Chang, Chun-Shu Chen & Pao-Sheng Shen (2012) A jackknife-based versatile test for two-sample problems with right-censored data, *Journal of Applied Statistics*, 39:2, 267-277.
 124. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М: Наука, 1973, 312 с.
 125. Соловейчик Ю. Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач : учеб. пособие / Ю. Г. Соловейчик, М. Э. Рояк, М. Г. Персова . - : Сер. «Учебники НГТУ», 2007. - 896 с.
 126. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента. М.: Наука, 1971. - 312 с.
 127. E. Leton, P. Zuluaga. (2008). Unbalanced groups in nonparametric survival tests. *Statistics and Econometrics Series 15*. October 2008. Working Paper 08-52.
 128. E. Leton, P. Zuluaga, (2001). Equivalence between score and weighted tests for survival curves. *COMMUN. STATIST.—THEORY METH.*, 30(4), 591–608 (2001). DOI: 10.1081/STA-100002138.
 129. Emilio Leton, Pilar Zuluaga. (2005). Relationships Among Tests for Censored Data. *Biometrical Journal*, 47, (2005), 3, 377–387. DOI: 10.1002/bimj.200410115.

130. Pablo Martinez-Camblor. (2010). Comparing k-independent and right censored samples based on the likelihood ratio. *Comput Stat* (2010) 25:363–374. DOI 10.1007/s00180-009-0181-9.
131. Song Yang, Ross Prentice. (2010). Improved Logrank-Type Tests for Survival Data Using Adaptive Weights. *Biometrics*. 2010 March; 66(1): 30–38. doi:10.1111/j.1541-0420.2009.01243.x.
132. Ogorodnikov, V.A. Numerical modelling of random processes and fields: algorithms and applications. / V.A. Ogorodnikov, S.M. Prigarin. – Utrecht: VPS, 1996.
133. Matsumoto, M.; Nishimura, T. Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator // *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*. – 1998. – Vol. 8 (1). – P.3–30.
134. Шахов В. В. Обзор и сравнительный анализ библиотек генераторов псевдослучайных чисел // *Пробл. информатики*. 2010. № 2. С. 66-74.
135. Лемешко Б. Ю. Методы оптимизации : учеб. пособие / Б. Ю. Лемешко. - : Издательство НГТУ, 2009. - 156 с.
136. Филоненко П. А. Исследование скорости сходимости распределения статистик критериев однородности распределений к предельному распределению в случае данных, цензурированных справа / П. А. Филоненко, С. Н. Постовалов // *Обработка информации и математическое моделирование : материалы Рос. науч.-техн. конф. [Новосибирск, 25–26 апр. 2017 г.]*. – Новосибирск : СибГУТИ, 2017. – С. 187–193. - Работа выполнена: Исследования выполнены при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственной работы «Обеспечение проведения научных исследований» и проектной части государственного задания (проект № 1.1009.2017/ПЧ). - 32 экз. - ISBN 978-5-31434-038-1.
137. Филоненко П.А. Проверка гипотезы однородности по случайно цензурированным выборкам / П.А.Филоненко ; науч. рук. С. Н.

- Постовалов // Наука. Технологии. Инновации.: материалы всерос. науч. конференции молодых ученых, Новосибирск, 29 ноября-2 декабря, 2012. - Часть 1. - С. 154-155.
138. Филоненко П.А. Исследование скорости сходимости непараметрической оценки Каплана-Мейера к функции надежности / П. А. Филоненко, С. Н. Постовалов // Обработка информации и математическое моделирование : материалы Рос. науч.-техн. конф. [Новосибирск, 24–25 апр. 2015 г.]. – Новосибирск : СибГУТИ, 2015. – С. 187–189. – 25 экз. – ISBN 978-5-91434-027-5.
139. Филоненко П.А. Исследование скорости сходимости непараметрической оценки функции надежности Каплана-Мейера к аналитическому распределению / П. А. Филоненко, С. Н. Постовалов // Обработка информации и математическое моделирование : материалы Рос. науч.-техн. конф. [Новосибирск, 24–25 апр. 2015 г.]. – Новосибирск : СибГУТИ, 2015. – С. 184–186. – 25 экз. – ISBN 978-5-91434-027-5.
140. Филоненко П.А., Исследование скорости сходимости оценок функций надежности к истинному распределению / Филоненко П.А., Постовалов С.Н. // Сборник научных трудов Всероссийской конференции молодых ученых "Наука. Технологии. Инновации" - НТИ-2015, 2015 - Т.2. - 165 с. - С.37-39. - ISBN 978-5-7782-2766-8
141. Postovalov S. A Comparison of Homogeneity Tests for Different Alternative Hypotheses / S. Postovalov, P. Philonenko // Statistical Models and Methods for Reliability and Survival Analysis : monograph. - London : Wiley-ISTE, 2013. - Chap. 12. - P. 177-194. - (Mathematics and Statistics series).
142. Филоненко П.А. Исследование влияния закона распределения моментов цензурирования и степени цензурирования на мощность критериев однородности / П. А. Филоненко, С. Н. Постовалов // Сибирский журнал индустриальной математики. - 2014. - Т. 17, № 3. - С. 122-134.

143. Philonenko P. Test power in two-sample problem testing as the utility function in the theory of decision making under risk and uncertainty / P. Philonenko, S.N. Postovalov // Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП–2016) = Actual problems of electronic instrument engineering (APEIE–2016) : тр. 13 междунар. науч.-техн. конф., Новосибирск, 3–6 окт. 2016 г. : в 12 т. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2016. – Т. 1, ч. 2. – С. 369–373. - 60 экз. - ISBN 978-5-7782-2991-4.
144. Филоненко П.А. Мощность критерия однородности как функция полезности в задачах принятия решения в условиях риска и неопределенности = Homogeneity test power as utility function in the theory of decision making under risk and uncertainty / П.А. Филоненко, С.Н. Постовалов // Вестник СибГУТИ (Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики). - 2017. – № 3 (39). С. 3–20.
145. Программная система статистического моделирования в задачах проведения и обработки измерений на платформе 1С:Предприятие 8.2 / С. Н. Постовалов, Д. Г. Демин, М. В. Каньшин, Б. И. Окурин, А. В. Поздеева, Т. В. Тимошенко, П. А. Филоненко, М. В. Шиловский // Материалы XI международной конференции \"Актуальные проблемы электронного приборостроения\" АПЭП-2012, Новосибирск, 2-4 октября 2012г. - Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2012. - Т. 6. - С. 41-46.7
146. Постовалов С.Н. Сравнение мощности критериев однородности для альтернатив с пересечениями и без пересечений / С.Н. Постовалов, П.А. Филоненко // Обработка информационных сигналов и математическое моделирование : Российская науч.-технич. конф., [23–24 мая 2013 г.] : материалы конф. – Новосибирск : СибГУТИ, 2013. – С. 91–94.
147. Philonenko P. A power comparison of homogeneity tests for randomly censored data / P. Philonenko, S. Postovalov // Applied methods of

- statistical analysis. Applications in survival analysis, reliability and quality control – AMSA'2013, Novosibirsk, 25–27 Sept. 2013 : proc. of the intern. workshop. – Novosibirsk : NSTU publ., 2013. – P. 227-237
148. Филоненко П.А. Сравнение мощности статистических критериев проверки гипотезы однородности для данных типа времени жизни / П.А.Филоненко ; науч. рук. С. Н. Постовалов // Наука. Технологии. Инновации : материалы Всерос. науч. конф. молодых ученых, Новосибирск, 21–24 нояб. 2013 г. : в 10 ч. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2013. – Ч. 3. – С. 43-45.
149. Постовалов С.Н. Исследование зависимости мощности критериев однородности по данным типа времени жизни от дивергенции Кульбака-Лейблера между распределениями альтернативной гипотезы / С.Н. Постовалов, П.А. Филоненко // Обработка информации и математическое моделирование : Рос. науч.-техн. конф., [Новосибирск, 24–25 апр. 2014 г.] : материалы конф. – Новосибирск : СибГУТИ, 2014. – С. 45–48.
150. Хмаладзе Э.В., “Оценка необходимого числа наблюдений для различения простых сближающихся гипотез”, Теория вероятн. и ее примен., 20:1 (1975), 115–125; Theory Probab. Appl., 20:1 (1975), 116–126.
151. Philonenko P. A new two-sample test for choosing between log-rank and Wilcoxon tests with right-censored data / P. Philonenko, S. Postovalov // Journal of Statistical Computation and Simulation. - 2015. - Vol. 85, Iss. 14. - P. 2761-2770. - DOI: 10.1080/00949655.2014.941533.
152. Лемешко Б. Ю. Теория игр и исследование операций: конспект лекций / Б. Ю. Лемешко ; Новосиб. гос. техн. ун-т. - Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2013. - 167 с.
153. Johnson, E. J., Payne, J. W. (1985). Effort and accuracy in choice. Management Science, 31(4), 395-414.

154. Wald, A. (1945). Statistical decision functions which minimize the maximum risk. *The Annals of Mathematics*, 46(2), 265-280.
155. Орлов А. И. Теория принятия решений. Учебник для вузов. — М.: Экзамен, 2006. — 576 с.
156. Philonenko P. The limit test statistic distribution of the maximum value test for right-censored data / P. Philonenko, S. Postovalov, A. Kovalevskii // *Journal of Statistical Computation and Simulation*. - 2016. - Vol. 86, iss. 17. - P. 3482-3494
157. Филоненко П.А. Критерии равенства математических ожиданий Стьюдента и Крамера-Уэлча для данных типа времени жизни = The Student and Cramer-Welch tests for two-sample problem testing with lifetime data / П.А. Филоненко, С. Н. Постовалов // *Вестник СибГУТИ (Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики)*. - 2016. – № 4 (36). – С. 3–11. - Работа выполнена: при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках проектной части государственного задания (проект 2.541.2014К).
158. Филоненко П. А. Устойчивый статистический критерий проверки однородности распределений по цензурированным справа наблюдениям / П. А. Филоненко, С. Н. Постовалов // *Обработка информации и математическое моделирование : материалы Рос. науч.-техн. конф. [Новосибирск, 25–26 апр. 2017 г.]*. – Новосибирск : СибГУТИ, 2017. – С. 178–186. Работа выполнена: Исследования выполнены при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственной работы «Обеспечение проведения научных исследований» и проектной части государственного задания (проект № 1.1009.2017/ПЧ) - 32 экз. - ISBN 978-5-31434-038-1.
159. Philonenko P. The limit distribution of the maximum value test statistic in the general case / P. Philonenko, S. N. Postovalov, A. P. Kovalevskiy // *11 International forum on strategic technology (IFOST 2016) : proc., Novosibirsk, 1–3 June 2016*. – Novosibirsk : NSTU, 2016. – Pt. 1. – P. 428-

430. - ISBN 978-1-5090-0853-7. - DOI: 10.1109/IFOST.2016.7884145. - Работа выполнена: при поддержке Министерства образования и науки - проект 2.541.2014К.
160. Филоненко П.А., Предельное распределение статистики критерия максимального значения для проверки однородности распределений / Филоненко П.А., Постовалов С.Н. // Статистика и её применение : Материалы республиканской научно-практической конференции, Республика Узбекистан, г. Ташкент, 16-17 октября 2015 - Ташкент, НУУз, 2015. - P. 132-135. - ISBN 978-9943-305-86-1.
161. Philonenko P. The limit distribution of the maximum value test / P. Philonenko, S. Postovalov // Applied methods of statistical analysis. Nonparametric approach : proc. of the intern. workshop, Novosibirsk, 14–19 Sept. 2015. – Novosibirsk : NSTU publ., 2015. – P. 208-211. - ISBN 2313-870X.
162. Филоненко П.А. Критерий максимального значения для проверки гипотезы однородности по данным типа времени жизни / П.А. Филоненко, С.Н. Постовалов // Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП-2014) = Actual problems of electronic instrument engineering (APEIE-2014) : тр. 12 междунар. конф., Новосибирск, 2–4 окт. 2014 г. : в 7 т. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2014. – Т. 6. – С. 58–65. – 100 экз. – ISBN 978-1-4799-6019-4, ISBN 978-5-7782-2511-4.
163. Филоненко П.А., Критерий максимального значения для проверки гипотезы однородности по данным типа времени жизни / Филоненко П.А., Постовалов С.Н. // материалы научной студенческой конференции (итоги научной работы студентов за 2013-2014 гг.) "ДНИ НАУКИ НГТУ-2014", 2014 - С. 79. - ISBN: 978-5-7782-2465-0.
164. Petr Philonenko, The Maximum Value Test for Two-Sample Problem Testing with Lifetime Data / P. Philonenko, S. Postovalov // Progress through Innovations : proc. of the city scien. conf., Novosibirsk, 02 Apr.

- 2015, - Novosibirsk : NSTU publ., 2015 - P.43-44. - ISBN 978-5-7782-2629-6.
165. Филоненко П. А. Критерии однородности средних для данных типа времени жизни = Two-sample tests for a mean equality with lifetime data / П.А. Филоненко, С.Н. Постовалов // Обработка информации и математическое моделирование : материалы Рос. науч.-техн. конф. [Новосибирск, 21–22 апр. 2016 г.]. – Новосибирск : СибГУТИ, 2016. – С. 156–159. – 32 экз. – ISBN 978-5-91434-032-9. – Работа выполнена: при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках проектной части государственного задания (№ 2.541.2014/К).
166. Филоненко П.А. Непрерывная оценка функции надежности на основе оценки Бреслоу = The continuous estimate of a survival function based on the Breslow estimate / П. А. Филоненко, С. Н. Постовалов // Обработка информации и математическое моделирование : материалы Рос. науч.-техн. конф. [Новосибирск, 21–22 апр. 2016 г.]. – Новосибирск : СибГУТИ, 2016. – С. 160–164. – 32 экз. – ISBN 978-5-91434-032-9. – Работа выполнена: при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках проектной части государственного задания (№ 2.541.2014/К).
167. Лемешко Б. Ю., Постовалов С. Н. Компьютерные технологии анализа данных и исследования статистических закономерностей: учеб. пособие. Новосибирск: НГТУ, 2004. 119 с.
168. Fritsch, F. N.; Carlson, R. E. (1980). "Monotone Piecewise Cubic Interpolation". *SIAM Journal on Numerical Analysis*. SIAM. 17 (2): 238–246. doi:10.1137/0717021.
169. Богданов В.В. Об алгоритме построения обобщённого сплайна, сохраняющего направления выпуклости данных // Вычислительные системы. — Новосибирск: ИМ СО РАН, 1997. — Вып. 159: Сплайн-функции и их приложения. — С. 72–86.

170. Филоненко П. А. Анализ процесса статистического контроля качества при производстве электродов / П. А. Филоненко, С. Н. Постовалов, В. Ю. Щеколдин // Обработка информации и математическое моделирование : материалы Рос. науч.-техн. конф. [Новосибирск, 25–26 апр. 2017 г.]. – Новосибирск : СибГУТИ, 2017. – С. 194–202. - ISBN 978-5-31434-038-1.
171. Герберт Шилдт. Теория и практика C++ = Shildt's Expert C++. — СПб.: BHV — Санкт-Петербург, 1996. — ISBN 0-07-882209-2, 5-7791-0029-2.
172. Demming, Robert & Duffy, Daniel J. (2010). Introduction to the Boost C++ Libraries. Volume 1 - Foundations. Datasim. ISBN 978-94-91028-01-4.
173. Demming, Robert & Duffy, Daniel J. (2012). Introduction to the Boost C++ Libraries. Volume 2 - Advanced Libraries. Datasim. ISBN 978-94-91028-02-1.
174. Taylor, David A. (1992). Object-Oriented Information Systems – Planning and Implementation. John Wiley & Sons. ISBN 0-471-54364-0.
175. Смирнов Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика. Изд-во «Наука», 1970 г.
176. Басовский Л. Е., Протасьев В. Б. Управление качеством. – М.: ИНФРА-М, 2004.
177. Варакута С. А. Управление качеством продукции. – М.: ИНФРА-М, 2001.
178. Ильенкова С. Д. и др. Управление качеством. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 2004.
179. А.И. Орлов, Скорость сходимости распределения статистики Смирнова–Мизеса, Теория вероятн. и ее примен., 1974, том 19, выпуск 4, 766-786.
180. ГОСТ Р 50779.42-99 (ИСО 8258-91). Статистические методы. Контрольные карты Шухарта.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

**Значения оценок мощности статистических критериев однородности
на группах близких альтернативных гипотез**

Таблица А.1 – Значения мощности критериев для альтернативных гипотез $H_{01} - H_{03}$ без пересечений с наибольшими отклонениями в ранние моменты времени, $n_1 = n_2 = 200$

S	H_{01}						H_{02}						H_{03}					
	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%
S_{KS}	0.363	–	–	–	–	–	0.707	–	–	–	–	–	0.501	–	–	–	–	–
S_{LR}	0.397	–	–	–	–	–	0.651	–	–	–	–	–	0.439	–	–	–	–	–
S_{ADP}	0.655	–	–	–	–	–	0.878	–	–	–	–	–	0.737	–	–	–	–	–
S_P	0.382	0.376	0.389	0.395	0.421	0.447	0.525	0.532	0.537	0.541	0.541	0.544	0.308	0.315	0.318	0.346	0.376	0.427
S_G	0.381	0.395	0.414	0.437	0.479	0.531	0.528	0.567	0.607	0.648	0.687	0.735	0.313	0.315	0.345	0.402	0.472	0.573
S_{LG}	0.166	0.178	0.193	0.210	0.235	0.265	0.308	0.301	0.293	0.297	0.299	0.297	0.175	0.142	0.127	0.139	0.160	0.209
S_{CM}	0.163	0.177	0.193	0.215	0.235	0.266	0.307	0.296	0.291	0.293	0.294	0.299	0.175	0.141	0.129	0.137	0.163	0.212
S_Q	0.343	0.345	0.360	0.373	0.369	0.334	0.514	0.515	0.517	0.518	0.523	0.525	0.262	0.259	0.262	0.278	0.291	0.303
S_{BN1}	0.296	0.313	0.337	0.364	0.401	0.442	0.308	0.327	0.346	0.375	0.403	0.434	0.155	0.190	0.246	0.320	0.409	0.507
S_{BN2}	0.272	0.304	0.336	0.370	0.429	0.490	0.603	0.598	0.592	0.594	0.596	0.597	0.473	0.474	0.501	0.541	0.600	0.663
S_{BN3}	0.369	0.384	0.399	0.425	0.452	0.489	0.445	0.463	0.477	0.502	0.520	0.537	0.248	0.291	0.350	0.421	0.493	0.578
S_{WKM}	0.374	0.393	0.414	0.440	0.476	0.535	0.530	0.567	0.605	0.655	0.700	0.753	0.307	0.323	0.346	0.391	0.468	0.562
$S_{WLG(TW)}$	0.271	0.290	0.308	0.338	0.368	0.422	0.396	0.419	0.441	0.465	0.497	0.534	0.220	0.212	0.227	0.257	0.315	0.411
$S_{WLG(PP)}$	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.052	0.073	0.060	0.052	0.048	0.049	0.047	0.054	0.047	0.049	0.052	0.058	0.063
$S_{WLG(P)}$	0.050	0.049	0.050	0.050	0.052	0.051	0.070	0.059	0.051	0.049	0.047	0.048	0.053	0.048	0.049	0.053	0.060	0.064
S_{MAX}	0.329	0.342	0.361	0.390	0.428	0.478	0.473	0.512	0.541	0.586	0.634	0.681	0.268	0.272	0.296	0.346	0.413	0.516
S_{MIN3}	0.355	0.389	0.423	0.468	0.528	0.597	0.612	0.628	0.645	0.674	0.706	0.747	0.457	0.464	0.498	0.543	0.609	0.681

Таблица А.2 – Значения мощности критериев для альтернативных гипотез $H_{01} - H_{03}$ без пересечений с наибольшими отклонениями в ранние моменты времени, $n_1 = n_2 = 500$

S	H_{01}						H_{02}						H_{03}					
	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%
S_{KS}	0.941	–	–	–	–	–	0.996	–	–	–	–	–	0.969	–	–	–	–	–
S_{LR}	0.847	–	–	–	–	–	0.987	–	–	–	–	–	0.922	–	–	–	–	–
S_{ADP}	0.994	–	–	–	–	–	1.000	–	–	–	–	–	0.998	–	–	–	–	–
S_P	0.735	0.750	0.760	0.769	0.787	0.820	0.887	0.898	0.907	0.905	0.905	0.909	0.634	0.638	0.658	0.685	0.740	0.800
S_G	0.737	0.763	0.788	0.821	0.853	0.894	0.888	0.917	0.938	0.958	0.975	0.984	0.639	0.647	0.693	0.743	0.854	0.930
S_{LG}	0.311	0.366	0.400	0.438	0.492	0.567	0.632	0.626	0.624	0.618	0.608	0.633	0.372	0.287	0.255	0.267	0.331	0.436
S_{CM}	0.333	0.354	0.396	0.451	0.495	0.556	0.642	0.612	0.609	0.609	0.609	0.621	0.374	0.296	0.251	0.273	0.340	0.448
S_Q	0.696	0.699	0.709	0.731	0.730	0.646	0.875	0.874	0.879	0.890	0.886	0.883	0.577	0.581	0.582	0.617	0.609	0.585
S_{BN1}	0.639	0.688	0.713	0.750	0.805	0.846	0.682	0.697	0.730	0.767	0.806	0.827	0.350	0.423	0.535	0.677	0.795	0.894
S_{BN2}	0.616	0.661	0.698	0.763	0.825	0.878	0.937	0.937	0.938	0.938	0.936	0.943	0.837	0.846	0.868	0.907	0.944	0.968
S_{BN3}	0.759	0.781	0.809	0.831	0.860	0.890	0.848	0.861	0.877	0.897	0.909	0.920	0.549	0.633	0.732	0.811	0.892	0.935
S_{WKM}	0.732	0.766	0.774	0.820	0.860	0.899	0.890	0.917	0.942	0.963	0.976	0.986	0.619	0.650	0.702	0.753	0.836	0.921
$S_{WLG(TW)}$	0.563	0.605	0.634	0.677	0.732	0.803	0.767	0.795	0.810	0.840	0.879	0.900	0.461	0.453	0.469	0.530	0.650	0.774
$S_{WLG(PP)}$	0.051	0.050	0.050	0.051	0.054	0.056	0.131	0.096	0.068	0.059	0.050	0.051	0.075	0.045	0.043	0.054	0.072	0.079
$S_{WLG(P)}$	0.051	0.050	0.052	0.052	0.053	0.053	0.126	0.090	0.068	0.054	0.053	0.046	0.069	0.048	0.045	0.058	0.072	0.082
S_{MAX}	0.682	0.709	0.740	0.769	0.820	0.859	0.858	0.884	0.918	0.939	0.958	0.975	0.570	0.596	0.646	0.714	0.814	0.903
S_{MIN3}	0.749	0.773	0.817	0.862	0.903	0.941	0.949	0.954	0.964	0.972	0.979	0.986	0.836	0.847	0.880	0.914	0.951	0.978

Таблица А.3 – Значения мощности критериев для альтернативных гипотез $H_{04} - H_{06}$ без пересечений с наибольшими отклонениями в средние моменты времени, $n_1 = n_2 = 200$

S	H_{04}						H_{05}						H_{06}					
	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%
S_{KS}	0.155	–	–	–	–	–	0.316	–	–	–	–	–	0.614	–	–	–	–	–
S_{LR}	0.175	–	–	–	–	–	0.363	–	–	–	–	–	0.690	–	–	–	–	–
S_{ADP}	0.186	–	–	–	–	–	0.375	–	–	–	–	–	0.843	–	–	–	–	–
S_P	0.178	0.175	0.178	0.181	0.180	0.180	0.376	0.368	0.359	0.351	0.341	0.328	0.676	0.680	0.684	0.690	0.702	0.708
S_G	0.177	0.178	0.188	0.190	0.203	0.207	0.369	0.376	0.376	0.368	0.358	0.346	0.675	0.693	0.708	0.730	0.759	0.789
S_{LG}	0.092	0.101	0.109	0.115	0.129	0.132	0.244	0.255	0.257	0.264	0.264	0.267	0.353	0.375	0.402	0.430	0.462	0.501
S_{CM}	0.098	0.101	0.107	0.118	0.124	0.133	0.241	0.248	0.259	0.263	0.268	0.270	0.345	0.372	0.395	0.427	0.467	0.500
S_Q	0.144	0.144	0.149	0.147	0.154	0.156	0.344	0.341	0.335	0.335	0.328	0.315	0.632	0.635	0.648	0.652	0.644	0.599
S_{BN1}	0.149	0.146	0.148	0.148	0.150	0.148	0.283	0.284	0.280	0.266	0.259	0.248	0.577	0.588	0.606	0.622	0.644	0.666
S_{BN2}	0.126	0.128	0.127	0.127	0.131	0.134	0.228	0.228	0.227	0.226	0.221	0.218	0.514	0.538	0.572	0.601	0.634	0.678
S_{BN3}	0.163	0.158	0.160	0.160	0.157	0.156	0.298	0.290	0.284	0.280	0.266	0.257	0.649	0.656	0.669	0.678	0.687	0.703
S_{WKM}	0.176	0.182	0.188	0.194	0.200	0.206	0.376	0.373	0.375	0.366	0.360	0.348	0.676	0.694	0.709	0.736	0.755	0.790
$S_{WLG(TW)}$	0.143	0.151	0.157	0.167	0.173	0.182	0.335	0.342	0.336	0.338	0.333	0.328	0.552	0.576	0.604	0.635	0.666	0.706
$S_{WLG(PP)}$	0.051	0.051	0.053	0.053	0.057	0.059	0.087	0.092	0.094	0.099	0.101	0.102	0.065	0.068	0.072	0.077	0.080	0.087
$S_{WLG(P)}$	0.051	0.051	0.052	0.053	0.058	0.059	0.087	0.094	0.098	0.099	0.103	0.104	0.067	0.069	0.074	0.078	0.084	0.088
S_{MAX}	0.152	0.157	0.162	0.170	0.177	0.180	0.337	0.341	0.338	0.337	0.328	0.318	0.620	0.639	0.659	0.685	0.715	0.747
S_{MIN3}	0.157	0.157	0.161	0.168	0.170	0.180	0.301	0.304	0.305	0.304	0.302	0.294	0.635	0.659	0.688	0.718	0.752	0.796

Таблица А.4 – Значения мощности критериев для альтернативных гипотез $H_{04} - H_{06}$ без пересечений с наибольшими отклонениями в средние моменты времени, $n_1 = n_2 = 500$

S	H_{04}						H_{05}						H_{06}					
	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%
S_{KS}	0.331	–	–	–	–	–	0.659	–	–	–	–	–	0.981	–	–	–	–	–
S_{LR}	0.375	–	–	–	–	–	0.724	–	–	–	–	–	0.985	–	–	–	–	–
S_{ADP}	0.409	–	–	–	–	–	0.750	–	–	–	–	–	0.999	–	–	–	–	–
S_P	0.359	0.374	0.361	0.383	0.366	0.369	0.731	0.738	0.711	0.712	0.684	0.671	0.970	0.970	0.971	0.975	0.977	0.978
S_G	0.367	0.369	0.387	0.419	0.424	0.447	0.732	0.739	0.735	0.727	0.720	0.691	0.969	0.973	0.978	0.984	0.989	0.992
S_{LG}	0.155	0.187	0.206	0.222	0.250	0.264	0.501	0.516	0.526	0.542	0.557	0.555	0.696	0.725	0.762	0.796	0.826	0.870
S_{CM}	0.158	0.180	0.188	0.213	0.237	0.265	0.501	0.517	0.522	0.547	0.546	0.572	0.686	0.734	0.755	0.795	0.829	0.866
S_Q	0.313	0.321	0.325	0.318	0.334	0.334	0.686	0.681	0.694	0.675	0.662	0.634	0.953	0.954	0.957	0.961	0.960	0.923
S_{BN1}	0.308	0.315	0.318	0.325	0.324	0.326	0.634	0.622	0.624	0.602	0.588	0.565	0.943	0.948	0.955	0.963	0.966	0.976
S_{BN2}	0.261	0.271	0.277	0.271	0.266	0.292	0.541	0.536	0.547	0.535	0.522	0.507	0.912	0.927	0.942	0.958	0.967	0.979
S_{BN3}	0.352	0.350	0.351	0.346	0.352	0.337	0.652	0.646	0.636	0.621	0.612	0.583	0.971	0.974	0.975	0.978	0.978	0.984
S_{WKM}	0.367	0.388	0.391	0.406	0.421	0.428	0.738	0.730	0.728	0.721	0.718	0.692	0.968	0.972	0.977	0.984	0.989	0.993
$S_{WLG(TW)}$	0.282	0.311	0.321	0.334	0.360	0.383	0.680	0.673	0.684	0.674	0.683	0.660	0.910	0.924	0.937	0.954	0.967	0.977
$S_{WLG(PP)}$	0.051	0.051	0.055	0.056	0.062	0.067	0.138	0.152	0.160	0.181	0.184	0.186	0.084	0.095	0.108	0.115	0.128	0.145
$S_{WLG(P)}$	0.047	0.052	0.052	0.056	0.056	0.069	0.135	0.153	0.159	0.170	0.180	0.191	0.083	0.098	0.110	0.112	0.125	0.134
S_{MAX}	0.311	0.323	0.343	0.363	0.373	0.386	0.693	0.696	0.695	0.691	0.680	0.669	0.955	0.962	0.969	0.977	0.982	0.988
S_{MIN3}	0.332	0.331	0.350	0.371	0.381	0.392	0.651	0.654	0.667	0.662	0.659	0.636	0.966	0.972	0.978	0.985	0.990	0.994

Таблица А.5 – Значения мощности критериев для альтернативных гипотез $H_{07} - H_{09}$ без пересечений с наибольшими отклонениями в поздние моменты времени, $n_1 = n_2 = 200$

S	H_{07}						H_{08}						H_{09}					
	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%
S_{KS}	0.175	–	–	–	–	–	0.093	–	–	–	–	–	0.076	–	–	–	–	–
S_{LR}	0.203	–	–	–	–	–	0.101	–	–	–	–	–	0.090	–	–	–	–	–
S_{ADP}	0.218	–	–	–	–	–	0.175	–	–	–	–	–	0.175	–	–	–	–	–
S_P	0.215	0.213	0.205	0.194	0.185	0.171	0.107	0.099	0.090	0.083	0.077	0.069	0.103	0.093	0.086	0.082	0.075	0.074
S_G	0.217	0.210	0.202	0.194	0.185	0.171	0.108	0.093	0.083	0.077	0.071	0.066	0.104	0.089	0.083	0.077	0.076	0.080
S_{LG}	0.198	0.191	0.183	0.182	0.173	0.158	0.282	0.220	0.170	0.132	0.105	0.083	0.335	0.242	0.172	0.125	0.095	0.077
S_{CM}	0.199	0.192	0.186	0.179	0.172	0.160	0.286	0.223	0.170	0.137	0.105	0.084	0.341	0.247	0.175	0.126	0.095	0.077
S_Q	0.217	0.208	0.203	0.195	0.183	0.172	0.222	0.178	0.141	0.111	0.089	0.075	0.258	0.191	0.138	0.106	0.086	0.073
S_{BN1}	0.164	0.160	0.155	0.145	0.140	0.130	0.349	0.269	0.202	0.151	0.110	0.083	0.570	0.387	0.246	0.145	0.092	0.069
S_{BN2}	0.138	0.132	0.130	0.123	0.121	0.115	0.292	0.230	0.181	0.141	0.112	0.093	0.609	0.450	0.313	0.215	0.150	0.116
S_{BN3}	0.168	0.162	0.155	0.150	0.143	0.133	0.330	0.255	0.194	0.142	0.104	0.079	0.483	0.331	0.210	0.131	0.086	0.066
S_{WKM}	0.217	0.211	0.201	0.193	0.183	0.173	0.107	0.093	0.085	0.075	0.070	0.066	0.102	0.091	0.082	0.077	0.076	0.081
$S_{WLG(TW)}$	0.217	0.211	0.203	0.194	0.182	0.175	0.162	0.134	0.110	0.093	0.079	0.071	0.160	0.124	0.101	0.086	0.078	0.072
$S_{WLG(PP)}$	0.115	0.112	0.106	0.102	0.095	0.089	0.417	0.323	0.243	0.181	0.127	0.092	0.566	0.404	0.267	0.165	0.103	0.065
$S_{WLG(P)}$	0.117	0.114	0.109	0.103	0.096	0.091	0.411	0.325	0.242	0.177	0.128	0.093	0.554	0.398	0.254	0.157	0.097	0.065
S_{MAX}	0.216	0.207	0.200	0.188	0.183	0.171	0.234	0.182	0.142	0.111	0.091	0.075	0.280	0.199	0.146	0.106	0.087	0.078
S_{MIN3}	0.168	0.165	0.164	0.163	0.156	0.150	0.287	0.218	0.167	0.127	0.100	0.083	0.563	0.395	0.266	0.177	0.124	0.102

Таблица А.6 – Значения мощности критериев для альтернативных гипотез $H_{07} - H_{09}$ без пересечений с наибольшими отклонениями в поздние моменты времени, $n_1 = n_2 = 500$

S	H_{07}						H_{08}						H_{09}					
	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%
S_{KS}	0.367	–	–	–	–	–	0.203	–	–	–	–	–	0.160	–	–	–	–	–
S_{LR}	0.440	–	–	–	–	–	0.206	–	–	–	–	–	0.162	–	–	–	–	–
S_{ADP}	0.458	–	–	–	–	–	0.505	–	–	–	–	–	0.538	–	–	–	–	–
S_P	0.445	0.442	0.436	0.410	0.381	0.360	0.192	0.174	0.151	0.134	0.117	0.099	0.174	0.163	0.143	0.126	0.125	0.104
S_G	0.456	0.438	0.420	0.400	0.385	0.367	0.200	0.165	0.131	0.116	0.096	0.092	0.187	0.156	0.130	0.117	0.119	0.126
S_{LG}	0.414	0.411	0.391	0.375	0.346	0.332	0.608	0.487	0.363	0.274	0.190	0.136	0.703	0.559	0.384	0.259	0.165	0.122
S_{CM}	0.420	0.400	0.395	0.362	0.352	0.341	0.603	0.486	0.364	0.264	0.195	0.135	0.718	0.565	0.393	0.264	0.168	0.126
S_Q	0.443	0.426	0.418	0.410	0.386	0.356	0.530	0.422	0.304	0.220	0.163	0.117	0.581	0.465	0.320	0.214	0.153	0.119
S_{BN1}	0.369	0.346	0.330	0.307	0.298	0.280	0.742	0.607	0.454	0.323	0.220	0.139	0.956	0.828	0.592	0.358	0.183	0.102
S_{BN2}	0.293	0.297	0.270	0.261	0.247	0.233	0.666	0.544	0.405	0.292	0.213	0.158	0.970	0.884	0.700	0.488	0.320	0.226
S_{BN3}	0.366	0.353	0.339	0.314	0.303	0.269	0.719	0.585	0.448	0.304	0.202	0.136	0.906	0.735	0.516	0.289	0.161	0.095
S_{WKM}	0.463	0.448	0.417	0.411	0.376	0.371	0.193	0.162	0.134	0.109	0.093	0.081	0.175	0.152	0.131	0.130	0.119	0.130
$S_{WLG(TW)}$	0.455	0.440	0.425	0.414	0.374	0.367	0.334	0.267	0.208	0.157	0.117	0.101	0.320	0.257	0.188	0.147	0.125	0.112
$S_{WLG(PP)}$	0.219	0.202	0.201	0.184	0.171	0.157	0.802	0.685	0.534	0.384	0.261	0.169	0.940	0.819	0.608	0.382	0.203	0.105
$S_{WLG(P)}$	0.231	0.211	0.208	0.186	0.167	0.161	0.798	0.680	0.534	0.393	0.261	0.167	0.935	0.808	0.593	0.374	0.198	0.098
S_{MAX}	0.445	0.443	0.423	0.399	0.386	0.360	0.536	0.427	0.314	0.223	0.165	0.126	0.653	0.479	0.319	0.212	0.154	0.132
S_{MIN3}	0.375	0.368	0.359	0.342	0.338	0.319	0.670	0.527	0.376	0.261	0.189	0.138	0.957	0.835	0.616	0.413	0.254	0.198

Таблица А.7 – Значения мощности критериев для альтернативных гипотез $H_{11} - H_{13}$ с точкой пересечения в ранние моменты времени, $n_1 = n_2 = 200$

S	H_{11}						H_{12}						H_{13}					
	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%
S_{KS}	0.103	–	–	–	–	–	0.074	–	–	–	–	–	0.101	–	–	–	–	–
S_{LR}	0.109	–	–	–	–	–	0.073	–	–	–	–	–	0.100	–	–	–	–	–
S_{ADP}	0.185	–	–	–	–	–	0.099	–	–	–	–	–	0.165	–	–	–	–	–
S_P	0.064	0.061	0.056	0.052	0.051	0.049	0.058	0.057	0.052	0.051	0.051	0.049	0.062	0.057	0.052	0.052	0.050	0.051
S_G	0.068	0.058	0.054	0.050	0.049	0.054	0.055	0.055	0.052	0.050	0.048	0.052	0.062	0.054	0.051	0.049	0.054	0.062
S_{LG}	0.153	0.127	0.108	0.089	0.073	0.056	0.076	0.072	0.067	0.063	0.058	0.054	0.203	0.154	0.115	0.085	0.064	0.051
S_{CM}	0.151	0.129	0.110	0.092	0.073	0.058	0.074	0.071	0.069	0.066	0.058	0.056	0.210	0.157	0.116	0.086	0.064	0.052
S_Q	0.124	0.105	0.090	0.076	0.063	0.054	0.068	0.063	0.061	0.057	0.053	0.052	0.162	0.126	0.095	0.073	0.059	0.051
S_{BN1}	0.178	0.165	0.154	0.143	0.136	0.132	0.070	0.070	0.069	0.069	0.071	0.072	0.338	0.280	0.235	0.195	0.164	0.140
S_{BN2}	0.141	0.135	0.129	0.126	0.127	0.135	0.067	0.067	0.068	0.069	0.072	0.079	0.259	0.223	0.192	0.167	0.146	0.130
S_{BN3}	0.197	0.184	0.170	0.158	0.151	0.149	0.075	0.074	0.073	0.074	0.075	0.078	0.357	0.300	0.248	0.207	0.171	0.147
S_{WKM}	0.068	0.059	0.054	0.051	0.051	0.056	0.058	0.056	0.051	0.052	0.049	0.051	0.062	0.054	0.050	0.050	0.053	0.061
$S_{WLG(TW)}$	0.098	0.083	0.070	0.059	0.051	0.050	0.066	0.061	0.059	0.055	0.050	0.050	0.103	0.082	0.065	0.054	0.050	0.051
$S_{WLG(PP)}$	0.241	0.218	0.198	0.176	0.158	0.135	0.084	0.085	0.084	0.083	0.080	0.077	0.400	0.324	0.255	0.195	0.143	0.105
$S_{WLG(P)}$	0.249	0.224	0.197	0.180	0.157	0.137	0.086	0.085	0.083	0.081	0.080	0.078	0.395	0.327	0.252	0.195	0.144	0.104
S_{MAX}	0.125	0.105	0.092	0.079	0.070	0.063	0.066	0.064	0.062	0.060	0.058	0.057	0.170	0.130	0.100	0.080	0.066	0.063
S_{MIN3}	0.156	0.139	0.132	0.120	0.119	0.126	0.069	0.068	0.067	0.067	0.070	0.074	0.281	0.229	0.189	0.158	0.135	0.119

Таблица А.8 – Значения мощности критериев для альтернативных гипотез $H_{11} - H_{13}$ с точкой пересечения в ранние моменты времени, $n_1 = n_2 = 500$

S	H_{11}						H_{12}						H_{13}					
	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%
S_{KS}	0.220	–	–	–	–	–	0.116	–	–	–	–	–	0.207	–	–	–	–	–
S_{LR}	0.251	–	–	–	–	–	0.121	–	–	–	–	–	0.231	–	–	–	–	–
S_{ADP}	0.583	–	–	–	–	–	0.233	–	–	–	–	–	0.472	–	–	–	–	–
S_P	0.090	0.077	0.064	0.062	0.053	0.047	0.070	0.064	0.057	0.056	0.051	0.052	0.080	0.069	0.058	0.050	0.048	0.054
S_G	0.089	0.071	0.052	0.051	0.047	0.058	0.066	0.054	0.052	0.048	0.044	0.057	0.080	0.061	0.051	0.049	0.053	0.077
S_{LG}	0.300	0.254	0.195	0.159	0.105	0.070	0.113	0.104	0.089	0.083	0.074	0.057	0.458	0.330	0.217	0.141	0.090	0.058
S_{CM}	0.307	0.250	0.203	0.147	0.110	0.070	0.109	0.106	0.088	0.088	0.066	0.061	0.464	0.349	0.223	0.138	0.090	0.054
S_Q	0.243	0.200	0.158	0.123	0.088	0.062	0.089	0.081	0.072	0.067	0.062	0.058	0.380	0.276	0.187	0.121	0.080	0.052
S_{BN1}	0.377	0.346	0.317	0.288	0.277	0.256	0.098	0.099	0.099	0.096	0.101	0.097	0.710	0.618	0.529	0.435	0.360	0.305
S_{BN2}	0.312	0.297	0.270	0.264	0.261	0.278	0.094	0.093	0.093	0.095	0.107	0.121	0.612	0.537	0.448	0.384	0.328	0.274
S_{BN3}	0.430	0.393	0.368	0.341	0.310	0.311	0.110	0.108	0.112	0.109	0.112	0.113	0.757	0.654	0.548	0.449	0.378	0.319
S_{WKM}	0.092	0.074	0.058	0.051	0.050	0.066	0.068	0.062	0.055	0.050	0.052	0.050	0.075	0.058	0.049	0.049	0.054	0.076
$S_{WLG(TW)}$	0.175	0.135	0.102	0.073	0.056	0.049	0.090	0.080	0.073	0.063	0.052	0.051	0.191	0.133	0.088	0.061	0.050	0.054
$S_{WLG(PP)}$	0.507	0.461	0.412	0.360	0.317	0.252	0.137	0.140	0.130	0.129	0.125	0.117	0.780	0.667	0.552	0.416	0.305	0.205
$S_{WLG(P)}$	0.511	0.464	0.419	0.357	0.317	0.254	0.135	0.128	0.139	0.132	0.122	0.119	0.784	0.680	0.553	0.419	0.307	0.202
S_{MAX}	0.255	0.215	0.172	0.130	0.102	0.087	0.093	0.086	0.078	0.078	0.072	0.067	0.391	0.271	0.190	0.127	0.089	0.085
S_{MIN3}	0.345	0.316	0.294	0.265	0.258	0.255	0.095	0.093	0.092	0.093	0.093	0.113	0.664	0.563	0.468	0.373	0.313	0.259

Таблица А.9 – Значения мощности критериев для альтернативных гипотез $H_{14} - H_{16}$ с точкой пересечения в средние моменты времени, $n_1 = n_2 = 200$

S	H_{14}						H_{15}						H_{16}					
	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%
S_{KS}	0.066	–	–	–	–	–	0.156	–	–	–	–	–	0.073	–	–	–	–	–
S_{LR}	0.061	–	–	–	–	–	0.160	–	–	–	–	–	0.070	–	–	–	–	–
S_{ADP}	0.078	–	–	–	–	–	0.403	–	–	–	–	–	0.091	–	–	–	–	–
S_P	0.053	0.051	0.049	0.050	0.049	0.052	0.078	0.087	0.095	0.112	0.131	0.163	0.056	0.057	0.059	0.062	0.066	0.075
S_G	0.052	0.049	0.050	0.050	0.053	0.056	0.080	0.093	0.111	0.138	0.174	0.229	0.055	0.058	0.061	0.071	0.077	0.090
S_{LG}	0.104	0.084	0.068	0.057	0.051	0.050	0.073	0.058	0.051	0.049	0.055	0.070	0.064	0.055	0.051	0.050	0.049	0.053
S_{CM}	0.105	0.084	0.068	0.059	0.052	0.049	0.074	0.061	0.051	0.050	0.055	0.069	0.064	0.055	0.050	0.049	0.050	0.055
S_Q	0.096	0.079	0.069	0.062	0.057	0.051	0.117	0.109	0.106	0.117	0.126	0.121	0.065	0.058	0.058	0.058	0.058	0.059
S_{BN1}	0.173	0.140	0.117	0.098	0.086	0.076	0.323	0.312	0.303	0.294	0.299	0.310	0.137	0.128	0.119	0.115	0.108	0.106
S_{BN2}	0.133	0.116	0.101	0.089	0.080	0.073	0.258	0.253	0.262	0.270	0.287	0.325	0.108	0.104	0.104	0.099	0.100	0.098
S_{BN3}	0.176	0.144	0.119	0.100	0.086	0.078	0.390	0.370	0.358	0.349	0.345	0.349	0.153	0.139	0.131	0.122	0.116	0.114
S_{WKM}	0.052	0.050	0.050	0.051	0.053	0.057	0.080	0.092	0.110	0.137	0.175	0.233	0.057	0.058	0.064	0.068	0.077	0.090
$S_{WLG(TW)}$	0.064	0.058	0.052	0.050	0.050	0.052	0.050	0.056	0.067	0.081	0.108	0.151	0.051	0.049	0.051	0.056	0.063	0.073
$S_{WLG(PP)}$	0.197	0.156	0.123	0.097	0.078	0.062	0.262	0.216	0.181	0.146	0.110	0.087	0.129	0.110	0.093	0.078	0.066	0.058
$S_{WLG(P)}$	0.193	0.155	0.122	0.094	0.077	0.063	0.264	0.220	0.183	0.145	0.114	0.086	0.127	0.109	0.091	0.077	0.066	0.056
S_{MAX}	0.088	0.074	0.064	0.058	0.055	0.056	0.097	0.097	0.108	0.121	0.150	0.194	0.068	0.064	0.064	0.066	0.073	0.081
S_{MIN3}	0.136	0.112	0.097	0.085	0.075	0.071	0.316	0.296	0.294	0.300	0.316	0.358	0.119	0.112	0.103	0.104	0.102	0.104

Таблица А.10 – Значения мощности критериев для альтернативных гипотез $H_{14} - H_{16}$ с точкой пересечения в средние моменты времени, $n_1 = n_2 = 500$

S	H_{14}						H_{15}						H_{16}					
	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%
S_{KS}	0.088	–	–	–	–	–	0.543	–	–	–	–	–	0.107	–	–	–	–	–
S_{LR}	0.085	–	–	–	–	–	0.485	–	–	–	–	–	0.106	–	–	–	–	–
S_{ADP}	0.141	–	–	–	–	–	0.941	–	–	–	–	–	0.198	–	–	–	–	–
S_P	0.053	0.052	0.049	0.051	0.051	0.052	0.123	0.141	0.169	0.196	0.249	0.328	0.060	0.065	0.069	0.085	0.098	0.112
S_G	0.054	0.049	0.051	0.050	0.054	0.062	0.129	0.155	0.212	0.278	0.364	0.481	0.060	0.069	0.084	0.097	0.133	0.157
S_{LG}	0.205	0.137	0.096	0.066	0.052	0.049	0.108	0.077	0.052	0.049	0.061	0.100	0.083	0.070	0.055	0.047	0.050	0.053
S_{CM}	0.199	0.144	0.098	0.068	0.057	0.050	0.113	0.077	0.050	0.048	0.057	0.087	0.083	0.062	0.051	0.050	0.054	0.061
S_Q	0.169	0.129	0.088	0.075	0.064	0.057	0.198	0.174	0.174	0.200	0.228	0.222	0.092	0.081	0.077	0.071	0.081	0.088
S_{BN1}	0.388	0.295	0.226	0.183	0.144	0.118	0.682	0.656	0.645	0.647	0.633	0.671	0.285	0.260	0.241	0.228	0.212	0.198
S_{BN2}	0.299	0.244	0.190	0.155	0.127	0.106	0.602	0.602	0.587	0.615	0.647	0.692	0.224	0.213	0.200	0.194	0.179	0.180
S_{BN3}	0.397	0.304	0.244	0.182	0.144	0.123	0.791	0.760	0.740	0.730	0.719	0.735	0.330	0.290	0.273	0.239	0.230	0.223
S_{WKM}	0.055	0.048	0.046	0.050	0.055	0.067	0.126	0.156	0.208	0.273	0.361	0.493	0.059	0.070	0.078	0.099	0.115	0.156
$S_{WLG(TW)}$	0.087	0.070	0.054	0.050	0.047	0.055	0.050	0.062	0.084	0.125	0.207	0.303	0.049	0.047	0.056	0.064	0.081	0.107
$S_{WLG(PP)}$	0.423	0.332	0.234	0.174	0.118	0.081	0.566	0.465	0.377	0.284	0.206	0.135	0.258	0.215	0.164	0.126	0.090	0.069
$S_{WLG(P)}$	0.425	0.308	0.228	0.163	0.111	0.079	0.562	0.475	0.371	0.299	0.217	0.141	0.260	0.210	0.166	0.125	0.096	0.072
S_{MAX}	0.168	0.123	0.087	0.072	0.062	0.065	0.167	0.172	0.193	0.236	0.321	0.426	0.092	0.084	0.084	0.092	0.109	0.129
S_{MIN3}	0.306	0.236	0.187	0.145	0.117	0.102	0.712	0.687	0.676	0.665	0.684	0.733	0.258	0.226	0.213	0.199	0.187	0.198

Таблица А.11 – Значения мощности критериев для альтернативных гипотез $H_{17} - H_{19}$ с точкой пересечения в поздние моменты времени, $n_1 = n_2 = 200$

S	H_{17}						H_{18}						H_{19}					
	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%
S_{KS}	0.258	–	–	–	–	–	0.160	–	–	–	–	–	0.293	–	–	–	–	–
S_{LR}	0.274	–	–	–	–	–	0.172	–	–	–	–	–	0.339	–	–	–	–	–
S_{ADP}	0.333	–	–	–	–	–	0.203	–	–	–	–	–	0.400	–	–	–	–	–
S_P	0.204	0.215	0.231	0.247	0.261	0.275	0.151	0.155	0.165	0.171	0.177	0.189	0.345	0.335	0.323	0.317	0.306	0.293
S_G	0.202	0.228	0.265	0.295	0.330	0.358	0.150	0.163	0.180	0.200	0.219	0.243	0.343	0.341	0.341	0.342	0.333	0.326
S_{LG}	0.047	0.052	0.064	0.086	0.115	0.147	0.057	0.062	0.071	0.083	0.100	0.115	0.146	0.154	0.163	0.168	0.170	0.176
S_{CM}	0.050	0.053	0.066	0.084	0.114	0.150	0.057	0.063	0.072	0.083	0.099	0.114	0.144	0.156	0.162	0.167	0.171	0.180
S_Q	0.168	0.173	0.183	0.194	0.211	0.228	0.143	0.146	0.150	0.160	0.168	0.169	0.282	0.280	0.273	0.263	0.251	0.244
S_{BN1}	0.482	0.430	0.386	0.357	0.340	0.323	0.212	0.207	0.202	0.201	0.195	0.196	0.305	0.294	0.281	0.271	0.263	0.245
S_{BN2}	0.378	0.346	0.319	0.301	0.279	0.269	0.166	0.171	0.169	0.171	0.174	0.173	0.245	0.237	0.229	0.228	0.222	0.216
S_{BN3}	0.513	0.457	0.411	0.377	0.357	0.337	0.243	0.227	0.223	0.218	0.211	0.209	0.338	0.324	0.313	0.301	0.281	0.263
S_{WKM}	0.200	0.232	0.262	0.295	0.328	0.354	0.153	0.164	0.180	0.199	0.223	0.242	0.339	0.345	0.342	0.338	0.337	0.325
$S_{WLG(TW)}$	0.111	0.137	0.169	0.201	0.237	0.278	0.100	0.114	0.128	0.145	0.168	0.191	0.256	0.261	0.270	0.273	0.270	0.265
$S_{WLG(PP)}$	0.211	0.144	0.094	0.065	0.053	0.053	0.078	0.067	0.057	0.052	0.050	0.050	0.051	0.050	0.051	0.053	0.053	0.055
$S_{WLG(P)}$	0.207	0.139	0.093	0.066	0.053	0.053	0.080	0.066	0.057	0.052	0.049	0.049	0.051	0.049	0.050	0.053	0.054	0.057
S_{MAX}	0.174	0.190	0.220	0.248	0.278	0.304	0.128	0.135	0.153	0.170	0.186	0.205	0.293	0.289	0.295	0.295	0.281	0.274
S_{MIN3}	0.426	0.380	0.351	0.334	0.337	0.336	0.200	0.199	0.202	0.207	0.215	0.227	0.310	0.310	0.306	0.309	0.304	0.301

Таблица А.12 – Значения мощности критериев для альтернативных гипотез $H_{17} - H_{19}$ с точкой пересечения в поздние моменты времени, $n_1 = n_2 = 500$

S	H_{17}						H_{18}						H_{19}					
	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%
S_{KS}	0.611	–	–	–	–	–	0.367	–	–	–	–	–	0.627	–	–	–	–	–
S_{LR}	0.632	–	–	–	–	–	0.397	–	–	–	–	–	0.707	–	–	–	–	–
S_{ADP}	0.761	–	–	–	–	–	0.484	–	–	–	–	–	0.824	–	–	–	–	–
S_P	0.426	0.462	0.488	0.508	0.557	0.579	0.299	0.305	0.336	0.354	0.369	0.405	0.684	0.676	0.654	0.647	0.639	0.598
S_G	0.414	0.495	0.556	0.610	0.668	0.707	0.292	0.336	0.372	0.414	0.465	0.504	0.676	0.689	0.692	0.688	0.679	0.667
S_{LG}	0.043	0.055	0.089	0.141	0.211	0.284	0.059	0.080	0.106	0.138	0.159	0.208	0.278	0.319	0.324	0.329	0.355	0.366
S_{CM}	0.042	0.060	0.089	0.128	0.206	0.303	0.060	0.078	0.103	0.132	0.168	0.208	0.275	0.314	0.322	0.329	0.365	0.367
S_Q	0.378	0.401	0.442	0.457	0.479	0.522	0.283	0.297	0.309	0.330	0.349	0.357	0.618	0.613	0.595	0.592	0.569	0.539
S_{BN1}	0.880	0.832	0.778	0.753	0.733	0.701	0.465	0.458	0.457	0.449	0.442	0.446	0.655	0.648	0.638	0.604	0.597	0.562
S_{BN2}	0.810	0.766	0.726	0.687	0.661	0.633	0.394	0.385	0.388	0.405	0.409	0.401	0.571	0.575	0.557	0.531	0.519	0.503
S_{BN3}	0.912	0.864	0.813	0.771	0.750	0.726	0.538	0.519	0.503	0.485	0.491	0.475	0.719	0.710	0.676	0.648	0.629	0.588
S_{WKM}	0.421	0.469	0.542	0.615	0.662	0.713	0.306	0.341	0.363	0.411	0.460	0.523	0.685	0.698	0.691	0.699	0.677	0.658
$S_{WLG(TW)}$	0.194	0.271	0.344	0.425	0.501	0.581	0.176	0.207	0.246	0.291	0.349	0.401	0.542	0.559	0.564	0.558	0.575	0.558
$S_{WLG(PP)}$	0.468	0.315	0.178	0.097	0.057	0.054	0.130	0.091	0.074	0.055	0.049	0.050	0.048	0.049	0.050	0.055	0.059	0.059
$S_{WLG(P)}$	0.472	0.306	0.178	0.091	0.058	0.050	0.131	0.096	0.067	0.053	0.046	0.048	0.048	0.050	0.049	0.058	0.054	0.060
S_{MAX}	0.376	0.432	0.499	0.546	0.610	0.660	0.255	0.287	0.330	0.371	0.404	0.465	0.625	0.635	0.630	0.625	0.628	0.605
S_{MIN3}	0.867	0.805	0.765	0.737	0.720	0.717	0.454	0.459	0.465	0.463	0.481	0.494	0.689	0.680	0.658	0.667	0.663	0.632

Таблица А.13 – Значения мощности критериев для альтернативных гипотез $H_{21} - H_{23}$ с пересечениями в ранние и средние моменты времени, $n_1 = n_2 = 200$

S	H_{21}						H_{22}						H_{23}					
	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%
S_{KS}	0.091	–	–	–	–	–	0.083	–	–	–	–	–	0.088	–	–	–	–	–
S_{LR}	0.082	–	–	–	–	–	0.091	–	–	–	–	–	0.080	–	–	–	–	–
S_{ADP}	0.088	–	–	–	–	–	0.218	–	–	–	–	–	0.120	–	–	–	–	–
S_P	0.068	0.066	0.062	0.062	0.058	0.056	0.096	0.095	0.092	0.090	0.089	0.089	0.052	0.050	0.049	0.049	0.050	0.051
S_G	0.068	0.065	0.062	0.058	0.055	0.051	0.100	0.093	0.093	0.090	0.096	0.109	0.050	0.050	0.049	0.051	0.052	0.056
S_{LG}	0.054	0.058	0.065	0.066	0.068	0.064	0.124	0.112	0.104	0.092	0.087	0.080	0.171	0.122	0.089	0.068	0.056	0.050
S_{CM}	0.054	0.060	0.065	0.067	0.066	0.064	0.124	0.115	0.104	0.096	0.087	0.078	0.171	0.127	0.092	0.071	0.055	0.051
S_Q	0.055	0.060	0.062	0.062	0.062	0.060	0.121	0.115	0.108	0.099	0.092	0.086	0.137	0.104	0.081	0.063	0.055	0.052
S_{BN1}	0.084	0.066	0.063	0.062	0.064	0.064	0.100	0.094	0.089	0.081	0.072	0.074	0.393	0.307	0.247	0.189	0.147	0.114
S_{BN2}	0.150	0.107	0.092	0.085	0.076	0.070	0.091	0.087	0.083	0.085	0.083	0.087	0.308	0.250	0.195	0.156	0.124	0.098
S_{BN3}	0.065	0.060	0.061	0.062	0.064	0.065	0.102	0.095	0.087	0.080	0.076	0.076	0.393	0.314	0.246	0.188	0.147	0.113
S_{WKM}	0.068	0.065	0.061	0.059	0.055	0.051	0.099	0.094	0.094	0.089	0.094	0.103	0.052	0.050	0.050	0.052	0.053	0.056
$S_{WLG(TW)}$	0.070	0.069	0.067	0.066	0.061	0.055	0.108	0.101	0.095	0.089	0.086	0.087	0.072	0.061	0.053	0.050	0.050	0.051
$S_{WLG(PP)}$	0.050	0.052	0.059	0.065	0.069	0.071	0.112	0.101	0.092	0.079	0.067	0.055	0.403	0.311	0.231	0.171	0.121	0.085
$S_{WLG(P)}$	0.049	0.053	0.059	0.067	0.070	0.070	0.113	0.102	0.093	0.079	0.066	0.054	0.397	0.309	0.227	0.167	0.118	0.083
S_{MAX}	0.063	0.063	0.065	0.063	0.063	0.060	0.112	0.105	0.100	0.095	0.093	0.094	0.141	0.108	0.087	0.073	0.064	0.061
S_{MIN3}	0.123	0.093	0.081	0.074	0.068	0.063	0.098	0.093	0.094	0.094	0.098	0.109	0.316	0.237	0.184	0.144	0.110	0.091

Таблица А.14 – Значения мощности критериев для альтернативных гипотез $H_{21} - H_{23}$ с пересечениями в ранние и средние моменты времени, $n_1 = n_2 = 500$

S	H_{21}						H_{22}						H_{23}					
	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%
S_{KS}	0.161	–	–	–	–	–	0.475	–	–	–	–	–	0.183	–	–	–	–	–
S_{LR}	0.135	–	–	–	–	–	0.177	–	–	–	–	–	0.155	–	–	–	–	–
S_{ADP}	0.172	–	–	–	–	–	0.752	–	–	–	–	–	0.337	–	–	–	–	–
S_P	0.089	0.092	0.082	0.081	0.074	0.064	0.174	0.163	0.155	0.152	0.152	0.142	0.052	0.051	0.050	0.049	0.050	0.058
S_G	0.090	0.088	0.082	0.070	0.065	0.051	0.168	0.173	0.154	0.158	0.169	0.191	0.051	0.051	0.050	0.053	0.060	0.063
S_{LG}	0.055	0.066	0.082	0.087	0.087	0.086	0.227	0.214	0.184	0.169	0.144	0.118	0.361	0.259	0.171	0.105	0.069	0.055
S_{CM}	0.054	0.066	0.082	0.090	0.089	0.084	0.226	0.212	0.191	0.168	0.140	0.126	0.361	0.261	0.156	0.106	0.071	0.048
S_Q	0.061	0.071	0.078	0.085	0.084	0.077	0.211	0.206	0.183	0.166	0.151	0.136	0.308	0.223	0.160	0.104	0.071	0.059
S_{BN1}	0.163	0.092	0.079	0.075	0.077	0.079	0.176	0.168	0.151	0.126	0.119	0.109	0.798	0.684	0.564	0.426	0.316	0.232
S_{BN2}	0.345	0.212	0.166	0.143	0.123	0.102	0.160	0.140	0.127	0.126	0.117	0.129	0.708	0.596	0.464	0.351	0.273	0.189
S_{BN3}	0.095	0.076	0.071	0.075	0.080	0.086	0.177	0.165	0.152	0.134	0.120	0.115	0.797	0.694	0.555	0.435	0.330	0.223
S_{WKM}	0.089	0.085	0.081	0.067	0.062	0.052	0.173	0.166	0.159	0.157	0.170	0.182	0.052	0.049	0.049	0.054	0.057	0.061
$S_{WLG(TW)}$	0.091	0.098	0.096	0.084	0.079	0.064	0.193	0.176	0.162	0.149	0.136	0.139	0.111	0.076	0.057	0.050	0.052	0.051
$S_{WLG(PP)}$	0.043	0.052	0.066	0.079	0.092	0.106	0.193	0.178	0.160	0.129	0.098	0.068	0.795	0.665	0.516	0.367	0.243	0.151
$S_{WLG(P)}$	0.049	0.053	0.066	0.081	0.094	0.104	0.201	0.180	0.156	0.125	0.095	0.063	0.787	0.652	0.519	0.365	0.243	0.146
S_{MAX}	0.079	0.080	0.082	0.081	0.078	0.074	0.210	0.197	0.168	0.166	0.166	0.169	0.313	0.215	0.145	0.113	0.082	0.078
S_{MIN3}	0.282	0.171	0.132	0.117	0.102	0.079	0.177	0.160	0.152	0.147	0.165	0.197	0.731	0.590	0.452	0.342	0.234	0.173

Таблица А.15 – Значения мощности критериев для альтернативных гипотез $H_{24} - H_{26}$ с пересечениями в ранние и поздние моменты времени, $n_1 = n_2 = 200$

S	H_{24}						H_{25}						H_{26}					
	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%
S_{KS}	0.129	–	–	–	–	–	0.092	–	–	–	–	–	0.115	–	–	–	–	–
S_{LR}	0.110	–	–	–	–	–	0.078	–	–	–	–	–	0.099	–	–	–	–	–
S_{ADP}	0.197	–	–	–	–	–	0.087	–	–	–	–	–	0.198	–	–	–	–	–
S_P	0.051	0.050	0.051	0.050	0.050	0.053	0.053	0.051	0.051	0.050	0.050	0.050	0.050	0.051	0.052	0.051	0.056	0.059
S_G	0.050	0.050	0.051	0.052	0.055	0.068	0.053	0.051	0.051	0.051	0.052	0.054	0.050	0.050	0.053	0.056	0.068	0.087
S_{LG}	0.049	0.050	0.051	0.050	0.051	0.051	0.056	0.059	0.059	0.057	0.056	0.052	0.066	0.055	0.050	0.050	0.051	0.049
S_{CM}	0.048	0.049	0.050	0.053	0.053	0.051	0.057	0.058	0.059	0.060	0.057	0.052	0.069	0.055	0.051	0.050	0.051	0.050
S_Q	0.048	0.049	0.049	0.052	0.052	0.053	0.049	0.053	0.053	0.054	0.052	0.052	0.058	0.053	0.049	0.048	0.051	0.054
S_{BN1}	0.086	0.054	0.050	0.055	0.069	0.099	0.055	0.056	0.059	0.065	0.074	0.079	0.158	0.090	0.056	0.051	0.049	0.053
S_{BN2}	0.275	0.207	0.191	0.186	0.187	0.204	0.142	0.124	0.115	0.109	0.100	0.097	0.380	0.283	0.224	0.198	0.194	0.179
S_{BN3}	0.056	0.049	0.053	0.065	0.088	0.118	0.055	0.060	0.067	0.074	0.083	0.086	0.098	0.061	0.049	0.052	0.051	0.063
S_{WKM}	0.050	0.051	0.051	0.050	0.054	0.066	0.053	0.050	0.049	0.048	0.051	0.053	0.050	0.050	0.054	0.057	0.068	0.092
$S_{WLG(TW)}$	0.054	0.053	0.051	0.051	0.050	0.052	0.057	0.056	0.053	0.050	0.050	0.050	0.049	0.050	0.049	0.049	0.053	0.058
$S_{WLG(PP)}$	0.054	0.048	0.050	0.063	0.075	0.088	0.058	0.064	0.073	0.076	0.082	0.078	0.105	0.064	0.050	0.048	0.047	0.048
$S_{WLG(P)}$	0.050	0.049	0.055	0.067	0.079	0.093	0.058	0.068	0.074	0.080	0.082	0.081	0.102	0.062	0.049	0.048	0.047	0.050
S_{MAX}	0.050	0.050	0.053	0.056	0.066	0.074	0.056	0.056	0.056	0.056	0.058	0.059	0.061	0.055	0.052	0.054	0.064	0.081
S_{MIN3}	0.223	0.162	0.150	0.143	0.145	0.159	0.120	0.103	0.094	0.088	0.081	0.077	0.319	0.228	0.174	0.154	0.151	0.156

Таблица А.16 – Значения мощности критериев для альтернативных гипотез $H_{24} - H_{26}$ с пересечениями в ранние и поздние моменты времени, $n_1 = n_2 = 500$

S	H_{24}						H_{25}						H_{26}					
	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%
S_{KS}	0.321	–	–	–	–	–	0.174	–	–	–	–	–	0.292	–	–	–	–	–
S_{LR}	0.284	–	–	–	–	–	0.139	–	–	–	–	–	0.237	–	–	–	–	–
S_{ADP}	0.668	–	–	–	–	–	0.193	–	–	–	–	–	0.739	–	–	–	–	–
S_P	0.048	0.050	0.050	0.046	0.051	0.060	0.051	0.053	0.052	0.049	0.047	0.050	0.047	0.050	0.050	0.055	0.058	0.071
S_G	0.051	0.051	0.047	0.050	0.065	0.095	0.057	0.051	0.048	0.051	0.057	0.058	0.050	0.050	0.055	0.071	0.090	0.149
S_{LG}	0.051	0.044	0.049	0.046	0.054	0.052	0.058	0.064	0.072	0.064	0.066	0.056	0.108	0.069	0.053	0.045	0.049	0.048
S_{CM}	0.049	0.051	0.050	0.051	0.057	0.053	0.059	0.069	0.070	0.072	0.065	0.054	0.103	0.077	0.055	0.047	0.051	0.047
S_Q	0.048	0.048	0.049	0.054	0.058	0.055	0.050	0.062	0.063	0.066	0.057	0.055	0.072	0.060	0.051	0.051	0.051	0.056
S_{BN1}	0.177	0.059	0.052	0.055	0.085	0.153	0.066	0.061	0.067	0.081	0.098	0.118	0.409	0.189	0.079	0.047	0.052	0.056
S_{BN2}	0.615	0.459	0.401	0.384	0.398	0.441	0.305	0.244	0.221	0.207	0.190	0.184	0.790	0.623	0.500	0.402	0.404	0.386
S_{BN3}	0.071	0.052	0.052	0.082	0.140	0.226	0.057	0.073	0.090	0.107	0.121	0.139	0.204	0.095	0.054	0.051	0.057	0.077
S_{WKM}	0.049	0.050	0.047	0.051	0.064	0.097	0.053	0.053	0.049	0.050	0.051	0.063	0.051	0.054	0.058	0.067	0.095	0.151
$S_{WLG(TW)}$	0.053	0.054	0.054	0.051	0.049	0.059	0.066	0.064	0.059	0.054	0.050	0.049	0.047	0.051	0.051	0.050	0.055	0.073
$S_{WLG(PP)}$	0.064	0.049	0.052	0.073	0.107	0.137	0.059	0.079	0.098	0.109	0.133	0.120	0.235	0.116	0.053	0.047	0.050	0.045
$S_{WLG(P)}$	0.061	0.046	0.053	0.073	0.114	0.143	0.065	0.081	0.100	0.118	0.125	0.128	0.223	0.105	0.050	0.046	0.050	0.047
S_{MAX}	0.054	0.048	0.052	0.070	0.087	0.111	0.056	0.063	0.060	0.067	0.063	0.072	0.085	0.062	0.056	0.060	0.085	0.129
S_{MIN3}	0.530	0.365	0.334	0.302	0.298	0.356	0.243	0.193	0.177	0.147	0.148	0.129	0.725	0.547	0.406	0.326	0.324	0.330

Таблица А.17 – Значения мощности критериев для альтернативных гипотез $H_{27} - H_{29}$ с пересечениями в средние и поздние моменты времени, $n_1 = n_2 = 200$

S	H_{27}						H_{28}						H_{29}					
	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%
S_{KS}	0.559	–	–	–	–	–	0.138	–	–	–	–	–	0.626	–	–	–	–	–
S_{LR}	0.454	–	–	–	–	–	0.120	–	–	–	–	–	0.535	–	–	–	–	–
S_{ADP}	0.769	–	–	–	–	–	0.279	–	–	–	–	–	0.830	–	–	–	–	–
S_P	0.238	0.248	0.259	0.288	0.330	0.399	0.058	0.060	0.060	0.062	0.070	0.083	0.282	0.294	0.307	0.343	0.392	0.463
S_G	0.239	0.258	0.295	0.353	0.444	0.566	0.060	0.059	0.064	0.075	0.094	0.131	0.286	0.309	0.353	0.419	0.522	0.636
S_{LG}	0.095	0.084	0.085	0.092	0.119	0.163	0.054	0.050	0.050	0.050	0.050	0.051	0.098	0.086	0.090	0.104	0.143	0.190
S_{CM}	0.093	0.081	0.083	0.092	0.121	0.164	0.054	0.050	0.050	0.050	0.050	0.052	0.100	0.086	0.092	0.107	0.143	0.190
S_Q	0.229	0.238	0.252	0.281	0.309	0.292	0.058	0.058	0.063	0.065	0.072	0.070	0.271	0.278	0.299	0.331	0.369	0.339
S_{BN1}	0.137	0.188	0.257	0.344	0.435	0.534	0.057	0.050	0.054	0.070	0.100	0.147	0.179	0.245	0.325	0.417	0.508	0.610
S_{BN2}	0.451	0.468	0.504	0.562	0.624	0.692	0.267	0.221	0.219	0.221	0.237	0.275	0.493	0.525	0.560	0.624	0.690	0.753
S_{BN3}	0.259	0.315	0.389	0.459	0.536	0.612	0.052	0.059	0.075	0.103	0.136	0.180	0.334	0.396	0.471	0.540	0.616	0.690
S_{WKM}	0.244	0.254	0.294	0.358	0.446	0.569	0.057	0.059	0.065	0.078	0.095	0.131	0.284	0.307	0.352	0.419	0.521	0.647
$S_{WLG(TW)}$	0.141	0.148	0.165	0.205	0.273	0.376	0.053	0.051	0.050	0.052	0.059	0.078	0.164	0.172	0.198	0.244	0.326	0.444
$S_{WLG(PP)}$	0.048	0.054	0.064	0.069	0.075	0.071	0.047	0.046	0.051	0.063	0.071	0.082	0.052	0.061	0.069	0.074	0.075	0.069
$S_{WLG(P)}$	0.050	0.058	0.067	0.073	0.076	0.074	0.048	0.047	0.054	0.065	0.076	0.086	0.055	0.063	0.072	0.077	0.079	0.070
S_{MAX}	0.201	0.216	0.250	0.307	0.389	0.507	0.055	0.056	0.063	0.073	0.089	0.117	0.235	0.259	0.297	0.366	0.462	0.579
S_{MIN3}	0.433	0.462	0.504	0.567	0.642	0.718	0.218	0.178	0.184	0.188	0.215	0.256	0.482	0.521	0.572	0.636	0.707	0.780

Таблица А.18 – Значения мощности критериев для альтернативных гипотез $H_{27} - H_{29}$ с пересечениями в средние и поздние моменты времени, $n_1 = n_2 = 500$

S	H_{27}						H_{28}						H_{29}					
	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%	0%	10%	20%	30%	40%	50%
S_{KS}	0.982	–	–	–	–	–	0.471	–	–	–	–	–	0.992	–	–	–	–	–
S_{LR}	0.950	–	–	–	–	–	0.365	–	–	–	–	–	0.977	–	–	–	–	–
S_{ADP}	0.999	–	–	–	–	–	0.836	–	–	–	–	–	1.000	–	–	–	–	–
S_P	0.508	0.522	0.545	0.592	0.660	0.771	0.068	0.073	0.075	0.081	0.098	0.143	0.584	0.610	0.647	0.689	0.757	0.839
S_G	0.505	0.537	0.616	0.718	0.820	0.919	0.068	0.076	0.084	0.115	0.163	0.264	0.593	0.631	0.707	0.801	0.882	0.950
S_{LG}	0.173	0.122	0.131	0.164	0.224	0.345	0.062	0.052	0.051	0.051	0.052	0.053	0.180	0.155	0.146	0.195	0.280	0.396
S_{CM}	0.169	0.133	0.129	0.161	0.227	0.327	0.069	0.054	0.048	0.050	0.053	0.057	0.186	0.145	0.158	0.190	0.275	0.394
S_Q	0.465	0.498	0.526	0.572	0.636	0.563	0.067	0.068	0.071	0.086	0.094	0.102	0.548	0.583	0.613	0.668	0.711	0.642
S_{BN1}	0.271	0.392	0.542	0.701	0.816	0.910	0.085	0.049	0.053	0.098	0.176	0.283	0.381	0.513	0.673	0.795	0.893	0.952
S_{BN2}	0.816	0.844	0.876	0.918	0.952	0.976	0.579	0.471	0.466	0.472	0.505	0.586	0.855	0.885	0.919	0.951	0.976	0.990
S_{BN3}	0.568	0.671	0.770	0.854	0.913	0.956	0.059	0.074	0.107	0.173	0.262	0.390	0.687	0.788	0.870	0.920	0.960	0.979
S_{WKM}	0.503	0.544	0.602	0.714	0.823	0.922	0.071	0.073	0.085	0.108	0.162	0.269	0.582	0.625	0.706	0.795	0.887	0.959
$S_{WLG(TW)}$	0.277	0.293	0.343	0.434	0.566	0.743	0.055	0.053	0.054	0.057	0.072	0.125	0.332	0.354	0.420	0.521	0.667	0.818
$S_{WLG(PP)}$	0.043	0.060	0.076	0.101	0.102	0.098	0.054	0.044	0.052	0.069	0.098	0.121	0.053	0.074	0.092	0.108	0.107	0.099
$S_{WLG(P)}$	0.043	0.062	0.085	0.101	0.109	0.102	0.052	0.044	0.055	0.077	0.106	0.132	0.054	0.074	0.102	0.114	0.114	0.106
S_{MAX}	0.440	0.489	0.552	0.665	0.777	0.901	0.066	0.069	0.078	0.107	0.144	0.229	0.522	0.569	0.646	0.756	0.855	0.941
S_{MIN3}	0.808	0.846	0.883	0.925	0.962	0.983	0.501	0.410	0.406	0.401	0.471	0.561	0.860	0.895	0.927	0.960	0.982	0.993

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



RU 2017615277

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА
ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ

ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

Номер регистрации (свидетельства): 2017615277	Автор: Филоненко Петр Александрович (RU)
Дата регистрации: 11.05.2017	Правообладатель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» (RU)
Номер и дата поступления заявки: 2017612384 24.03.2017	
Дата публикации: 11.05.2017	

Название программы для ЭВМ:

Программа для вычисления значений статистик критериев однородности по двум выборкам

Реферат:

Программа предназначена для вычисления значений статистик критериев максимального значения, MIN3 и модифицированных критериев Крамера-Уэлча и Стьюдента при проверке статистической гипотезы об однородности (однородность распределений, однородность средних) по цензурированным справа данным. Программа может использоваться в научных и образовательных учреждениях.

Тип реализующей ЭВМ:	IBM PC-совмест. ПК
Язык программирования:	C++
Вид и версия операционной системы:	Windows 2000/XP/Vista/Server 2003/7/8/10
Объем программы для ЭВМ:	9 Кб

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Акты о внедрении результатов диссертационной работы



ООО «РМП - Холдинг»
 630123 г. Новосибирск, ул. Аэропорт, 12Б
 Тел.: (383) 334-04-36 Факс: (383) 334-04-36
 ОГРН 1145476155550
 ИНН/КПП 5402584348/ 540201001
 e-mail: rmp@rmp.ru

УТВЕРЖДАЮ

Директор по развитию

ООО «РМП – Холдинг»

Родносов Антон Петрович

«27» февраля 2017 г.



АКТ

о внедрении результатов диссертационной работы
 Филоненко Петра Александровича

Настоящим актом подтверждается, что результаты диссертационного исследования Филоненко П.А. внедрены в практику деятельности ООО «РМП – Холдинг» (Холдинг российские мясопродукты).

В частности, проверка статистической гипотезы однородности распределений использовалась для решения задачи статистического контроля качества производственного процесса на основе сравнения распределений масс готовой колбасной продукции одного и того же вида с применением различного оборудования.

В результате проведенного анализа сформирован список рекомендаций для более эффективной работы сотрудников инженерно-технической службы (ИТС) и технологической службы (ТС).

Технический директор

Жегулев М.Д.

Инженер по оборудованию

Литвиненко Н.А.

Технолог

Госман А.А.

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе НГТУ

д.т.н., доцент

Брованов С.В.

«12» декабря 2017 г.

**АКТ О ВНЕДРЕНИИ**

результатов диссертационной работы Филоненко П.А.

в учебный процесс факультета прикладной математики и информатики

Результаты диссертационной работы Филоненко Петра Александровича, в частности, разработанные алгоритмы, внедрены в учебный процесс факультета прикладной математики и информатики (ФПМИ) ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет» и используются при изучении дисциплины «Компьютерные технологии анализа данных и исследование статистических закономерностей» по направлению 01.04.02 – «Прикладная математика и информатика» в рамках магистерской программы «Математическое моделирование детерминированных и стохастических процессов». Освоение магистрантами соответствующих разделов дисциплины способствует приобретению необходимых знаний и умений для применения на практике аппарата проверки статистических гипотез в случае цензурированных наблюдений.

Декан ФПМИ,
д.т.н., доцент

Тимофеев В.С.

Заведующий кафедрой ТПИ,
д.т.н., доцент

Чубич В.М.