

На правах рукописи



Паульзен Анна Евгеньевна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В МЯГКИХ  
ОБОЛОЧКАХ ИЗ ТКАНЫХ ПОЛИМЕРНЫХ  
МАТЕРИАЛОВ**

Специальность 05.13.18 - Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Новокузнецк – 2021

Работа выполнена в Новокузнецком институте (филиале) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Кемеровский государственный университет».

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор  
**Каледин Валерий Олегович**

Официальные оппоненты: **Кургузов Владимир Дмитриевич**,  
доктор физико-математических наук, доцент,  
федеральное государственное бюджетное  
учреждение науки Институт гидродинамики  
им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения  
Российской Академии наук, лаборатория меха-  
ники разрушения материалов и конструкций,  
ведущий научный сотрудник

**Лопатин Александр Витальевич**, доктор  
технических наук, профессор, федеральное  
государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования «Сибирский  
государственный университет науки и техно-  
логий имени академика М.Ф. Решетнева», ка-  
федра компьютерного моделирования, заведу-  
ющий кафедрой

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное об-  
разовательное учреждение высшего образова-  
ния «Самарский государственный технический  
университет»

Защита диссертации состоится «27» января 2022 года в 14 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д.212.173.06 при Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» по адресу: 630073 г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, I корпус, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного технического университета и на сайте [www.nstu.ru](http://www.nstu.ru).

Автореферат разослан «\_\_\_» ноября 2021 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Андрей Владимирович Фаддеенков

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность.** Проектирование средств защиты из многослойных тканых материалов связано с выбором конструктивных параметров – числа слоёв, плотности ткани каждого слоя и ориентации нитей основы и утка в слоях относительно слоистого тканого пакета, обеспечивающих возможно большее поглощение кинетической энергии ударника. Для повышения защитных свойств необходимо на этапе проектирования получать расчётную оценку энергопоглощения в зависимости от выбора конструктивных параметров. Для этого требуется моделирование термомеханических процессов, в которых происходит поглощение энергии удара и её преобразование в тепло. Несмотря на значительное число публикаций, исчерпывающего решения проблема не получила, и сравнение энергопоглощения различных тканей при ударах различными поражающими элементами на практике производится экспериментально, путём натуральных испытаний и измерения повреждений защищаемого материала (подложки). Задача осложняется многообразием механизмов поглощения энергии ткаными материалами: за счёт разрыва нитей, внутреннего трения в материале слоёв, трения слоёв ткани, смятия волокон и т.д. Одним из важных факторов является трение, поглощающее до 50-60% всей кинетической энергии, однако прямое измерение сил трения невозможно ввиду малой продолжительности удара.

**Степень разработанности темы исследования.** В последние годы появились работы по косвенной оценке энергопоглощения тепловым методом (Будадин О.Н., Козельская С.О.), с использованием динамических термограмм, на основе эффекта повышения температуры тканого материала при поглощении энергии удара. Однако для использования этого эффекта при оценке качества многослойных преград необходимо математическое моделирование термомеханических процессов в оболочках из тканых полимерных материалов при ударе.

Таким образом, представляется актуальной разработка и обоснование новой математической модели механических и тепловых процессов в многослойном пакете из полимерной ткани при ударе жестким поражающим элементом с учетом обратимой и необратимой деформации растяжения нитей, разрыва нитей, взаимного проскальзывания слоёв ткани и нитей внутри слоя, выделения и передачи тепла в ткани.

**Научной задачей,** решаемой в работе, является расчётно-экспериментальная оценка динамических температурных полей, обусловленных поглощением энергии поражающего элемента многослойным тканым материалом.

**Идея работы** состоит в моделировании деформирования многослойного тканого материала при ударе как многослойной моментной оболочки, содержащей подвижные нити, непрерывно распределённые по объёму слоёв ткани и механически взаимодействующие с содержащим их слоем материала.

**Цель работы** заключается в разработке средств математического моделирования процессов поглощения энергии при ударе жестким поражающим эле-

ментом в многослойный пакет из полимерной ткани применительно к оценке нестационарных температур на поверхности.

**Задачи исследования:**

1. Разработка математической модели механических и тепловых процессов в многослойном пакете из полимерной ткани при ударе жестким поражающим элементом, учитывающей растягивающие напряжения в нитях, необратимость деформации растяжения, работу разрыва нитей, трение при взаимном проскальзывании слоёв ткани и нитей внутри слоя, выделение тепла и его распространение в ткани.

2. Модификация численной схемы интегрирования уравнений движения многослойного тканого образца при ударе и алгоритма расчёта поглощения энергии поражающего элемента и динамических температурных полей в ткани.

3. Разработка комплекса программ, реализующего модифицированный алгоритм расчёта динамических температурных полей при ударе жестким поражающим элементом в многослойный тканый образец.

4. Исследование сеточной сходимости, точности численного решения и чувствительности модели к вариации конструктивных параметров тканого пакета и начального импульса поражающего элемента.

5. Расчётно-экспериментальное исследование энергопоглощения в многослойных образцах из полимерной ткани на основе математического моделирования и анализа динамических термограмм.

**Методы исследования** включают: известные методы механики деформируемого твердого тела и термодинамики для построения математической модели термомеханических процессов в многослойных пакетах из полимерной ткани при ударе жестким поражающим элементом, численные методы решения краевых задач и вычислительной математики для расчета динамических напряжений, деформаций и температур, методы объектно-ориентированного программирования и функционально-объектной декомпозиции, метод термографии для экспериментального обоснования достоверности результатов.

**Научная новизна работы:**

1. Математическая модель процессов деформирования и тепловыделения в тканом многослойном образце при соударении с жестким воздействующим объектом, в которой слои ткани рассматриваются как сплошная среда с включёнными в неё нитями, отличающаяся отдельным описанием процессов на стадии начального уплотнения и оболочечного деформирования, учетом различия деформаций слоёв пакета и их взаимного проскальзывания, позволяющая определить деформацию, напряжение, поглощённую энергию и температуру нитей ткани в каждый момент времени.

2. Алгоритм расчета деформаций, напряжений и температурных полей на оболочечной стадии деформирования при начальных условиях, найденных расчётом начальной стадии уплотнения материала, отличающийся расщеплением неявной разностной схемы по процессам в переносном и относительном движении, что позволяет сократить время вычислений.

3. Комплекс программ, реализующий разработанный алгоритм вычисления динамических напряжений, деформаций, поглощённой энергии и темпе-

ратур, отличающийся представлением программного кода в виде ориентированной сети конечных автоматов с побочными эффектами и наличием программ интерактивной подготовки исходных данных для моделей многослойных тканых пакетов, расчета динамических температурных полей в слоях ткани, а также визуализации результатов расчёта.

**Личный вклад автора** заключается в: формулировке математической модели деформирования и тепловыделения в тканом многослойном образце при ударе поражающим элементом с отдельным описанием стадии уплотнения и оболочечного деформирования; модификации неявной разностной схемы путем расщепления по процессам в переносном и относительном движении; программной реализации расчета динамических температурных полей в среде программирования «Алгозит»; оценке порядка сходимости; модернизации алгоритмов поведения функциональных объектов, образующих сеть с побочными эффектами, путём изменения механизма передачи неявного аргумента для исключения повторных вычислений при неизменных значениях неявного аргумента; проведении вычислительных экспериментов для комплексного исследования термомеханических процессов в оболочках из полимерной ткани; сравнении результатов расчёта с экспериментальными данными.

**Обоснованность и достоверность** научных положений и выводов обеспечена применением апробированных методов и постановок задач, исследованием точности численных решений, и подтверждается согласованием результатов расчётов с данными известных и специально поставленных экспериментов.

**Практическая значимость** работы состоит в возможности использования её результатов для расчётно-экспериментальной оценки энергопоглощения в полимерных тканых материалах при проектировании средств защиты.

**На защиту выносятся:**

1. Математическая модель деформирования и нагрева многослойного тканого материала при соударении с поражающим элементом, учитывающая начальную стадию уплотнения материала при соударении и оболочечную стадию движения, на которой для пакета в целом принимается гипотеза Рэди об оболочке с деформируемой нормалью, исключая сингулярность растягивающих напряжений.

2. Численная схема расчёта энергопоглощения на основе модификации метода конечных элементов и конечных разностей, позволяющая рассчитать энергопоглощение и температуры во всех слоях пакета ткани, в которой форма лицевой поверхности аппроксимируется эрмитовым сплайном, уравнения движения в процессе уплотнения материала заменяются неявной разностной схемой по времени, а перемещения и скорости после уплотнения используются как начальные условия для уравнений колебаний после начальной стадии соударения.

3. Комплекс программ для расчёта динамического деформирования многослойного тканого материала при ударе жестким поражающим элементом и вызванных им динамических температурных полей, реализованный в среде функционально-объектного программирования «Алгозит».

**Апробация работы.** Основные положения и результаты работы доклады-

вались и обсуждались на Всероссийской конференции с международным участием «Современные проблемы механики сплошных сред и физики взрыва» (Новосибирск, 2017); XXI Международной научно-практической конференции, посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева «Решетневские чтения», (Красноярск, 2017); Всероссийской научной конференции «Краевые задачи и математическое моделирование» (Новокузнецк, 2016, 2018), семинаре кафедры Прикладных информационных технологий и программирования Сибирского государственного индустриального университета (2019), IX Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых (Новокузнецк, 2019), 57-й Международной научной студенческой конференции (Новосибирск, 2019), XVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых (Томск, 2019).

**Внедрение результатов.** Результаты работы (алгоритмы расчета, комплекс программ для ЭВМ и результаты расчётов) использованы в АО «Центральный научно-исследовательский институт специального машиностроения» и в научно-исследовательских работах НФИ КемГУ, что подтверждено тремя актами и справкой об использовании результатов диссертации.

**Публикации.** Основные результаты диссертации изложены в 17 опубликованных печатных работах, из них 3 статьи в рецензируемых периодических изданиях из перечня ВАК, 2 – индексируемых в SCOPUS.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка используемой литературы из 121 наименования и 5 приложений. Общий объем диссертации составляет 216 страниц и включает 65 рисунков и 2 таблицы.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Во введении** обосновывается актуальность исследования термомеханических процессов в полимерных тканых материалах методами математического моделирования при ударе с учетом уплотнения слоёв, разрушения нитей, взаимного проскальзывания слоёв ткани и нитей в пределах слоя. Сформированы цель и задачи исследования, излагается краткое содержание работы.

**Первая глава** содержит обзор методов моделирования многослойных тканых образцов при соударении с жестким элементом. Приведены известные экспериментальные оценки энергопоглощения и теоретические модели.

В эксперименте затруднена регистрация параметров быстропротекающих процессов при соударении. В связи с этим в последние годы появились работы по косвенной оценке энергопоглощения на основе эффекта повышения температуры тканого материала при поглощении энергии удара. Существующая модель термомеханических процессов, разработана С.О. Козельской при участии О.Н. Будадина и В.О. Каледина, не учитывает различного поглощения энергии в каждом слое слоистого пакета; модель приводит к сингулярности напряжений в точке удара и в начальный момент соударения; не учитывается взаимное проскальзывание слоёв. Это требует усовершенствования модели.

Аналитическое определение динамических деформаций, напряжений и

температурных полей невозможно, поэтому для моделирования удара жесткого элемента в многослойный образец необходимо использование численных методов. Следовательно, для проектирования тканых материалов защитного назначения актуальна разработка математической модели процесса деформирования при нагреве, численной схемы и программного обеспечения для расчетов.

**Во второй главе** описана математическая модель динамического деформирования и нагрева многослойного тканого материала. Пакет, деформируемый под действием удара, представляется в виде трехуровневой структуры: уровень пакета, уровень слоя и уровень нитей. При моделировании рассматриваются процессы необратимого растяжения нитей, проскальзывания слоёв ткани и нитей внутри слоя, выделения энергии в виде тепла и нагрева материала.

В модели выделяются две стадии соударения: волновая и оболочечная. На обеих стадиях модель включает определяющие уравнения материала, условия совместности перемещений, кинематические соотношения, уравнения движения, начальные и граничные условия в перемещениях и напряжениях. Волновая стадия ограничивается временем уплотнения ткани с ликвидацией начальной пористости при прохождении продольной волны от поверхности соударения. В это время в слоях ткани происходит разрыв нитей вблизи контакта с поражающим элементом. На волновой стадии находятся скорости и перемещения, которые принимаются за начальные условия при расчёте оболочечной стадии, во время которой происходит проникание в ткань и торможение ударника.

Для описания движения на оболочечной стадии принимается модель в форме, аналогичной уравнениям теории оболочек. Движение слоистого пакета рассматривается как объединение переносного движения пакета в целом и относительного движения нитей в ткани. Кинематика переносного движения определяется движением отсчётной поверхности пакета в целом, движением точек вдоль нормали и сдвиговыми перемещениями слоёв, а кинематика относительного движения – перемещением нитей вдоль искривленной поверхности.

Нагрев ткани происходит за счёт перехода в тепло работы сил трения и частичного перехода в тепло работы разрушения. Разрыв нити происходит при достижении предельной деформации. Определяющее уравнение материала для напряжений и работы на необратимых деформациях найдено из диаграмм деформирования, полученных экспериментально при одноосном нагружении.

В зависимости от деформаций нить может находиться в состоянии активного нагружения, разгрузки, сжатия и разрушения. Деформации нитей рассматриваются только в направлении их укладки, и зависят от переносных и относительных перемещений. Модули упругости  $E$ , напряжения  $\sigma$  и плотность поглощенной энергии  $A_{необр}$ , найденные для нитей основы  $\alpha$  и утка  $\beta$ , могут быть осреднены для  $i$ -го слоя с учётом их объёмного содержания  $\xi_\alpha$  и  $\xi_\beta$ :

$$\begin{aligned} E_\alpha^{(i)} &= \xi_\alpha^{(i)} E_\alpha^H, E_\beta^{(i)} = \xi_\beta^{(i)} E_\beta^H; \\ \sigma_\alpha^{(i)} &= \xi_\alpha^{(i)} \sigma_\alpha^{(i)}, \sigma_\beta^{(i)} = \xi_\beta^{(i)} \sigma_\beta^{(i)}; \\ A_{необр}^{(i)} &= \xi_\alpha^{(i)} A_{необр}^{(\alpha)} + \xi_\beta^{(i)} A_{необр}^{(\beta)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для записи уравнения движения в вариационной постановке по отдельности выражаются вариации кинетической энергии  $\delta T$ , работы напряжений в нитях  $\delta A_{раст}$ , работа сил трения  $\delta A_{тр.нитей}$ ,  $\delta A_{тр.слоев}$  и работа внешних сил реакции основания  $\delta A_{осн}$ . Уравнение движения в вариационной постановке имеет вид:

$$\delta T + \delta A_{раст} + \delta A_{тр.нитей} + \delta A_{тр.слоев} = \delta A_{осн}. \quad (2)$$

Вариация кинетической энергии:

$$\delta T = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial V_z} \cdot \delta u_z + \sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial V_\alpha^{(i)}} \cdot \delta u_\alpha^{(i)} + \sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial V_\beta^{(i)}} \cdot \delta u_\beta^{(i)}. \quad (3)$$

Вариация работы растягивающих напряжений в нитях выражается через вариации деформаций слоёв:

$$\delta A_{раст} = \sum_l h^{(l)} \left( \sigma_\alpha^{(l)} \delta \varepsilon_\alpha^{(l)} + \sigma_\beta^{(l)} \delta \varepsilon_\beta^{(l)} \right) \quad (4)$$

вариация работы сил трения нитей – через вариации относительных перемещений нитей:

$$\delta A_{тр.нитей} = \sum_l \left( \tau_\alpha^{(l)} \delta u_\alpha^{(l)} + \tau_\beta^{(l)} \delta u_\beta^{(l)} \right) \quad (5)$$

вариация работы сил трения слоёв – через вариации взаимных смещений слоёв, которые однозначно определяются вариацией переносных перемещений:

$$\delta A_{тр.слоев} = \sum_l \left( \tau_{nx}^{(l)} \delta u_x^{(l)} + \tau_{ny}^{(l)} \delta u_y^{(l)} \right) \quad (6)$$

Вариация работы внешних сил на необратимой деформации основания определена следующим образом:

$$\delta A_{осн} = \sigma_n \cos(n, z) \cdot \delta u_z. \quad (7)$$

Запишем постановку задачи.

Пусть задана прямоугольная область  $-a \leq x \leq a$ ,  $-b \leq y \leq b$ , которая является поверхностью приведения пакета из  $N$  слоёв ткани, причём угол между основной  $i$ -го слоя и осью  $x$  равен  $\varphi_i$ . Требуется найти функции двух координат  $u_z(x, y, t) \in C^1$ ,  $u_\alpha^{(i)}(x, y, t) \in C^0$ ,  $u_\beta^{(i)}(x, y, t) \in C^0$ ,  $i=1, \dots, N$ , удовлетворяющие уравнению (2), начальным условиям:

$$u_z(x, y, 0) = u_{z0}(x, y), u_\alpha^{(i)}(x, y, 0) = u_{\alpha 0}^{(i)}(x, y), u_\beta^{(i)}(x, y, 0) = u_{\beta 0}^{(i)}(x, y), \quad (8)$$

$$\dot{u}_z(x, y, 0) = V_{z0}(x, y), \dot{u}_\alpha^{(i)}(x, y, 0) = V_{\alpha 0}^{(i)}(x, y), \dot{u}_\beta^{(i)}(x, y, 0) = V_{\beta 0}^{(i)}(x, y),$$

граничному условию на закреплённой части кромки  $\Gamma_1$ :

$$u_z|_{\Gamma_1} = 0, \quad (9)$$

граничным условиям на кромках  $x = \pm a$ :

$$\sigma_\alpha^{(i)}(x, y, t) \cdot \cos \varphi_i \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad \sigma_\beta^{(i)}(x, y, t) \cdot \sin \varphi_i \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad (10)$$

и граничным условиям на кромках  $y = \pm b$ :



$$\sigma_{\alpha}^{(i)}(x, y, t) \cdot \sin \varphi_i \Big|_{y=\pm b} = 0, \quad \sigma_{\beta}^{(i)}(x, y, t) \cdot \cos \varphi_i \Big|_{y=\pm b} = 0. \quad (11)$$

Начальные условия, а также перемещения обжатия нормали, принимаются из результатов расчета волновой стадии деформирования.

Граничные условия в перемещениях заключаются в запрете переносных перемещений закреплённых кромок или частей кромок многослойного пакета. Для относительного движения нитей граничные условия состоят в равенстве нулю напряжений в нитях на кромках при произвольном угле армирования  $\varphi$ . В частности, если нити параллельны кромке, то условия (10)-(11) выполняются тождественно.

**В третьей главе** построены численные схемы уравнений движения для волновой и оболочечной стадий. Дискретизация производится методом конечных элементов с использованием эрмитова сплайна для аппроксимации переносных перемещений и лагранжева – для аппроксимации относительных. За обобщённые перемещения приняты переносные перемещения  $u_z$  для всего пакета и относительных перемещений нитей  $u_{\alpha}$ ,  $u_{\beta}$  в каждом слое. Матричные коэффициенты уравнения движения дискретной системы определены как коэффициенты уравнения Лагранжа 2-го рода, в результате получен дискретный аналог уравнения движения:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = P(t). \quad (12)$$

Степени свободы пронумерованы так, чтобы получить блочный вид глобальных матриц: вначале все переносные степени свободы, затем относительные степени свободы первого слоя, затем относительные перемещения второго слоя и т.д. С учетом такого представления уравнение движения (12) примет вид:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sr} \\ \mathbf{M}_{rs} & \mathbf{M}_{rr} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_s \\ \ddot{\mathbf{q}}_r \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ss} & \mathbf{C}_{sr} \\ \mathbf{C}_{rs} & \mathbf{C}_{rr} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_s \\ \dot{\mathbf{q}}_r \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ss} & \mathbf{K}_{sr} \\ \mathbf{K}_{rs} & \mathbf{K}_{rr} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{q}_s \\ \Delta \mathbf{q}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{R}_s \\ -\mathbf{R}_r \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Построена неявная разностная схема по времени, первая и вторая производные перемещений по времени аппроксимируются конечными разностями:

$$\ddot{\mathbf{q}}^t = \frac{\dot{\mathbf{q}}^{t+1} - \dot{\mathbf{q}}^t}{\tau}, \quad \mathbf{q}^{t+1} = \mathbf{q}^t + \tau \dot{\mathbf{q}}^{t+1}. \quad (14)$$

Для сокращения объёма вычислений использована схема расщепления по процессам переносного и относительного движения (эйлеров этап и лагранжев этап). Для эйлерова этапа получаем:

$$\begin{aligned} & \left[ \mathbf{M}_{ss}(\mathbf{q}_s^t) + \tau \mathbf{C}_{ss} + \tau^2 \mathbf{K}_{ss}(\mathbf{q}_s^t) \right] \dot{\mathbf{q}}_s^{t+1} = \mathbf{M}_{ss}(\mathbf{q}_s^t) \dot{\mathbf{q}}_s^t + \mathbf{M}_{sr}(\mathbf{q}_s^t) (\dot{\mathbf{q}}_r^{t-1} - \dot{\mathbf{q}}_r^t) - \\ & - \tau \mathbf{C}_{sr}(\mathbf{q}_s^t, \dot{\mathbf{q}}_s^t) \cdot \dot{\mathbf{q}}_r^t - \tau^2 \mathbf{K}_{sr}(\mathbf{q}_s^t, \mathbf{q}_r^t) \dot{\mathbf{q}}_r^t - \mathbf{R}_s(\mathbf{q}_s^t, \mathbf{q}_r^t). \end{aligned} \quad (15)$$

После её решения определим  $\mathbf{q}_s^{t+1} = \mathbf{q}_s^t + \tau \dot{\mathbf{q}}_s^{t+1}$ .

Для лагранжева этапа:

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{M}_{rr} + \tau \mathbf{C}_{rr} + \tau^2 \mathbf{K}_{rr}(\mathbf{q}_s^{t+1}, \mathbf{q}_r^t) \right] \dot{\mathbf{q}}_r^{t+1} = \mathbf{M}_{rr} \dot{\mathbf{q}}_r^t + \mathbf{M}_{rs}(q_s^{t+1}) (\dot{\mathbf{q}}_s^t - \dot{\mathbf{q}}_s^{t+1}) - \\ - \tau \mathbf{C}_{rs}(\mathbf{q}_s^{t+1}, \dot{\mathbf{q}}_s^{t+1}) \cdot \dot{\mathbf{q}}_s^{t+1} - \tau^2 \mathbf{K}_{rs}(\mathbf{q}_s^{t+1}, \mathbf{q}_r^t) \cdot \dot{\mathbf{q}}_s^{t+1} - \mathbf{R}_r(\mathbf{q}_s^{t+1}, \mathbf{q}_r^t). \end{aligned} \quad (16)$$

Решив эту систему, найдём  $\mathbf{q}_r^{t+1} = \mathbf{q}_r^t + \tau \dot{\mathbf{q}}_r^{t+1}$ .

На каждом этапе схема приводится к системе линейных алгебраических уравнений. При гладких коэффициентах обеспечивается абсолютная устойчивость и сохраняется первый порядок сходимости относительно шага  $\tau$ .

В результате решения уравнений движения вычисляются скорости, перемещения, деформации и напряжения, что даёт возможность вычислить работу напряжений на необратимых деформациях. Считая, что работа сил трения  $A_{тр.нитей}$  и  $A_{тр.слоев}$  полностью переходит в тепло, а работа разрушения нитей  $A_p$  переходит в тепло частично, выражение для адиабатической температуры ткани  $T_{ад}$  имеет вид:

$$T_{ад} = \frac{1}{c_p} (A_{тр.нитей} + A_{тр.слоев} + b \cdot A_p), \quad (17)$$

где  $c$  – удельная теплоемкость,  $b$  – коэффициент теплового эффекта.

**В четвёртой главе** описана программная реализация алгоритма решения в виде комплекса программ, включающего программу решения уравнений движения многослойного пакета при ударе и расчёта динамических температурных полей, программу интерактивной подготовки данных для расчёта и программу визуализации результатов, и приведены результаты вычислительных экспериментов.

Вычислительная часть программного комплекса реализована по технологии функционально-объектного программирования в среде «Алгозит», структурная схема которой представлена на рисунке 1. На схеме обозначены включенные в среду программные модули с указанием входных и выходных данных для каждого из этих модулей. Основная часть комплекса реализует алгоритм решения начально-краевой задачи, включающий вычисление матриц-коэффициентов уравнения движения, перемещений и скоростей, деформаций и скоростей деформаций, напряжений, поглощённой энергии и температуры. Вычисленные результаты для каждого шага по времени выводятся в файлы.

Программа расчета деформирования и тепловыделения включает в себя набор функционально-объектных схем, разработанных в компоненте «Конструктор», и библиотеку классов на языке C++ («Фабрика функциональных объектов»). Метод построения объектно-функциональных схем модифицирован для представления алгоритма вычислений в виде сети конечных автоматов с побочными эффектами. Функциональный объект может иметь, наряду с обычными аргументами, аргументы-серверы. Их вычисление вызывается внутри метода вычисления зависимого объекта, при этом аргументу-серверу передаётся вектор именованных данных – неявный аргумент: координаты точки численного интегрирования, температура и деформации. Разработан и реализован механизм автоматической транзитной передачи неявных аргументов, позволяющий не производить повторных вычислений, если в неявном аргументе остались неизменными данные. Введено обозначение транзитной передачи на функцио-

нально-объектной схеме при её построении в программе-конструкторе. Предложенные изменения позволяют сократить время выполнения и упрощают программирование функциональных классов.

При сопровождении программного комплекса может потребоваться изменить математическую модель и численную схему, чтобы обеспечить адекватность моделирования по мере изменения условий натуральных испытаний. С целью улучшения управляемости программы и её быстрой модификации функционально-объектные схемы разделены на страницы (агрегаты взаимосвязанных объектов) в соответствии с уравнениями, образующими модель. Таким образом, изменение какой-либо одной группы уравнений математической модели или изменение способа аппроксимации в численной схеме требует изменения только тех страниц схемы, которые содержат объекты, относящиеся к изменяемым аспектам модели.



Рисунок 1 – Структурная схема среды функционально-объектного программирования «Алгозит»

Волновая стадия соударения была проанализирована в одномерной постановке. Построены зависимости скорости от времени для первого, второго и последнего слоя, а также зависимость от номера слоя в фиксированные моменты времени. Приведена оценка погрешности решения по изменению суммарного количества движения, показано, что рассчитанное количество движения изменяется за время полного уплотнения пакета не более чем на  $10^{-13}$  от началь-

ного импульса поражающего элемента.

Модель деформирования на оболочечной стадии исследована на контрольных примерах. Оценивалась сеточная сходимость численной схемы при варьировании густоты разбиения на конечные элементы и уменьшения временного шага при неизменных физико-механических характеристиках материала и начальной скорости ударника. Показано, что эффективный порядок сходимости меньше теоретического вследствие разрывности коэффициентов уравнений движения. Значения адиабатической температуры при сгущении сетки и уменьшении шага по времени изменяются незначительно.

Для сопоставления с данными физического эксперимента рассчитаны динамические поля перемещений, деформаций и температуры квадратных в плане образцов из полимерной ткани. На рисунке 2 показана трехмерная визуализация перемещений для трёх моментов времени при начальной скорости поражающего элемента 100 м/с.

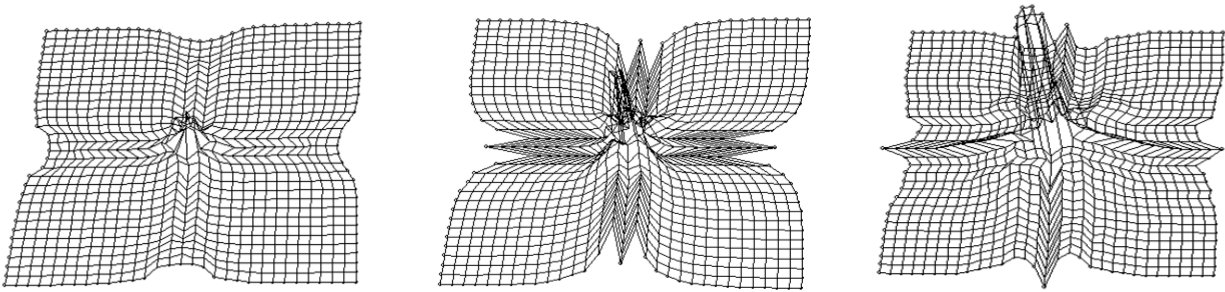


Рисунок 2 – Перемещения тканого образца в моменты времени: а - 0,1 мс, б - 0,3 мс, в - 0,6 мс при скорости ударника 100 м/с

В крестообразных зонах от центра к кромкам вдоль направления укладки нитей имеет место их продергивание. С ростом времени перемещения возрастают, а в относительное движение нитей вовлекаются большие участки ткани.

Влияние начальной скорости поражающего элемента на температуру было исследовано на 24-слойной модели тканой преграды (рисунок 3).

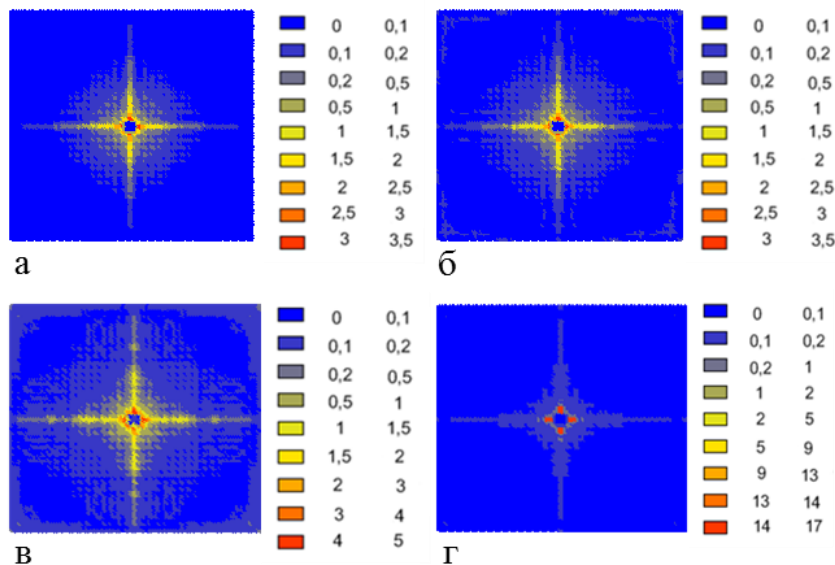


Рисунок 3 – Изменение температуры на поверхности пакета при начальной скорости ударника: а – 100 м/с, б – 200 м/с, в – 400 м/с, г – 500 м/с

На рисунке 3 приведены результаты расчета температуры ткани при различных начальных скоростях ударника. На рисунках 3а-3в при скоростях менее 500 м/с максимальные действующие напряжения не превышают предельных, и крестообразные зоны с повышенной температурой образованы вследствие поглощения энергии за счет трения нитей. При скорости ударника 500 м/с (рисунок 3г) напряжения превышают предельные значения, а энергия поглощается за счет разрушения нитей.

Сопоставление рассчитанных термограмм с полученными при проведении физических экспериментов приведено на рисунке 4.

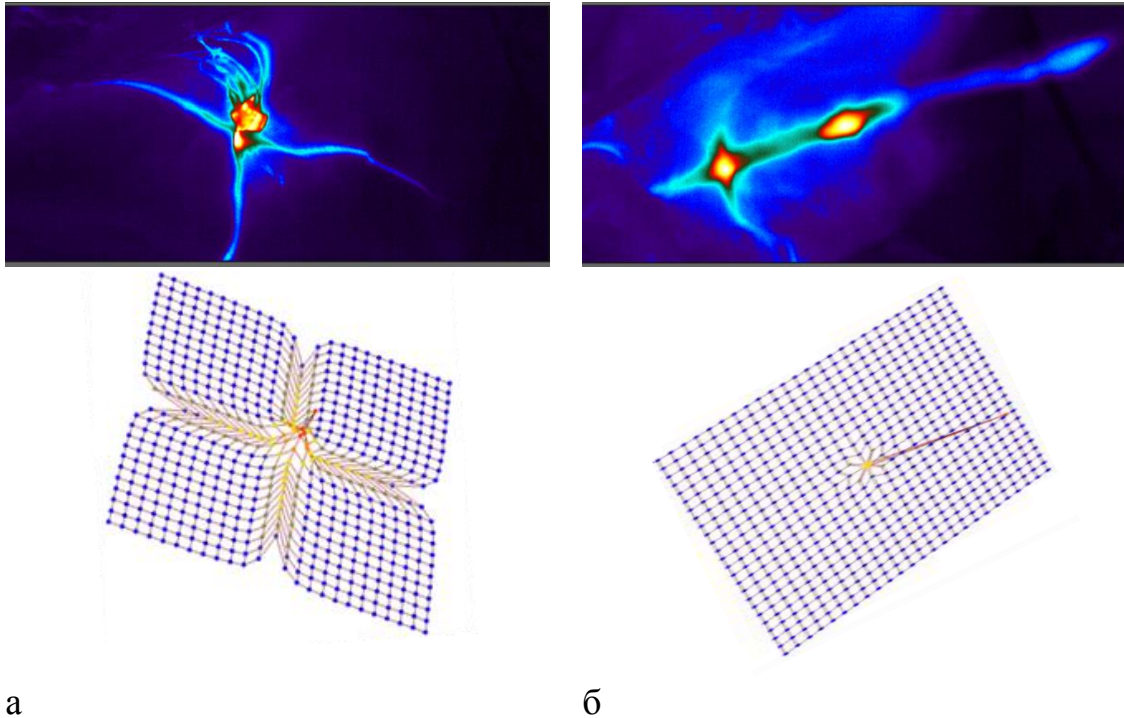


Рисунок 4 – Термограммы образца (вверху) и результаты вычислительного эксперимента (внизу) при скорости ПЭ: а – 300 м/с, б – 500 м/с

Рассчитанное распределение поглощённой энергии по слоям 15-слойного пакета показано на рисунке 5.

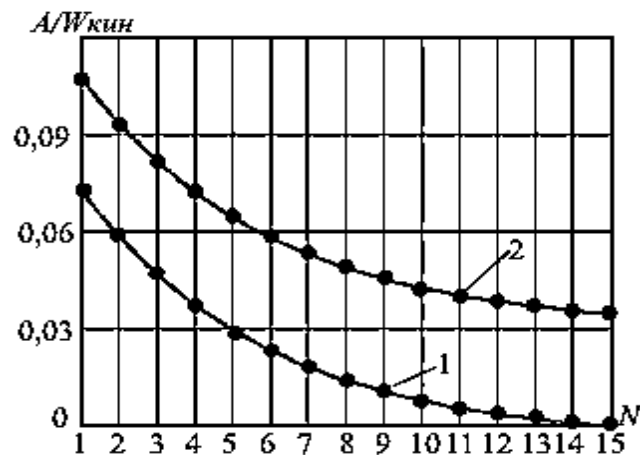


Рисунок 5 – Зависимость суммарной поглощённой энергии от номера слоя: 1 – в начале оболочечной стадии, 2 – в момент 10 мс от её начала

Таким образом, после настройки модели результаты вычислительного эксперимента согласуются с данными натуральных испытаний. Это позволяет использовать настроенную модель для расчёта энергопоглощения по слоям.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

*В работе получены следующие основные результаты:*

1. Разработана новая математическая модель деформирования тканого многослойного образца при соударении с жестким воздействующим объектом и тепловыделения в материале, в которой слои ткани рассматриваются как сплошная среда с включёнными в неё нитями, отличающаяся отдельным описанием процессов на стадии начального уплотнения и оболочечного деформирования, учетом различия деформаций слоёв пакета и их взаимного проскальзывания, позволяющая определить деформацию, напряжение, поглощённую энергию и температуру нитей ткани в каждый момент времени.

2. Разработан алгоритм расчета деформаций, напряжений и температурных полей на оболочечной стадии деформирования при начальных условиях, найденных расчётом начальной стадии уплотнения материала, отличающийся расщеплением неявной разностной схемы по процессам в переносном и относительном движении, что позволяет сократить время вычислений.

3. Разработан комплекс программ, реализующий разработанный алгоритм вычисления динамических напряжений, деформаций, поглощённой энергии и температур, отличающийся представлением программного кода в виде ориентированной сети конечных автоматов с побочными эффектами и наличием программ интерактивной подготовки исходных данных для моделей многослойных тканых пакетов, расчета динамических температурных полей в слоях ткани, а также визуализации результатов расчёта.

4. Установлено, что сходимость численного решения имеет первый порядок относительно шага по времени. Погрешность расчета при начальной скорости поражающего элемента 200 м/с составляет 3,5%, а при начальной скорости 500 м/с – 4,5%. Показана чувствительность к варьированию структурных параметров материала тканой преграды и скорости поражающего элемента.

5. Выполнено комплексное исследование динамических температурных полей в многослойных образцах из полимерной ткани при ударе жестким сферическим элементом. Найдено, что температуры, измеренные в эксперименте при варьировании скорости ударника, качественно и количественно согласуются с результатами математического моделирования.

## Основные публикации автора по теме диссертации

*Публикации в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук:*

1. **Паульзен, А.Е.** Разработка и апробация программного пакета для задач расчета динамического деформирования многослойных преград при ударе / А.Е. Паульзен // Инженерный вестник Дона. – 2019. – №6. – URL: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/N6y2019/6043>.

2. **Гилёва, А.Е. (Паульзен, А.Е.)** Волновая и оболочечная стадии деформирования многослойного тканого материала при соударении с поражающим элементом / А.Е. Гилёва (А.Е. Паульзен) // Научно-технический вестник Поволжья. – 2019. – №5. – С. 97-99.

3. **Гилёва, А.Е. (Паульзен, А.Е.)** Численная схема волновой и оболочечной стадии деформирования при соударении многослойного тканого материала с поражающим элементом / А.Е. Гилёва (А.Е. Паульзен) // Научно-технический вестник Поволжья. – 2019. – №5. – С.100-102.

*Публикации, индексируемые в наукометрических базах данных  
Web of Sciences и Scopus*

4. Budadin, O.N. The influence of deformation waves on impact energy absorption and heat release in multi-layer woven fabric ballistic body armor(Article) / O.N. Budadin, V.O. Kaledin, V.P. Vavilov, **A.E. Gileva (A.E. Paulzen)**, S.O. Kozelskaya, M.V. Kuimova // Ceramics International. – 2019. – Vol. 45, Issue 18. – P. 24336-24342.

5. Kaledin, V.O. Modeling of thermomechanical processes in woven composite material at blow by the striking element / V.O. Kaledin, O.N. Budadin, **A.Ye. Gilyova (A.Ye. Paulzen)**, S.O. Kozelskaya // Journal of Physics: Conf. Series. – 2017. – Vol. 894 (012019).

*Статьи в сборниках трудов конференций и прочих изданиях*

6. **Гилёва, А.Е. (Паульзен, А.Е.)** Влияние теплопроводности на распределение температуры при ударе в тканый материал / А.Е. Гилёва (А.Е. Паульзен) // Краевые задачи и математическое моделирование: темат. сб. науч. ст. / Новокузнецкий ин-т (фил.) Кемеров. гос. ун-та. – Новокузнецк. – 2019. – С. 26-30.

7. **Гилёва, А.Е. (Паульзен, А.Е.)** Модель соударения тканого материала с поражающим элементом / А.Е. Гилёва (А.Е. Паульзен) // Материалы 57-й Международ. науч. студ. конф. /Новосиб. гос.ун-т. – Новосибирск: ИПЦ НГУ. – 2019. – С.102.

8. **Гилёва, А.Е. (Паульзен, А.Е.)** Моделирование температурных полей при взаимодействии тканого материала с поражающим элементом / А.Е. Гилёва (А.Е. Паульзен) // Перспективы развития фундаментальных наук: сборник трудов XVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых / под ред. И.А. Курзиной, Г.А. Вороновой. – Томск: Изд. ТПУ. – 2019. – С.19-21.

9. Будадин, О.Н. Исследование влияния волновых процессов, возникающих в слоистом тканом композиционном материале при соударении с поражающим элементом, на энергопоглощение и выделение тепла / О.Н. Будадин, С.О. Козельская, В.О. Каледин, **А.Е. Гилёва (А.Е. Паульзен)** // Конструкции из композиционных материалов. – 2019. – № 3. – С. 74-81.

10. Каледин, В. О. Контроль качества бронеткани с использованием моделирования термомеханических процессов при ударе поражающим элементом / В.О. Каледин, О.Н. Будадин, С.О. Козельская, **А.Е. Гилёва (А.Е. Паульзен)** // Дефектоскопия. – 2018. – №5. – С. 41-49.

11. Будадин, О. Н. Приближенная модель термомеханических процессов в броневой защите из ткани при взаимодействии с поражающим элементом / О.Н.

Будадин, В.О. Каледин, С.О. Козельская, **А.Е. Гилёва (А.Е. Паульзен)**, Е.А. Вячкина // Контроль. Диагностика. – 2017. – №5. – С. 28-33.

12. Будадин, О. Н. Численная схема для приближенного расчета ударных процессов в броневой защите из ткани с поражающим элементом / О.Н. Будадин, В.О. Каледин, С.О. Козельская, Е.А. Вячкина, **А.Е. Гилёва (А.Е. Паульзен)** // Контроль. Диагностика. – 2017. – № 7. – С. 34-39.

13. Каледин, В. О. Исследование возможности контроля качества броневых композиционных материалов на основе ткани по анализу динамических температурных полей при взаимодействии с поражающим элементом / В.О. Каледин, **А.Е. Гилёва (А.Е. Паульзен)**, О.Н. Будадин, С.О. Козельская // Конструкции из композиционных материалов. – 2017. – № 3. – С. 70-82.

14. Каледин, В. О. Функционально-объектное программирование алгоритмов математического моделирования/ В.О. Каледин, **А.Е. Гилёва (А.Е. Паульзен)** // Решетневские чтения: материалы XXI Междунар. науч-практ. конф., посвящ. памяти генер. конструктора ракет.-космич. систем акад. М.Ф. Решетнева (08-11 нояб. 2017, . Красноярск): в 2 ч. // Сиб. гос. ун-т науки и технологий им. акад. М.Ф. Решетнева. – Красноярск. – 2017. – Ч.2. – С. 323–333.

15. Каледин, В.О. Функциональные схемы с побочными эффектами как инструмент сокращения вычислительных ресурсов / В.О. Каледин, **А.Е. Гилёва (А.Е. Паульзен)** // Современные тенденции развития науки: сборник тезисов национальной конференции / под общ. ред. С.О. Гаврилова и Д. М. Бородулина // ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный университет». – Кемерово, 2018. – С. 149-150.

16. Ульянов, А. Д. «Композит-НК» - комплекс программ для автоматизации программирования численного решения задач механики конструкций [Текст] / А. Д. Ульянов, В. О. Каледин, Я. С. Крюкова, **А. Е. Гилёва (А.Е. Паульзен)** // XVI Междунар. науч.-практ. конф. : сб. ст. [в 3 ч.] / Забайкал. гос. ну-т. – Чита: ЗабГУ. – 2016. – Ч. 2. – С. 141–145.

*Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ*

17. Программа расчета динамических температурных полей в многослойном композиционном материале при ударе: свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2017615345, Рос. Федерация / заявитель и правообладатель Каледин В.О., Будадин О.Н., **Гилёва А.Е. (Паульзен А.Е.)**, Козельская С.О. – № 2017612112; заявл. 15.03.2017; зарегистр. 12.05.2017; опубл. 12.05.2017, бюл. №5. - 1 с.

Подписано в печать 08.11.2021 г.

Формат бумаги 60x84 1/16. Бумага писчая. Ризография.

Усл. печ. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ № 318724/Э

Кузбасский гуманитарно-педагогический институт  
ФГБОУ ВО «Кемеровский государственный университет»

654041, г. Новокузнецк, ул. Циолковского, 23

Отпечатано в типографии «Архимед ХР» ИП Иванов И.М.  
654041, г. Новокузнецк, ул. Кутузова, 10, тел. (3843)703-107