

На правах рукописи

Кранчев Денис Федорович

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ И
ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА СИСТЕМОЙ
ДИСКРЕТНЫХ ВИХРЕЙ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Новосибирск – 2007

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Новосибирский государственный технический университет»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Рудяк Валерий Яковлевич.

Официальные оппоненты: кандидат технических наук,
доцент Тимофеев Владимир Семенович,

доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Рылов Анатолий Игоревич.

Ведущая организация: Томский государственный университет.

Защита состоится 31 октября 2007 года в 10⁰⁰ на заседании диссертационного совета Д 212.173.06 при Новосибирском государственном техническом университете (630092, Новосибирск-92, пр. Карла Маркса, 20).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Новосибирского государственного технического университета.

Автореферат разослан «28» сентября 2007 года

Ученый секретарь
диссертационного совета

Чубич В.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

К моделированию полей течения, в которых значение завихренности не равно нулю, приходят при изучении многих практически важных задач. Это закрученные и отрывные течения, слои сдвига и т.п. Закрученные потоки жидкости часто встречаются в природе – это атмосферные и океанические течения (торнадо, циклоны), в технике эти течения научились использовать в вихревых камерах, сепараторах и т.д. С отрывными течениями имеют дело во всех задачах обтекания тел. С ними встречаются при движении летательных аппаратов, судов, в различных технологических процессах.

Для моделирования указанных течений часто применяются прямые численные методы решения уравнений Навье–Стокса. Однако, численное решение уравнений встречает значительные трудности при больших числах Рейнольдса. Во-первых, из-за наличия в уравнениях малого коэффициента пропорционального Re^{-1} при старшей производной появляются узкие области с большими локальными градиентами функций, что приводит к потере точности и устойчивости решения. Во-вторых, решение нестационарных задач требует больших вычислительных затрат. Поэтому на практике часто используются более экономные и удобные в применении вихревые методы, основанные на лагранжевом подходе к описанию жидкости.

Идея вихревых методов состоит в моделировании изучаемого поля завихренности набором вихревых частиц, движение которых задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Первым таким методом был метод точечных вихрей, где завихренность частиц задается δ -функцией. Впервые этот метод был применен Розенхэдом для исследования эволюции вихревой пелены. Точечными вихрями удается находить значения общих интегральных характеристик течений, например, сил, действующих на тела, а в ряде случаев – и правильную качественную информацию о течении. Применяют метод точечных вихрей и в задачах с образованием пограничных слоев как составную часть пригодную для описания течений в зонах, где вязкие эффекты несущественны. Однако для расчета более тонких характеристик течений связанных с пульсационным характером течения, с развитием неустойчивостей, исследованием отрывных зон, метод точечных вихрей применить не удастся. Для моделирования таких эффектов приходится увеличивать число точечных вихрей, при этом наблюдается стохастизация траекторий частиц, что связано с неограниченным ростом скоростей точечных вихрей при их взаимном сближении. По этой же причине погрешность в определении поля скорости может быть очень значительной даже, если движение точечных вихрей является регулярным.

В связи с этим за три последних десятилетия усилиями Леонарда, Чорина, Кавахары и Таками, Белоцерковского с коллегами и других были развиты методы моделирования течений жидкости системой вихревых частиц, имеющих в отличии от δ -образных точечных вихрей, конечные размеры. Однако эти ме-

тоды, как правило, имеют большое число дополнительных параметров. Причем эти параметры не имеют физического обоснования, что вносит произвол в выбор их значений. Кроме того, в них отсутствуют законы сохранения, присущие исходной континуальной модели. В работах Веретенцева, Рудяка и Яненко был предложен вариационный принцип построения вихревых моделей, который лишен перечисленных недостатков. К преимуществам этих моделей можно отнести еще их консервативность, то есть в них выполняются законы сохранения импульса, момента импульса и энергии. Было показано, что на практике удобно использовать систему гауссовских вихрей. Гауссовские вихри – модель, построенная на основе вариационного принципа, выбором в качестве функции формы завихренности функции Гаусса. Данная функция формы удовлетворяет условиям сходимости метода и позволяет легко найти явный вид уравнений движения и аналитически вычислить интегралы движения.

И хотя данный метод дискретных вихрей имеет большие возможности моделирования физических полей завихренности, нет работ по изучению точности моделирования поля завихренности, а также не изучен вопрос оптимального выбора численной схемы интегрирования уравнений движения вихревых частиц. Поэтому исследования в данном направлении актуальны.

Несмотря на широкое применение метода дискретных вихрей, работ по изучению динамических и стохастических свойств этого метода не много. В общем виде была решена система для двух и трех точечных вихрей (Грёбли), в работе Новикова было показано, что система 4 вихрей уже не интегрируема. В то же время стоит отметить, что течения, которые изучаются с помощью систем дискретных вихрей, в том числе, указанные выше, зачастую сами плохо изучены и, как правило, являются неустойчивыми. Поэтому, при моделировании таких течений системами дискретных вихрей очень важно различать неустойчивость моделируемого течения от неустойчивости системы дискретных вихрей. В связи с этим, изучение динамических и стохастических свойств систем дискретных вихрей также оказывается весьма актуальным.

При обтекании поверхностей (крыло самолета, лопатки турбин и т.д.), как правило, наблюдается переход от ламинарного типа течения к турбулентному, который сопровождается возникновением отрывных зон и большими потерями энергии. В работе Зверкова, Занина, Довгаля и Козлова экспериментально изучен новый тип крылового профиля – профиль с волнистой поверхностью. Было показано, что этот профиль имеет ряд преимуществ по сравнению с гладким. Перспективы использования такого крылового профиля на практике, при проектировании летательных аппаратов, требуют, однако, его теоретического исследования. В частности, необходимо изучить свойства устойчивости течения в пограничном слое профиля. Внедрение в практику требует скорейшего решения этой задачи, что делает ее актуальной.

Цель данной диссертационной работы заключается в разработке и реализации численного инструментария для моделирования вихревых течений и изучения ламинарно-турбулентного перехода. Были решены следующие конкретные задачи:

1. Исследованы динамические и стохастические свойства систем дискретных вихрей.
2. Разработан пакет программ для моделирования динамики вихревых течений.
3. Изучена линейная устойчивость течений в пограничном слое гладкого крыла и профиля с волнистой поверхностью.

Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Изучены динамические и стохастические свойства полигональной системы точечных и гауссовских вихрей, найдены время обратимости, инкременты нарастания возмущений, построены корреляционные функции. Показано, что в рассматриваемых системах дискретных вихрей, начиная с некоторого N (число вихрей) наблюдается динамический хаос. Изучены его свойства.
2. Численно изучена введенная Рудяком обобщенная энтропия Колмогорова–Синая (ОК-энтропия). Установлено, что ее эволюция позволяет детектировать различные стационарные состояния системы, в которых она последовательно оказывается в процессе развития неустойчивости. Показано, что производство энтропии ведет себя при этом не монотонно. Установлена связь ОК-энтропии с энтропией Гиббса и дан алгоритм ее расчета.
3. Аналитически и численно впервые изучены характеристики устойчивости полигональной системы гауссовских вихрей.
4. Построен алгоритм решения задач вихревой динамики методом вихревых частиц. При этом исходные поля завихренности могут быть смоделированы сколь угодно точно. Точность алгоритма растет с увеличением N .
5. Исследован ламинарно-турбулентный переход в пограничном слое над гладким и волнистым крылом. Выявлены основные этапы развития волновых возмущений ламинарного течения. Установлено соответствие экспериментальных и теоретических результатов, полученных для течения по оси симметрии крыла. Выявлены особенности развития неустойчивых возмущений ламинарного течения на волнистом крыле.

Практическая ценность работы состоит в создании пакета программ для решения широкого класса гидродинамических задач. Данные расчета устойчивости течений над гладким и волнистым крылом могут быть использованы при проектировании новых видов летательных аппаратов. Алгоритм расчета энтропии Гиббса можно использовать при исследованиях любых систем частиц, в том числе молекулярных.

Достоверность результатов, полученных в диссертации, подтверждается сопоставлением с экспериментальными результатами, многочисленным тестированием используемых программ и алгоритмов, сравнением с известными аналитическими результатами и данными других авторов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Результаты изучения динамических и стохастических свойств полигональных систем дискретных вихрей.
2. Данные аналитического исследования устойчивости полигональной системы гауссовских вихрей.
3. Численное изучение обобщенной энтропии Колмогорова–Синяя.
4. Алгоритм расчета энтропии Гиббса для системы вихрей.
5. Пакет программ для моделирования вихревых течений с помощью системы дискретных вихрей и для изучения ламинарно-турбулентного перехода.
6. Результаты исследования линейной неустойчивости пограничного слоя над гладким и волнистым крылом.

Личный вклад автора состоит в разработке комплекса программ для моделирования вихревых течений системой дискретных вихрей и исследования ламинарно-турбулентного перехода, а также в проведении аналитических и численных исследований и анализе всех полученных результатов.

По результатам выполненных исследований опубликовано 6 печатных работ, из них 4 в рецензируемых журналах из списка изданий рекомендованных ВАК РФ, 1 научная статья в журнале «Доклады АН ВШ РФ» и 1 научная конференция.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованных источников (93 наименований). Работа изложена на 136 страницах, включая 68 иллюстраций и 9 таблиц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы, дается обзор соответствующей литературы, формулируется цель работы, кратко излагается содержание диссертации по главам, приводится перечень выносимых на защиту положений.

Первая глава посвящена изучению динамических и стохастических свойств дискретных вихрей. В первом параграфе кратко изложен вариационный принцип построения метода дискретных вихрей для описания течений жидкости, разработанный Веретенцевым, Рудяком и Яненко. В работе исследуются две конкретные модели – гауссовские вихри и точечные. Уравнения движения гауссовских вихрей имеют вид

$$\frac{d\mathbf{x}_j}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_k \Gamma_k \left[1 - \exp\left(-\frac{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|^2}{\sigma_k^2 + \sigma_j^2}\right) \right] \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) \times \mathbf{n}}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|^2}, \quad (1)$$

где \mathbf{n} – нормаль к плоскости течения, $j = 1, \dots, N$. Движение точечных вихрей описывается уравнениями

$$\frac{d\mathbf{x}_j}{dt} = \frac{1}{2\pi} \sum_k \Gamma_k \frac{(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) \times \mathbf{n}}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|^2}. \quad (2)$$

В разделе 1.2 изучаются динамические и стохастические свойства полигональной системы точечных вихрей. Полигональная система представляет собой систему одинаковых вихрей, расположенных в углах правильного многоугольника. Для полигональной системы точечных вихрей Кельвин построил аналитическое решение. Для полигональной системы (1) такое решение было построено нами. Частицы движутся по одной окружности вокруг центра с постоянной угловой скоростью

$$\Omega = \frac{\Gamma}{4\pi R^2} \left[(N-1) - \sum_{k=1}^{N-1} \exp\left\{-2R^2 [1 - \cos(2\pi k/N)] / \sigma^2\right\} \right].$$

Для точечных вихрей угловая скорость равна $\Omega = \Gamma(N-1)/4\pi R^2$. Наличие точного решения показывает, что данная система интегрируема. Именно поэтому полигональная система вихрей была выбрана в качестве тестовой для изучения динамических и стохастических свойств систем дискретных вихрей.

Уравнения (1), (2) решались численно с помощью методов Эйлера, Рунге-Кутты 2 и 4-го порядков, Бутчера, а также методами прогноза-коррекции Милна и Хемминга. Эволюция возмущений (естественных, возникающих при компьютерной реализации, или контролируемых) в фазовом пространстве описывается функцией

$$\Delta(t) = \frac{1}{NlR} \sum_{\alpha=1}^l \left\{ \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i(t) - \tilde{\mathbf{r}}_i^\alpha(t)]^2 \right\}^{1/2}, \quad (3)$$

где $\mathbf{r}_i(t), \tilde{\mathbf{r}}_i^\alpha(t)$ – соответственно точное и численно полученное решения, а l число реализаций. Типичное поведение функции (3) для разного числа точечных вихрей представлено на рис. 1. Для систем точечных вихрей с $N > 7$ функция (3) имеет экспоненциальный участок роста, что означает наличие в системе локальной неустойчивости.

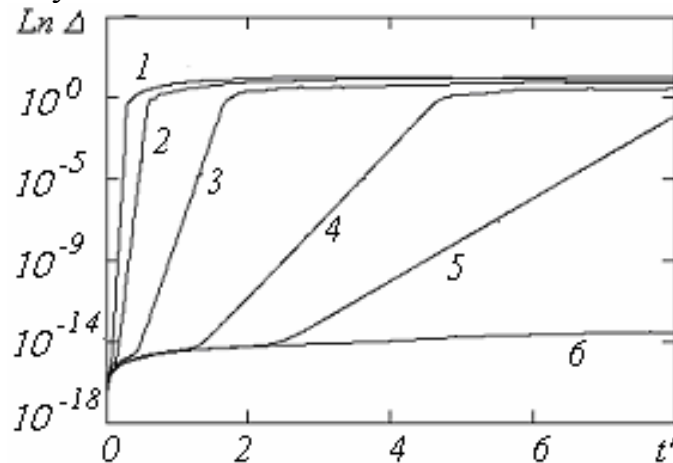


Рис. 1. Эволюция функции (3). Кривая 1 соответствует системе $N = 100$, 2 – $N = 50$, 3 – $N = 20$, 4 – $N = 10$, 5 – $N = 8$, 6 – $N = 7$

Получены зависимости инкрементов нарастания возмущений от параметров полигональной системы. Установлено, что инкремент нарастания прямо

пропорционален интенсивности вихрей, обратно пропорционален квадрату радиуса окружности описанной вокруг полигона вихрей и прямо пропорционален квадрату числа частиц. Полученные зависимости хорошо согласуются с результатами линейной теории устойчивости Хэвлока.

Кроме естественных возмущений, вносимых в систему компьютером, проводились расчеты с контролируруемыми возмущениями. Контролируемые возмущения задавались смещением вихрей в начальный момент времени в виде $r_k = \cos(2\pi k / N) + A \cos(2\pi km / N)$, где A – амплитуда, а m – мода возмущений. Установлено, что для малых амплитуд возмущений порядка $A \leq 10^{-6}$, инкремент неустойчивости фактически не отличается от инкремента неустойчивости решений с естественными возмущениями. Однако, при $A > 10^{-6}$ инкремент неустойчивости зависит от амплитуды возмущений A : $\alpha = \alpha(A)$.

Динамический хаос в системе определяется наличием локальной неустойчивости и перемешиванием фазовых траекторий. Свойство перемешивания характеризуется затуханием автокорреляционной функции. В работе, в частности, изучена эволюция автокорреляционной функции координат

$$\chi(t, 0) = \chi_{xx}(t, 0) / \chi_{xx}(0, 0), \quad (5)$$

$$\chi_{xx}(t, 0) = \frac{1}{Nl} \sum_{j=1}^{l-1} \left\{ \sum_{i=1}^N [x_i(j\Delta t)x_i(j\Delta t + t) + y_i(j\Delta t)y_i(j\Delta t + t)] \right\}.$$

Установлено, что для полигональной системы точечных вихрей при $N > 7$, функция (5) имеет квазипериодический затухающий характер (рис. 2). Для систем, где $N \leq 7$, данная функция (5) периодична, а амплитуда ее колебаний не уменьшается со временем. Таким образом, показано, что в системах точечных вихрей с $N > 7$ имеет место динамический хаос.

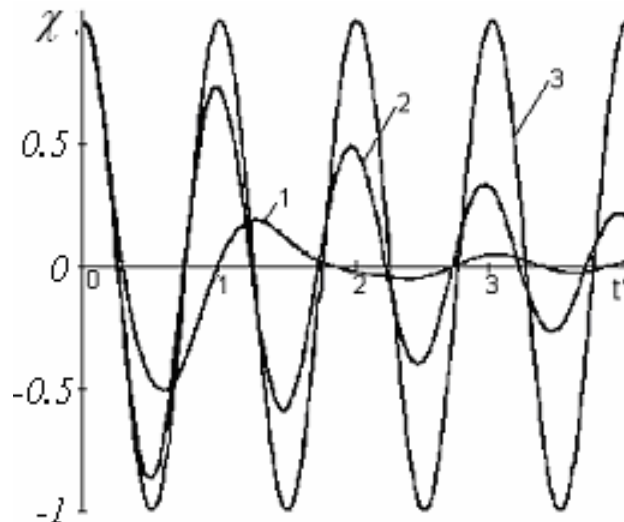


Рис. 2. Эволюция корреляционных функций (5) для разных N . Кривая 1 соответствует 100 вихрям, 2 – 10 вихрей, 3 – 7 вихрей

В разделе 1.3 представлены результаты решения задачи линейной устойчивости полигональной системы гауссовских вихрей. Совместно с Бордом по-

лучена аналитическая формула зависимости инкремента роста возмущений от параметров полигональной системы. Для предельного случая, когда дисперсия гауссовских вихрей стремится к 0, что соответствует системе точечных вихрей, данная формула совпадает с формулой Хэвлока для полигональных систем точечных вихрей.

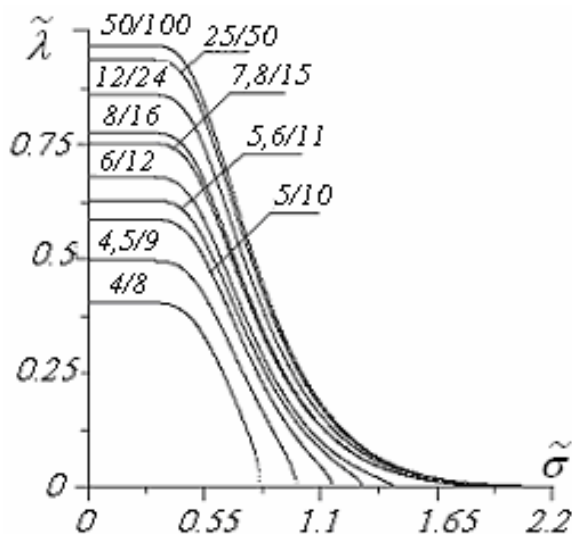


Рис. 3. Зависимость инкрементов нарастания главных мод от дисперсии распределения завихренности

На рис. 3 представлены графики зависимостей инкрементов нарастания главных мод возмущений от дисперсии распределения $\tilde{\sigma}$. Названия кривых m/N состояются из m – мода возмущений и N – число вихрей в системе. Значению $\tilde{\sigma} = 0$ соответствуют точки на оси ординат. Видно, что существует пороговое значение $\tilde{\sigma} \cong 0.3$, до достижения которого гауссовские вихри ведут себя практически как точечные. Дальнейшее увеличение дисперсии приводит к монотонному уменьшению инкрементов главных мод до нуля. Видно также, что значения дисперсии, при которых происходит стабилизация движения, имеют конечное значение, причем эти значения близки для систем с различным числом вихрей. Таким образом, показано, что существует порог полной стабилизации главных мод возмущений в системах гауссовских вихрей.

Влияние дисперсии распределения на инкременты нарастания разных мод возмущений в системе гауссовских вихрей оказывается различным. Однако, существует пороговое значение дисперсии, при котором наступает стабилизация всех мод возмущений. Показано, что численным моделированием можно получить лишь инкремент наиболее неустойчивой моды возмущений

Раздел 1.4 посвящен изучению динамических и стохастических свойств систем гауссовских вихрей с помощью прямого численного моделирования. Было установлено наличие стадии локальной неустойчивости, для общего случая $N > 7$. Характерно, что при увеличении дисперсий вихрей происходит стабилизация системы. На рис. 4 представлены графики эволюции функции (3) для систем с различным числом частиц. Из рис. 4 видно, что система 8 вихрей при значении $\sigma = 0.8$ уже не имеет экспоненциального роста. Получены зависимо-

сти инкрементов нарастания возмущений от интенсивности, числа вихрей и радиуса полигона. Установленные зависимости аналогичны тем, что получены для систем точечных вихрей. Значение инкремента неустойчивости монотонно уменьшается при увеличении дисперсии вихрей, причем существуют конечные пороговые значения дисперсии, при которых в системе не наблюдается локальная неустойчивость.

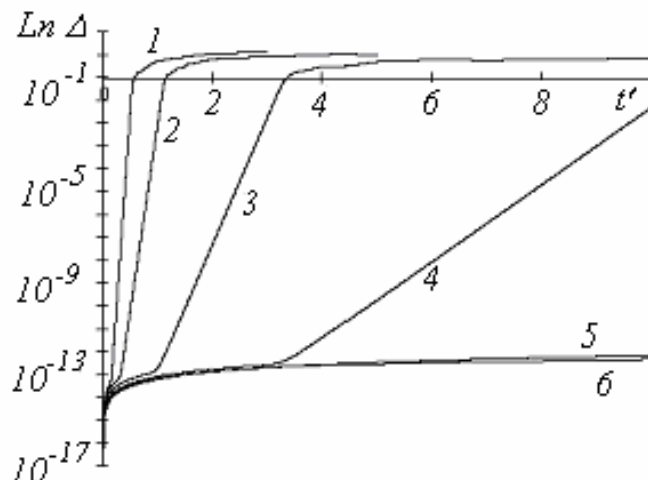


Рис. 4. Эволюция функции (3) для гауссовских вихрей при $\sigma = 0.8$. Кривая 1 – $N = 100$, 2 – $N = 50$, 3 – $N = 20$, 4 – $N = 10$, 5 – $N = 8$, 6 – $N = 7$

Изучено поведение автокорреляционной функции координат гауссовских вихрей (5), которая, в общем случае, при $N > 7$ имеет квазипериодический затухающий характер, что указывает на наличие в системе перемешивания траекторий. Таким образом, в системах гауссовских вихрей установлено существование динамического хаоса. Было показано, что, варьируя значение дисперсий вихрей, можно замедлить затухание функции (5). Поэтому в сравнении с системами точечных вихрей, системы гауссовских вихрей более устойчивы к возмущениям, возникающих, в частности, при численном моделировании.

В работах Савченко и Рудяка было отмечено, что полигональные системы дискретных вихрей имеют ряд различных стационарных состояний. На примере полигональной системы точечных вихрей можно проследить, как в некоторый момент времени происходит спаривание соседних вихрей, и эти пары ведут себя как единые вихревые структуры. Затем процесс повторяется, и вихревые пары образуют уже вихревую четверку, и т.д. Рудяком была высказана гипотеза о том, что смену стационарных состояний можно описывать с помощью, так называемой, обобщенной энтропии Колмогорова–Синяя (ОК-энтропия). К-энтропия может быть представлена в виде

$$K = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \tilde{\Delta}(t, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \langle [\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t, \varepsilon)]^2 \rangle^{1/2}. \quad (6)$$

Функция (6) позволяет получить лишь инкремент нарастания возмущений, однако, она не чувствительна к структурным изменениям течения, которые происходят на ранних этапах. Поэтому вводится ОК-энтропия, которую можно записать следующим образом

$$K_g = (t')^{-1} \ln a\Delta, \quad (7)$$

где $t' = t/T_N = 2\pi t/\Omega$, (параметр a выбирался так, чтобы K_g была положительной), T_N – период вращения невозмущенной системы.

В разделе 1.5 изучается связь ОК-энтропии с указанными выше переходами между стационарными состояниями. Чтобы ускорить развитие неустойчивости, вводились контролируемые малые возмущения. Рассмотрена система 32 точечных вихрей. Исходные координаты частиц возмущались по синусоидальному закону, с длинами волн кратных числу вихрей: $\lambda_{16} = 2\pi R/16$, $\lambda_8 = 2\pi R/8$, и амплитудами соответственно равными 10^{-6} , 10^{-10} .

Эволюция функции (7) для системы 32 точечных вихрей представлена на рис. 5. На стадии локальной неустойчивости ОК-энтропия постоянна (рис. 5, кривая 1) и равна инкременту нарастания возмущений. Эта стадия завершается спариванием вихрей. Затем ОК-энтропия монотонно уменьшается. Выход системы на новый стационарный режим ($t' \approx 0.75$) – образование 8 вихревых структур, сопровождается заметным снижением затухания ОК-энтропии. Именно здесь график ОК-энтропии заметно меняет свою кривизну. Перестройкам состояний соответствуют всплески производства энтропии (рис. 5, кривая 2).

Таким образом, подтверждена гипотеза о том, что ОК-энтропия позволяет не только характеризовать свойства локальной неустойчивости и перемешивания динамической системы, но и описывать ее структурную перестройку.

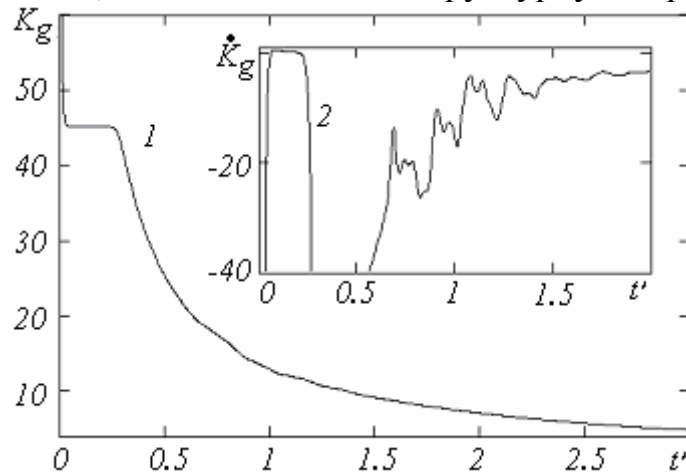


Рис 5. Эволюция ОК-энтропии (кривая 1) и ее производства (кривая 2)

Как известно, гиббсовская энтропия гамильтоновых систем конечного числа частиц постоянна. Поэтому для описания неравновесных состояний обычно вводят тем или иным способом огрубленную энтропию, которая зависит от величины огрубления. Для системы материальных точек, в частности точечных вихрей, энтропия Гиббса пропорциональна объему фазового пространства занимаемого системой. Объем фазового пространства системы материаль-

ных точек имеет меру ноль, поэтому соответствующая энтропия оказывается не определенной.

За счет ограниченного представления вещественных чисел начальные координаты всегда имеют погрешность порядка ε ($\varepsilon \approx 10^{-16}$). Следовательно, фазовые траектории, выходящие в начальный момент из фазового пространства с характерным размером ε , не различимы. Поэтому при численном моделировании энтропия начального состояния системы имеет конечное значение. Объем фазового пространства с течением времени изменяется пропорционально функции $\Delta(t)$. Поэтому энтропия $S(t) = k \ln \Gamma(t)$, где $\Gamma(t)$ – фазовый объем с течением времени изменяется по закону

$$S = k \ln \Gamma(t_0)\Delta(t) = k \ln \Gamma(t_0) + k \ln \Delta(t) = S_0 + k \ln \Delta(t) \quad (8)$$

где S_0 – некоторое начальное значение энтропии.

Значение энтропии (8) в численных расчетах является универсальной характеристикой системы. Эволюция функции $\tilde{S} = S - S_0$ показана на рис. 6. (кривая 1). Переход на новый стационарный режим также характеризуется резким изменением энтропии и всплескам ее производства (кривая 2). Фактически последовательное спаривание вихревых структур означает понижение в системе степени порядка, и оно характеризуется повышением энтропии.

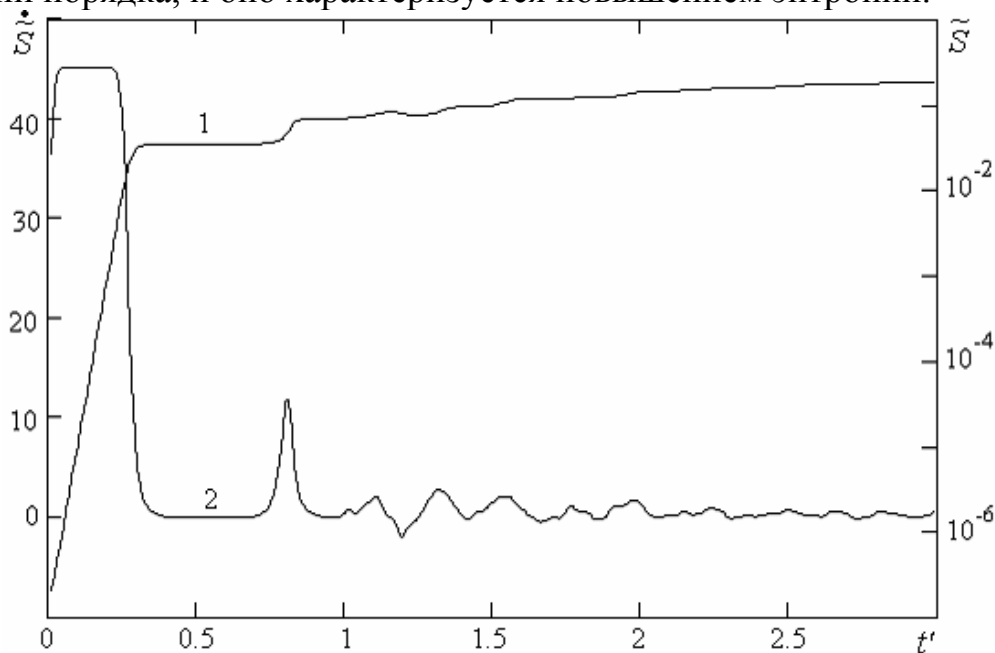


Рис. 6. Эволюция энтропии Гиббса (кривая 1) и ее производства (кривая 2)

В главе 2 описан реализованный пакет программ. В первом разделе рассмотрен алгоритм построения аппроксимации однородного поля завихренности течения с помощью гауссовских вихрей. Аппроксимация заключается в распределении вихрей по узлам равномерной прямоугольной сетки и поиске таких значений дисперсий и циркуляций вихрей, которые бы минимизировали погрешность аппроксимации. При моделировании равномерных полей завихренности вихри должны быть одинаковыми, а значит, неизвестных будет всего два.

Для их определения выделим некоторый внутренний узел сетки с координатами \mathbf{r}_1 , и точку \mathbf{r}_2 в середине смежной ячейки сетки. Тогда записав условия равенства значения завихренности заданного поля и поля генерируемого набором одинаковых вихрей в этих точках: $\Omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{G}, s) = \Omega(\mathbf{r}_2, \mathbf{G}, s) = \Omega_0$, получим систему двух нелинейных алгебраических уравнений относительно двух неизвестных Γ и σ . Для численного решения этой системы использовался метод градиента. Показано, что с измельчением сетки (увеличением числа частиц) уменьшается погрешность аппроксимации поля. Тестирование предложенного алгоритма проводилось на нескольких характерных течениях (вихрь Рэнкина, вихрь Кирхгофа, вихревое кольцо и т.п.). Относительная погрешность моделирования определяется по формуле

$$\Theta = |\Omega - \Omega_0| / \Omega_0, \quad (9)$$

здесь Ω_0 – моделируемое значение завихренности, Ω – среднее значение завихренности в узлах заданной сетки $\Omega = N^{-1} \sum_{i=1}^N \omega(\hat{\mathbf{r}}_i)$.

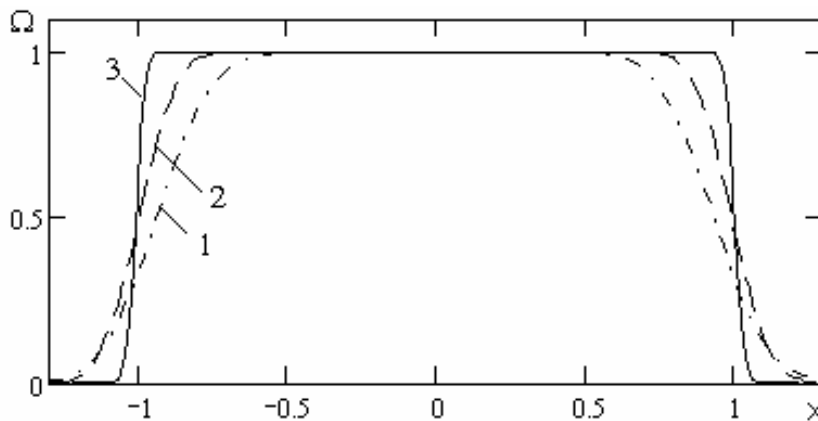


Рис. 7. Поле завихренности вихря Рэнкина вдоль оси x .

Кривая 1 соответствует $N = 109$, кривая 2 – $N = 185$, кривая 3 – $N = 3505$

В диссертации представлены результаты моделирования двух тестовых полей завихренности – вихрь Рэнкина и вихревое кольцо. На рис. 7 показан график завихренности вдоль оси x для поля завихренности вихря Рэнкина. Таблица 1 отражает относительную погрешность в зависимости от числа частиц. Так при моделировании поля вихря Рэнкина с точностью 3% достаточно 1000 частиц.

Таблица 1.

Относительная погрешность начальной аппроксимации поля Рэнкина в зависимости от числа частиц

N	109	137	185	317	641	1245	3505
Θ	0.114	0.103	0.086	0.069	0.047	0.033	0.02

В разделе 2.2 изучена применимость методов семейства Рунге–Кутты и методов прогноза-коррекции для интегрирования систем уравнений движения дискретных вихрей (1) и (2). Установлено, что возмущения численных траекторий, полученных различными методами, имеют характерный экспоненциальный рост. Причем, инкременты нарастания возмущений различаются в пределах процента (см. рис. 8 для полигональной системы 32 гауссовских вихрей с $\sigma = 10^{-3}$ и $\Gamma = 1$).

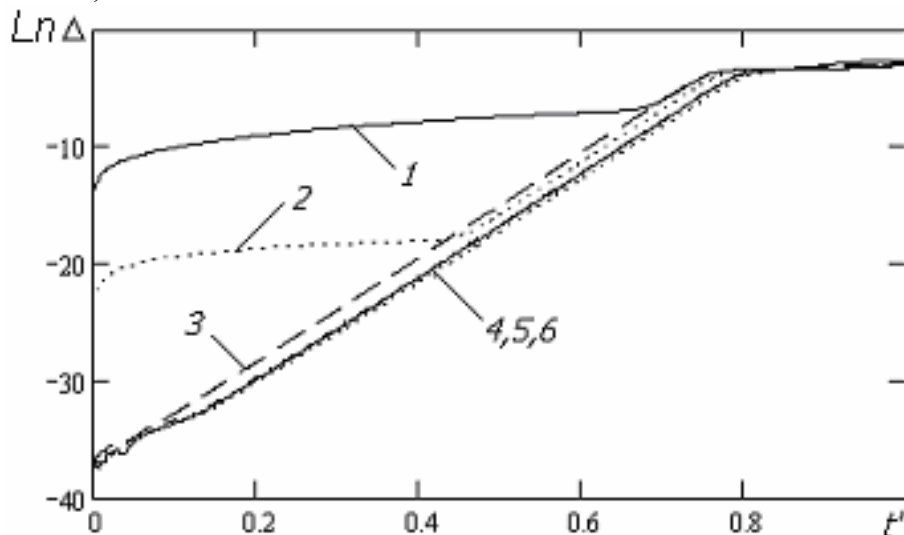


Рис. 8. Эволюция функции (3). Кривые соответствуют разным методам: 1 – Эйлер, 2 – Р.К-2, 3 – Хэмминг, 4 – Р.К.-4, 5 – Бутчер, 6 – Милн

Отметим, что чем выше порядок схемы интегрирования, тем меньше погрешность решения (рис. 8), однако, можно заметить, что с увеличением порядка схемы участок локальной неустойчивости возникает раньше. Связано это с тем, что с увеличением порядка схемы увеличивается и число арифметических операций на выполнение одного шага, что приводит и к более интенсивному накоплению погрешности. Поэтому при интегрировании на больших интервалах лучше выбирать схему меньшего порядка.

При численном решении систем (1) и (2) проверяется выполнение законов сохранения импульса, момента импульса и энергии вихревой системы. Показано, что законы хорошо выполняются (см. таблицу 2) на достаточно больших интервалах интегрирования. В таблице 2 приведены значения относительной погрешности энергии полигональной системы 32 гауссовских вихрей на одном периоде вращения. Шаг интегрирования для рассматриваемых схем был равен 10^{-4} .

Таблица 2.

Точность определения энергии

Методы	Эйлер	РК-2	РК-4	Бутчер	Хемминг	Милн
$\max_t [E(t) - E_0 / E_0]$	$7 \cdot 10^{-2}$	$5.8 \cdot 10^{-7}$	$3.5 \cdot 10^{-12}$	$1.2 \cdot 10^{-12}$	$3 \cdot 10^{-10}$	$1.5 \cdot 10^{-10}$

В третьем разделе второй главы описана математическая постановка задачи линейной устойчивости гидродинамических течений. Следуя работе Линя, введено уравнение Орра–Зоммерфельда с однородными граничными условиями. Описаны методы Галеркина и ортогональной прогонки для численного решения уравнения Орра–Зоммерфельда.

Четвертый раздел посвящен описанию архитектуры и интерфейса разработанного пакета программ для моделирования вихревых течений с помощью вихревых частиц и исследования устойчивости течений. Представленный программный комплекс имеет следующую блочную структуру:

1. Блок решения динамических уравнений.
2. Блок аппроксимации начального поля завихренности.
3. Блок расчета кривых нейтральной устойчивости.
4. Блок расчета гидродинамических полей и аналитических функций.
5. Блок визуализации и представления расчетных данных.
6. Пользовательский интерфейс.

Основой пакета программ является объектно-ориентированная библиотека классов численных алгоритмов. Так, для решения систем дифференциальных уравнений построен интерфейс `ODESolver`, который должны наследовать все схемы интегрирования. В этом интерфейсе предусмотрены функция `solve()` – решение системы ОДУ, функции установки нового значения шага, и получения текущего состояния класса. Система уравнений, в свою очередь, описывается интерфейсом `ODESystem` с такими методами как `size()` (получить размерность системы) и `get()` (получить вектор значений правой части при заданном значении вектора аргументов). Такой подход упрощает процедуру добавления новых методов решения и новых систем уравнений – будь это уравнения движения системы точечных вихрей `PointSystem` или система гауссовских вихрей `VortexEnsembleDynamics`. Расширение типов вихревых частиц, основанных на вариационном принципе (Веретенцев, Рудяк), требует создания класса-наследника от `VortexEnsembleDynamics`.

Помимо численного интегрирования в библиотеке реализованы также методы численного решения СЛАУ методом Гаусса, методы решения нелинейных алгебраических уравнений, а также различные аналитические функции, которые используются для анализа численных решений: автокорреляционная функция координат, функция энергии системы вихревых частиц и т.д.

Объектно-ориентированная структура позволяет в дальнейшем расширять библиотеку без изменений в готовых алгоритмах, а также может быть использована в новых задачах. Построена справочная система на основе HTML, из которой можно получить полную информацию обо всех классах и их методах.

Интерфейс программы основан на диалоговом режиме с пользователем (Wizard). Такой режим предлагает пользователю выбрать класс задач и далее установить значения требуемых параметров задачи. Для отображения полученных данных (решение динамической задачи или значения аналитических функций) построены графические модули.

Третья глава диссертации посвящена численному исследованию развития возмущений в пограничном слое крылового профиля. Из экспериментов, выполненных сотрудниками ИТПМ СО РАН Зверковым, Заниным, Козловым и Довгалем, были получены профили скоростей вдоль миделевого сечения в пограничном слое над крыльями двух типов – крыло с гладкой поверхностью и с волнистой поперечной поверхностью, для которой снимались значения скорости в горбах и во впадинах. В эксперименте также были получены спектральные разложения амплитуд пульсаций модуля продольной компоненты скорости.

В первом параграфе численно изучалась устойчивость течения в пограничном слое над крылом с гладкой поверхностью. Для каждого профиля скорости, задаваемого сплайн-интерполяцией экспериментальных данных, численно решалась задача Орра–Зоммерфельда $\Delta^2 \psi = i \operatorname{Re}[(\alpha u - \omega) \Delta \psi - \alpha u'' \psi]$ относительной амплитуды функции тока возмущений ψ . Где $\Delta = d^2 / dy^2 - \alpha^2$, α – безразмерное волновое число, ω – безразмерная частота, Re – число Рейнольдса. На верхней границе пограничного слоя $y \rightarrow 1$ устанавливаются условия затухания возмущений в виде

$$\psi(y) = \psi_1 \exp(-\alpha y) + \psi_2 \exp(-\gamma y), \quad \gamma^2 = \alpha^2 + i \operatorname{Re}(\alpha u(y) - \omega).$$

На нижней границе – условия прилипания жидкости к поверхности крыла

$$\psi(0) = \psi'(0) = 0. \quad (9)$$

Для численного решения задачи применялась процедура ортогональной прогонки. На границе $y = 1$ формулируются линейные условия, допускающие решение в форме (9). Интегрирование проводилось в направлении к границе $y = 0$. Спектральный параметр ω определяется из условия существования нетривиальных решений, удовлетворяющих граничным условиям (9). Характеристическая функция, удовлетворяющая этим условиям, может быть взята в виде $F = \psi_1(0)\psi_2'(0) - \psi_1'(0)\psi_2(0)$. Эта функция является нелинейной и зависит от ω , Re и α . При заданных Re , и α уравнение $F(\omega) = 0$ численно решается методом Ньютона. И в результате решения мы имеем точку $(\omega, \operatorname{Re}, \alpha)$ кривой нейтральной устойчивости. Изменяя значения Re , α и повторяя процедуру нахождения частоты ω , строится кривая нейтральной устойчивости.

Таким образом, была проведена серия расчетов, в результате которых для каждого профиля, полученного в эксперименте, построены кривые нейтральной устойчивости. По кривым нейтральной устойчивости определялись критические числа Рейнольдса. Индексы кривых соответствуют номеру сечения, вдоль крыла (см. таблицу 3).

При спуске вдоль крыла, характер течения изменяется, что видно по кривым нейтральной устойчивости (рис. 9). Критические числа Рейнольдса при этом меняются от 134 до 36,8. Вертикальные асимптотические участки на кри-

вых 6 – 8 (см. рис. 9а) демонстрируют неустойчивость течения по отношению к низкочастотным возмущениям, характерную для слоя сдвига.

Таблица 3.

Положение сечений профиля и соответствующие им Re_c

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x'	0,28	0,31	0,33	0,36	0,39	0,44	0,46	0,49	0,51	0,54	0,56	0,59
Re_c	334	209	134	80	57,5	41,8	38,4	36,5	36	38,5	42,9	61,6

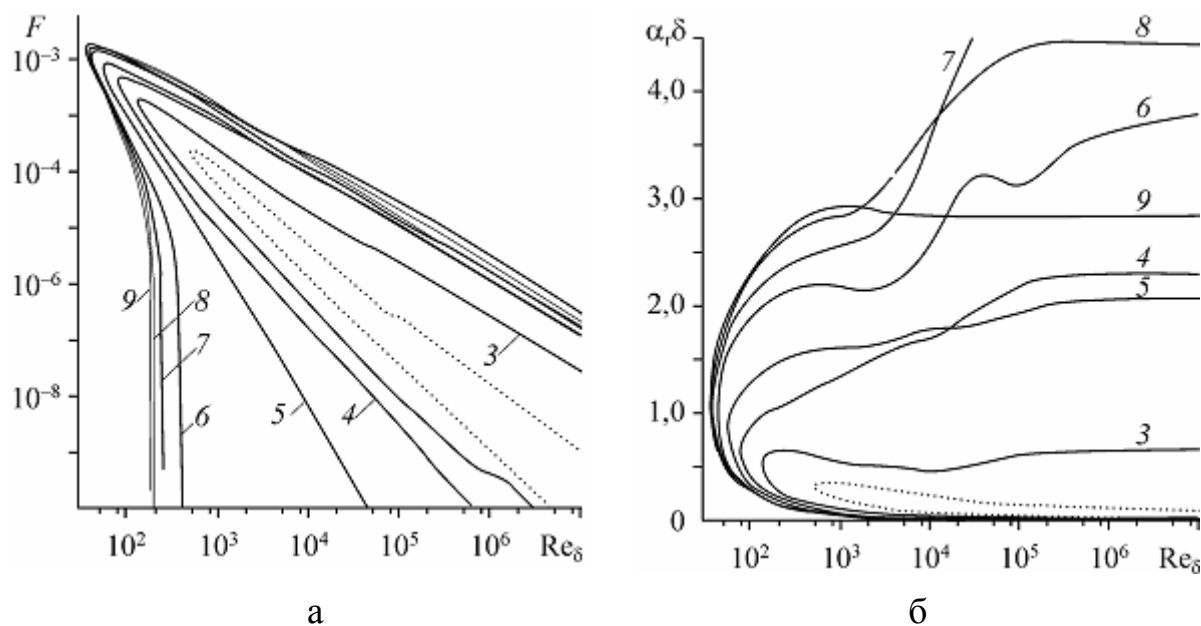


Рис. 9. Кривые нейтральной устойчивости

Было установлено, что коэффициенты усиления имеют максимумы в том же частотном диапазоне, что и максимумы спектральных разложениями пульсаций скорости, полученных в эксперименте.

Во втором разделе третьей главы изучены характеристики устойчивости течения над крылом с волнистой поверхностью. Установлено, что отрыв пограничного слоя над волнистым крылом локализуется во впадинах между волнами и друг с другом не соединяются. Кроме того, отрыв пограничного слоя по впадине волнистого крыла возникает раньше, чем над гладким крылом, а отрывные пузыри во впадинах имеют существенно меньшие размеры над волнистым крылом. Таким образом, показано, что существуют значительные различия пространственных картин отрывного течения на гладком и волнистом крыльях.

Зависимости волнового числа и частоты нейтрально устойчивых возмущений от числа Рейнольдса для профилей скорости, соответствующих различным положениям по хорде, представлены кривыми нейтральной устойчивости (рис. 10). Критические числа Рейнольдса монотонно уменьшаются по хорде вплоть до сечения 11 (в сечении 1 $Re_c = 250$, в сечении 11 – $Re_c = 35$). Кривые ней-

тральной устойчивости в плоскости (F, Re_δ) , позволяют видеть качественную перестройку свойств устойчивости течения, вызванную формированием внутреннего слоя сдвига.

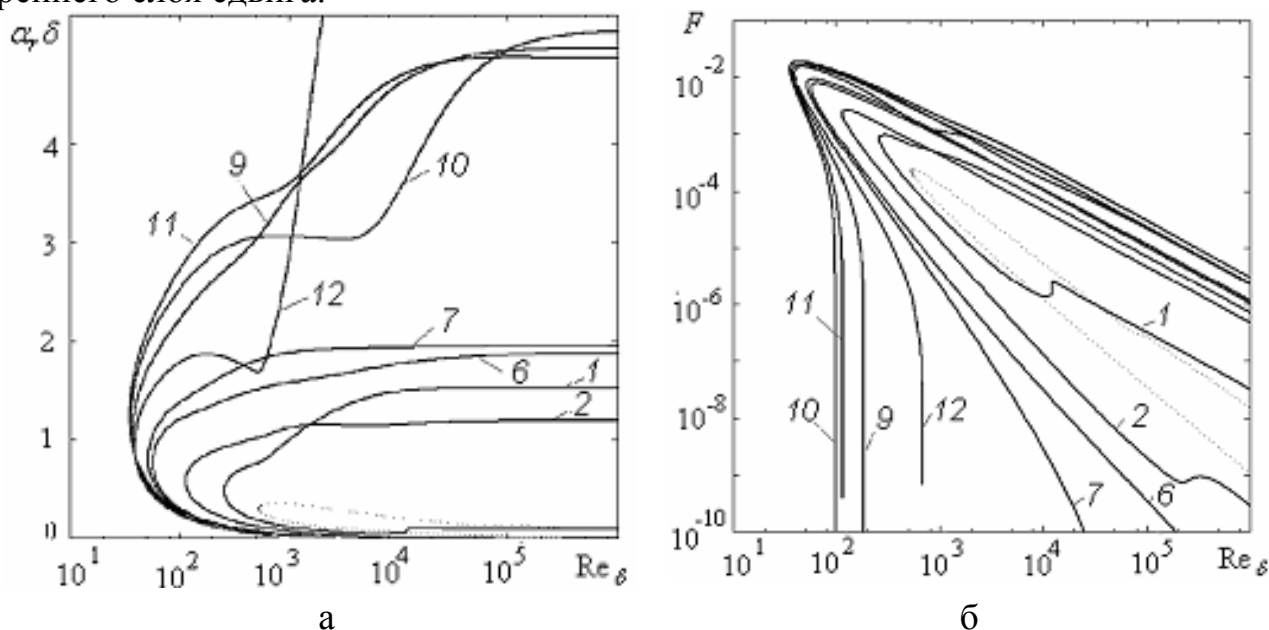


Рис. 10. Кривые нейтральной устойчивости для течения во впадинах

Установлено, что в сечении, ближайшем к передней кромке во впадине, неустойчивых возмущений нет, при этом, уже в следующем за ним сечении появляются неустойчивые возмущения со значительными инкрементами нарастания и широким частотным диапазоном.

Для течений на горбах также были построены кривые нейтральной устойчивости. Было установлено, что критические числа Рейнольдса, в каждом сечении не превышает локальных чисел Рейнольдса, что говорит об устойчивости течения над горбом волнистого крыла. Амплитуды пульсаций, наблюдаемые в эксперименте, оказываются при этом в несколько раз меньше амплитуд пульсаций течения во впадинах волнистого крыла и на гладком крыле. Возможным объяснением роста амплитуды пульсаций вдоль хорды может быть распространение волн неустойчивости возмущений во впадинах под углом к основному течению.

Таким образом, установлено, что придание поперечного профилирования обтекаемой поверхности модели крыла позволяет разбить трехмерную отрывную зону над ней на отдельные участки, разделенные течениям на горбах, устойчивыми в области отрыва на гладкой поверхности. Отрыв в течениях во впадинах при этом возникает выше по потоку на 11% хорды по сравнению с гладким профилем. Зона перехода развития отрывных возмущений во впадинах сужается по сравнению с соответствующей зоной на гладком профиле, при этом частоты и коэффициенты наиболее неустойчивых возмущений во впадине и на гладком профиле оказываются близки. Проведенное экспериментальное и численное исследование течения на волнистой поверхности позволяет сделать

вывод, что создание поперечной волнистости на поверхности является эффективным способом управления трехмерной отрывной зоной. Основные эффекты влияния волнистости на свойства течения могут быть получены в результате решения линейной задачи устойчивости для двумерных течений в миделевых сечениях впадин и горбов на профиле.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Разработан пакет программ для моделирования вихревых течений и ламинарно-турбулентного перехода системой дискретных вихрей. Пакет программ содержит объектно-ориентированную библиотеку классов счетных алгоритмов, классы построения аналитических функций и гидродинамических полей, содержит модуль визуализации результатов расчета, а также имеет единый пользовательский интерфейс.
2. Разработан алгоритм моделирования вихревых течений методом дискретных вихрей. Алгоритм позволяет аппроксимировать с любой наперед заданной точностью произвольные поля завихренности и изучать их последующую динамику.
3. Исследованы динамические и стохастические свойства полигональных систем точечных и гауссовских вихрей. Установлены зависимости инкрементов неустойчивости от параметров системы. Показано, что в данных системах, в общем случае, при $N > 7$ имеет место динамический хаос. Численно показано, что система гауссовских вихрей стабилизируется при увеличении значения дисперсии вихревых частиц. Результаты численного исследования согласуются с аналитическими результатами линейной теории устойчивости.
4. Исследована обобщенная энтропия Колмогорова–Синая. Показано, с ее помощью можно детектировать переходы стационарных состояний в вихревой системе. Установлена связь этой энтропии с энтропией Гиббса и предложен алгоритм ее численного расчета. Данный алгоритм пригоден для вычисления энтропии Гиббса любых дискретных систем частиц, в частности систем молекул.
5. Аналитически решена задача линейной устойчивости полигональной системы гауссовских вихрей. Получена аналитическая зависимость инкремента нарастания возмущений в зависимости от дисперсии частиц. Показано, что имеется конечное значение дисперсии, при котором стабилизируются все моды возмущений.
6. Выполнены численные расчеты линейной устойчивости течения с местной зоной отрыва потока на поверхности гладкого и волнистого крыла. Результаты численного расчета согласуются с экспериментальными данными. Установлено, что придание поперечного профилирования обтекаемой поверхности модели крыла позволяют управлять трехмерной отрывной зоной.

Автор искренне благодарит своего научного руководителя д.ф.-м.н., проф. В.Я. Рудяка за постоянную помощь в работе, полезные советы и поддержку на протяжении всех этапов исследования. Автор выражает признательность к.ф.-м.н., доценту Е.Г. Борду за теоретические консультации и помощь в решении аналитических задач.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ

1. Кранчев Д.Ф. Стохастические свойства системы точечных вихрей / Рудяк В.Я., Борд Е.Г., Кранчев Д.Ф. // Письма в журнал технической физики. – 2004. – Т. 30, вып. 6. – С. 20-24.
2. Кранчев Д.Ф. Динамический хаос в полигональной системе точечных вихрей / Рудяк В.Я., Борд Е.Г., Кранчев Д.Ф. // Доклады академии наук высшей школы РФ. – 2004. – № 2(3). – С. 48-57.
3. Кранчев Д.Ф. Исследование устойчивости полигональных систем вихрей / Кранчев Д.Ф. // Доклады молодежной конференции «Устойчивость и турбулентность течений гомогенных и гетерогенных жидкостей». – Новосибирск: ИТПМ СО РАН. – 2005, вып. X, – С. 102-105.
4. Кранчев Д.Ф. Линейная устойчивость системы гауссовских вихрей / Борд Е.Г., Кранчев Д.Ф. // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2005. – Т. VIII, № 3(23). – С. 8-17.
5. Кранчев Д.Ф. Обобщенная К-энтропия и энтропия Гиббса системы точечных вихрей / Рудяк В.Я., Кранчев Д.Ф. // Письма в журнал технической физики. – 2006. – Т. 32, вып. 18. – С. 58-64.
6. Кранчев Д.Ф. Экспериментальное и теоретическое исследование развития возмущений в пограничном слое на крыле малого удлинения / Рудяк В.Я., Борд Е.Г., Кранчев Д.Ф., Козлов В.В., Зверков И.Д., Занин Б.Ю., Довгаль А.В. // Теплофизика и аэромеханика. – 2006. – Т. 13, № 4. – С. 551-560.

Отпечатано в типографии Новосибирского
государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20,
тел./факс (383) 346-08-57
формат 60x84/16, объем 1.5 п.л., тираж 100 экз.,
заказ № 1199 , подписано в печать 10.09.07 г.